CM体上の潜在的保型性と局所大域整合性について

松本晃二郎
東京大学大学院数理科学研究科

修士論文の要約

- 大域Langlands対応における主要な問題である潜在的保型性を今まで知られていなかった多くのクラスについて示した。
- さらに潜在的保型性を示すときにより詳しい性質を同時に理解する手法を導入し、局所大域整合性やRamanujan予想などに応用を与えた。

この結果は「整数論」に関する結果である。最初に今回扱う対象であるGalois表現と保型表現という対象について説明する。Fを代数体、nは正整数、pは素数とする。

Galois表現と保型表現

- Fのn次元p進Galois表現とは連続準同型$G_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p})$のこと。
例：F上の楕円曲線Aのp冪等分点から得られるもの$(\varprojlim_n A(\overline{F})[p^n]) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{Q}_p}$やより一般に$F$上の代数体多様体$X$の$p$進エタールコホモロジー$H^i_{et}(X_{\overline{F}}, \overline{\mathbb{Q}_p})$.
- $\mathrm{GL}_{n,F}$の保型表現とは$\mathrm{GL}_{n,F}$に関係する解析的な対象であり、$\mathrm{GL}_n(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$上の解析的にも数論的にも良い振る舞いをする関数（例えば上半平面上のHecke同時固有modular形式）などを一般化したものになっている。

次に大域Langlands対応について説明する。

大域Langlands対応

大域Langlands対応とはFの半単純n次元p進Galois表現という代数的な対象と$\mathrm{GL}_{n,F}$の保型表現という解析的な対象の間に一対一対応があることを主張する予想である。

$$(\mathrm{GL}_{n,F}\text{の保型表現}) \leftrightarrow (F\text{の}n\text{次元}p\text{進Galois表現})$$

実際にFはCM体または総実体の場合は、[Sch15]や[HLTT16]により正則でcuspidal(以降RCと略す)な保型表現に対してp進Galois表現は構成されている。

$$\mathrm{rec}_{F,p} : (\mathrm{GL}_{n,F}\text{のRCな保型表現}) \to (F\text{の}n\text{次元}p\text{進Galois表現})$$

以降の議論では、FがCM体または総実体であることを仮定する。
大域Langlands対応は代数と解析という異なる側面を持つ対象の間の対応を主張しているので、それが部分的にでも解けると多くの応用がある。

- Fermat予想（$\mathbb{Q}$上の楕円曲線のGalois表現がmodular形式に対応する）
- Sato-Tate予想（Galois表現のL関数が保型のL関数と等しい）
- Ramanujan予想（保型表現にもガロア表現と同じような操作がある、Langlands関手性）

次に、今回修士論文で扱った潜在的保型性や局所大域整合性について説明する。

潜在的保型性

- Galois表現の保型性 $=$ Galois表現が保型表現からくること。$\mathrm{rec}_{F,p}$の逆射。
- Galois表現の潜在的保型性 $=$ Galois表現が少なくともFを有限次拡大することも許せば保型からくること。
- Sato-Tate予想やRamanujan予想はこの潜在的保型性で十分であり、 RCの保型表現やp進Galois表現が本質的共役自己双対性というものを持つ場合(以降ECSDと略す)にはかなりわかっていた話だが、そうでない場合は2次元で特殊なweightの場合くらいしかまとまった結果はなかった。（保型やGaloisにはweightと呼ばれるn個の整数からなる不変量がある。）

局所大域整合性について説明する前に、必要な用語を述べる。

- Galois 表現 ρ や保型表現 π は各 F の有限素点 v（F の整数環の 0 でない素イデアル）に対して， v 成分 ρ_v, π_v を考えることができ、ρ, π はともにすべての v 成分たちによって決定される。
ρ_v : F の v での完備化 F_v の p 進 Galois 表現
π_v : $\mathrm{GL}_n(F_v)$ の既約 smooth 表現
- vがpを含まないとき、自然な全単射
$\mathrm{WD} : (F_v$ の p 進 Galois 表現$) \xrightarrow{\sim} (F_v$のWeil-Deligne表現$)$ がある。
Weil-Deligne表現$=$ 半単純成分とモノドロミー作用素と呼ばれるものの組 （少し修正する必要があるが、以降の議論においてもそれらの違いは無視する。）

局所大域整合性

- 局所Langlands対応$=$ 大域Langlands対応の局所版（証明されている。）
rec_{F_v} : ($\mathrm{GL}_n(F_v)$ の既約 smooth 表現) $\xrightarrow{\sim}$ (F_vのn次元Weil-Deligne表現)
- 局所大域整合性とはRCな保型表現πとFのpを含まない有限素点vに対して、次が成立することを予想するもの。

$$\mathrm{WD}(\mathrm{rec}_{F,p}(\pi)_v) = \mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v)$$

- 局所大域整合性に関しても、ECSDの場合には完全にわかってが、そうでない場合はいくつかの2次元の場合くらいしかまとまった結果はなかった。

- 今回実際に扱うのは、p進Galois表現ではなくのp進Galois表現の整合系という全ての素数pに対してp進Galois表現が与えられていて、それらがある意味整合的になっているものである。
- 例えば、特に興味のあるF上の代数多様体のp進エタールコホモロジーたちやRCな保型から構成されているp進Galois表現たちは整合系になっている。
- 代数多様体のp進エタールコホモロジー（の部分商）やRCな保型から構成されているGalois表現の整合系のことをweakly pure と呼ぶことにする。

したがって、今回は次のようなものを考える。

$$(\mathrm{rec}_{F,p})_p : (\mathrm{GL}_{n,F}\text{のRCな保型表現}) \to (\text{weakly pureな}F\text{の}n\text{次元}p\text{進Galois表現の整合系})$$

私は修士論文で潜在的保型性や局所大域整合性をECSDではない状況で今までほとんど知られていなかったいくつかの一般次元の場合や一般のweightの場合に示した。

主結果

- (潜在的保型性) $\mathcal{R} = (r_p : G_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p}))_p$を既約でweightが正則かつweakly pureなp進Galois表現の整合系で次のいずれかの仮定を満たすとする。
(a) $\mathcal{R}$は本質的自己双対である。
(b) $\mathcal{R}$は十分正則なweightを持つ。
このとき、Fの有限次拡大CM体Eと$\mathrm{GL}_{n,E}$のRCな保型表現πが存在して、$\mathcal{R}|_{G_E} = (\mathrm{rec}_{E,p}(\pi))_p$が成立する。
- （局所大域整合性) πをRCな保型表現で $\mathcal{R}_\pi = (\mathrm{rec}_{F,p}(\pi)))_p$が既約になっているものとし、次のいずれかの仮定を満たすとする。
(a) πは本質的自己双対である。
(b) πは十分正則なweightを持つ。
このとき、正なDirichlet密度の素数pに対しては$\mathrm{WD}(\mathrm{rec}_{F,p}(\pi)|_{G_{F_v}}) = \mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v)$が$p$を含まない全ての$F$の有限素点$v$に対して成立する。
- （Ramanujan予想、Sato-Tate予想) 全てのRCな$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$の保型表現$\pi$に対してRamanujan予想が成立する。さらにcentral characterがparallel weightな場合はSato-Tate予想も成立する。

これらは全て次の一つの定理から導かれる。これは、潜在的保型性と局所大域整合性をある意味同時に示すような結果で今回オリジナルの形のものである。

主定理(潜在的保型性と局所大域整合性)

$\mathcal{R} = (r_p : G_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p}))_p$を既約でweightが正則かつweakly pureなp進Galois表現の整合系で次のいづれかの仮定を満たすとする。
(a) $\mathcal{R}$は本質的自己双対である。
(b) $\mathcal{R}$は十分正則なweightを持つ。
このとき、F の有限次拡大 CM 体 E と $\mathrm{GL}_{n,E}$ の RC な保型表現 π が存在して、$\mathcal{R}|_{G_E} = (\mathrm{rec}_{E,p}(\pi))_p$ が成立する。さらに正な Dirichlet 密度の素数 p に対しては $\mathrm{WD}(\mathrm{rec}_{E,p}(\pi)|_{G_{E_v}}) = \mathrm{rec}_{E_v}(\pi_v)$が$p$を含まない全ての$E$の有限素点$v$に対して成立する。

以下では、主定理の証明と主定理から主結果を導く方法について概略を説明する。まず、主定理から主結果を導く方法について概略を説明する。

主定理 $\Rightarrow$ 主結果の局所大域整合性

[Var14]は$\mathrm{WD}(\mathrm{rec}_{F,p}(\pi)|_{G_{F_v}})^{ss} = \mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v)^{ss}$ を示していた。(ssは半単純成分)
したがって、あとはモノドロミーの部分だけが問題であるが、モノドロミーは体を有限次拡大しても変わらない。
これから「主定理 for $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\pi \Rightarrow \mathcal{R}_\pi$の局所大域整合性」がわかる。

主定理 $\Rightarrow$ 主結果のRamanujan予想

- Ramanujan予想はπの局所成分π_vに関する予想
- 潜在的保型性 $+$ とってくる保型のvでのある種のweak control $\Rightarrow$ Ramanujan予想
- 潜在的保型性は適切に誘導やテンソル積をとると示しやすくなるが、ある種のweak controlは難しくなる。
- とってくる保型表現が局所大域整合性を満たすというstrong controlは上で述べた表現の操作で保たれる。このテクニックは他にもweight monodromy予想やBloch-Kato予想にも応用がある。

最後に主定理の証明についての概略を述べる。

潜在的保型性と局所大域整合性

- $N(\mathrm{WD}(\mathrm{rec}_{F,p}(\pi)|_{G_{F_v}})) \leq N(\mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v))$ by [Var14] (Nはモノドロミー)
- Fを適切に拡大する $+$ 保型性持ち上げ定理 $\Rightarrow$ 潜在的保型性
- 保型性持ち上げ定理 $=$ 剰余表現という情報を落としたものが保型から来ていて、いくつか局所的な仮定を満たせばもともと保型からくる。
- 一番単純な形をした保型性持ち上げ定理の証明のなかでparaholic subgroupを用いてモノドロミーを抑えながら議論することで、とってきた保型πが$N(\mathrm{WD}(\mathrm{rec}_{F,p}(\pi)|_{G_{F_v}})) \geq N(\mathrm{rec}_{F_v}(\pi_v))$を満たすことを示せることに気づいた。

潜在的保型性の証明

- ECSDの場合は上で述べた保型性持ち上げ定理はよく機能し、潜在的保型性はかなり分かっていた。
- 一般の場合はそれは仮定が強すぎて機能しないと思われていた。
- 修士論文では、weakly pureなGalois表現の整合系$(r_p : G_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p}))$に対し、正なDirichlet密度の素数$p$においては$r_p$の局所的な性質がECSDに近いことを示し、ECSDの結果とその保型性持ち上げ定理をうまく組み合わせることで、潜在的保型性を一般次元を含むいくつかの場合に拡張した。

参考文献

[Sch15] P. Scholze, " On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties " , Ann. of Math. (2), vol. 182, no. 3, pp. 945-1066, 2015.
[HLTT16] M. Harris, K.-W. Lan, R. Taylor, and J. Thorne, " On the rigid cohomology of certain Shimura varieties " , Res. Math. Sci., vol. 3, Paper No. 37, 308, 2016.
[Var14] I. Varma, " Local-global compatibility for regular algebraic cuspidal automorphic representations when l ≠ p " , 2014. arXiv: 1411.2520.