滑らかなカラビ・ヤウ多様体の指数

政村 悠登
東京大学大学院数理科学研究科

双有理代数幾何学

代数多様体$/\mathbb{C}$を双有理同値で分類したい．
極小モデル理論における予想：任意の代数多様体Yは，「良い」性質をみたす代数多様体Xと双有理同値．

Xの「良い」性質とは，
- 特異点が扱いやすい（滑らか，ターミナル，など）．
- 標準因子K_Xが特別な性質を持つ（正値性，負値性，など）．

そのようなXの分類
- Xたちの有界性
- Xの不変量の有界性，分類

定義（カラビ・ヤウ多様体）

代数多様体Xがカラビ・ヤウ多様体であるとは，Xが正規かつ射影的であり，$K_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$をみたすこと．

- カラビ・ヤウ曲線 $\Longleftrightarrow$ 楕円曲線．
- カラビ・ヤウ曲面
  $\Longleftrightarrow$ K3曲面，アーベル曲面，エンリケス曲面，双楕円曲面．

定義（カラビ・ヤウ多様体の指数）

X：カラビ・ヤウ多様体．Xの指数とは，

$$\mathrm{index}(X) = \min \{\, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid mK_X \sim 0 \,\}.$$

双有理幾何では，代数多様体Xだけでなく，ログ対(X, B)を考える（BはX上の$\mathbb{Q}$因子）．
- (X, B)：カラビ・ヤウ対 $\Longleftrightarrow$ X：射影的，$K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} 0$.
- $\mathrm{index}(X, B) = \min \{\, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid m(K_X + B) \sim 0 \,\}$.

定義

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，$\Phi \subseteq [0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

$$I_{\mathrm{klt}}(n, \Phi) = \left\{ \mathrm{index}(X, B) \;\middle|\; \begin{array}{c} (X, B)\text{：KLTカラビ・ヤウ対} \\ \dim X = n\text{，}\ \mathrm{Coeff}(B) \subseteq \Phi \end{array} \right\}.$$

$I_{\mathrm{lc}}(n, \Phi)$も同様．

- KLT（川又log terminal），LC（log canonical）は特異点に関する条件．
- KLT $\Longrightarrow$ LC.

予想（カラビ・ヤウ対の指数予想）

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，$\Phi \subseteq [0, 1] \cap \mathbb{Q}$：有限集合．このとき，$I_{\mathrm{lc}}(n, \Phi)$は有界．
すなわち，次をみたす$m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$が存在する：$(X, B)$が$n$次元のLCカラビ・ヤウ対で$\mathrm{Coeff}(B) \subseteq \Phi$をみたすならば，$m(K_X + B) \sim 0$.

- [JL21]：3次元以下（$n \leq 3$）で正しい．
- 高次元では未解決．

証明に向けて，次元nに関する帰納法ステップがいくつか知られている：

定理（[Xu19]）

以下の二つを仮定する：
- n次元以下のKLTカラビ・ヤウ多様体$(X, 0)$（すなわち$\Phi = \{0\}$）に対する指数予想
- $n-2$次元以下の「B多重標準表現の有界性」

このとき，n次元の（一般のΦに対する）指数予想が成り立つ．

- B多重標準表現：$\mathrm{Bir}(X, B) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^0(X, m(K_X + B)))$.
- B多重表現表現の有界性：指数予想よりも強い予想．

さらなる帰納法ステップ
- KLTカラビ・ヤウ多様体$(X, 0)$の指数を，より低次元のカラビ・ヤウ対の指数と関係づけたい．

定義

$$I_{\mathrm{sm}}(n) = \{\, \mathrm{index}(X) \mid X\text{：}n\text{次元の滑らかなカラビ・ヤウ多様体} \,\},$$
$$I_{\mathrm{term}}(n) = \{\, \mathrm{index}(X) \mid X\text{：}n\text{次元のターミナルなカラビ・ヤウ多様体} \,\},$$
$$\Phi_{\mathrm{st}} = \{\, 1 - 1/b \mid b \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \,\}.$$

予想（修士論文）

$I_{\mathrm{term}}(n) = I_{\mathrm{klt}}(n-1, \Phi_{\mathrm{st}})$.

主定理

$I_{\mathrm{sm}}(n) \subseteq I_{\mathrm{klt}}(n-1, \Phi_{\mathrm{st}}) \subseteq I_{\mathrm{term}}(n)$.

- 2つ目の包含は，予想の片方の包含が正しいことを示している．
- 1つ目の包含は，予想のもう一方の包含が部分的に正しいことを示している．

系

$I_{\mathrm{sm}}(4)$：有界．

主定理の1つ目の包含を証明するアイデア
- 次元nに関する帰納法

X：n次元の滑らかなカラビ・ヤウ多様体，$m = \mathrm{index}(X)$とする．
$m \in I_{\mathrm{klt}}(n-1, \Phi_{\mathrm{st}})$を示せばよい．

Beauville–Bogomolov分解
- Xはエタール被覆$\tilde{X} = \prod_i Y_i \to X$により直積に分解する．
- Y_i：厳密カラビ・ヤウ多様体，ハイパー・ケーラー多様体，またはアーベル多様体．
- 指数mの自己同型$g \in \mathrm{Aut}(\tilde{X}/X)$がとれる．

$\tilde{X}$の分解の成分が1つだけの場合
- gの$\tilde{X}$への作用は自由
  $\to \varphi(m) \leq 2n$がわかる（φ：オイラー関数）
  $\to$ 下の定理から$m \in I_{\mathrm{klt}}(n-1, \Phi_{\mathrm{st}})$.

$\tilde{X}$の分解の成分が2つ以上の場合
- $\tilde{X} = Y_1 \times Z$，$Z = \prod_{i \neq 1} Y_i$とする．
- gも$g = g_1 \times g_Z$と分解しているとしてよい（そうでない場合は容易）．
- g_1が固定点を持つとき
  g_Zの作用が自由
  $\to Z/\langle g_Z \rangle$に帰納法の仮定を用いて，$m \in I_{\mathrm{klt}}(n-1, \Phi_{\mathrm{st}})$が従う．
- g_1が固定点を持たないとき
  Holomorphic Lefschetz formulaから，$m_1 = \mathrm{index}(g_1)$が$\varphi(m_1) \leq 2n_1$をみたす．
  $\to$ 下の定理から$m \in I_{\mathrm{klt}}(n-1, \Phi_{\mathrm{st}})$が従う．

定理

$n \geq 3$に対し，$\{\, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \varphi(m) \leq 2n \,\} \subseteq I_{\mathrm{klt}}(n-1, \Phi_{\mathrm{st}})$.

証明のアイデア
- 次元nに関する帰納法
- 重み付き射影空間を用いた具体的なカラビ・ヤウ対の構成
  例えば，

$$(X, B) = \left(\mathbb{P}((m-1)^{(e-1)}, 1^{(m-1)}), \frac{m^e - 1}{m^e} H + \sum_{i=0}^{e-1} \frac{m^{i+1} - 1}{m^{i+1}} H_i \right),$$
$$H_i = \{x_i = 0\}, \quad H = \{x_0 + \cdots + x_{e-2} + x_{e-1}^{m-1} + \cdots + x_{e+m-3}^{m-1} = 0\}$$

は次元$m + e - 3$，指数m^eのKLTカラビ・ヤウ対．

今後の展望

- $I_{\mathrm{term}}(n)$に関する予想の証明（$n \geq 4$）
- 指数予想の証明（$n \geq 4$）
- B多重標準表現の有界性の証明（$n \geq 3$）
- 集合$I_{\mathrm{sm}}(n)$，$I_{\mathrm{term}}(n)$の決定，その最大値の評価/決定（$n \geq 4$）

- 指数予想，B多重標準表現を証明する大きな帰納法の枠組みを作る．
- $I_{\mathrm{term}}(n)$の最大値は予想されている[ETW22].

参考文献

[ETW22] Louis Esser, Burt Totaro, and Chengxi Wang, *Calabi–Yau varieties of large index*, 2022, arXiv: 2209.04597v2.

[JL21] Chen Jiang and Haidong Liu, *Boundedness of log pluricanonical representations of log Calabi–Yau pairs in dimension* 2, Algebra Number Theory **15** (2021), no. 2, 545–567.

[Xu19] Yanning Xu, *Some results about the index conjecture for log Calabi–Yau pairs*, 2019, arXiv: 1905.00297v2.