S行列、変形量子化、ラグランジアンを用いたHaag-Kastlerネットの構成手法

中江 優介
東京大学大学院 数理科学研究科 修士2年; 指導教官: 河東泰之教授

修士論文の要約

Haag-Kastlerネット及びBorchers tripleの作用素環論的な構成手法について主な3種類の研究を行った。

定義

Haag-Kastlerネットとは、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のフォンノイマン環の族 $\{\mathcal{M}(O)\}_O$ と、ポアンカレ群 $\mathcal{P}$ の $\mathcal{H}$ への強連続ユニタリ表現 U であって次を満たすもの。ここで O は $d(\geq 2)$ 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{M}^d$ の有界領域。

- (V1:単調性) $O_1 \subset O_2 \Rightarrow \mathcal{M}(O_1) \subset \mathcal{M}(O_2)$
- (V2:加法性) $\mathcal{M}(O_1 \cup O_2) = (\mathcal{M}(O_1) \vee \mathcal{M}(O_2))''$
- (V3:因果律) $O_1 \perp O_2 \Rightarrow [\mathcal{M}(O_1), \mathcal{M}(O_2)] = 0$
- (V4:ポアンカレ共変性) $U(\lambda)(\mathcal{M}(O))U(\lambda)^{-1} = \mathcal{M}(\lambda O)$
- (V5:スペクトル条件) $\mathrm{sp}\ U$ が閉未来錐 $\overline{V}_+$ に含まれる。
- (V6:真空ベクトルの存在) $\mathcal{H}$ に単位ベクトル Ω であって $U(\lambda)\Omega = \Omega, \quad \forall \lambda \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ を満たすものが唯一つ存在する。

注意

フォンノイマン環 $\mathcal{M}(O)$ の物理的解釈は、時空領域 O で観測可能な物理量のなす作用素全体のなす代数である。例えば(V3)は時空の離れた2領域においてそれぞれの事象が干渉しあわないことを意味する。

Haag-Kastlerネットを構成することは代数的場の量子論における基本的な問題である。

Haag-Kastlerネットよりも弱い対象であるBorchers tripleについても定義しておく。端的にいうと、全ての有界領域 O の代わりに、右楔形領域 $W_R = \{x = (x_0, x_1, \cdots, x_{d-1}) \in \mathbb{M}^d \mid x_1 > |x_0|\}$ に付随したフォンノイマン環のみを考えることに相当する。

定義

d 次元Borchers tripleとは、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のフォンノイマン環 $\mathcal{M}$ 、$\mathbb{R}^d$ の強連続ユニタリ表現 U 、$\mathcal{H}$ の単位ベクトル Ω の組 $(\mathcal{M}, U, \Omega)$ であって、次の条件を満たすものである。

- $\mathrm{sp}\ U$ が閉未来錐 $\overline{V}_+$ に含まれる。
- Ω が $\mathcal{M}$ に対して巡回かつ分離的なベクトルである。
- 任意の $\lambda \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ であって $\lambda W_R \subset W_R$ に対して $U(\lambda)\mathcal{M}U(\lambda)^{-1} \subset \mathcal{M}$ が成り立つ。

Haag-KastlerネットとBorchers tripleの関係は次のように表せる。

注意

Haag-Kastlerネット→Borchers tripleはいつでも構成可能。
Borchers triple→Haag-Kastlerネットは2次元の時はmodular nuclearityを満たせば構成可能(十分条件)。また、それ以外の次元については不明。

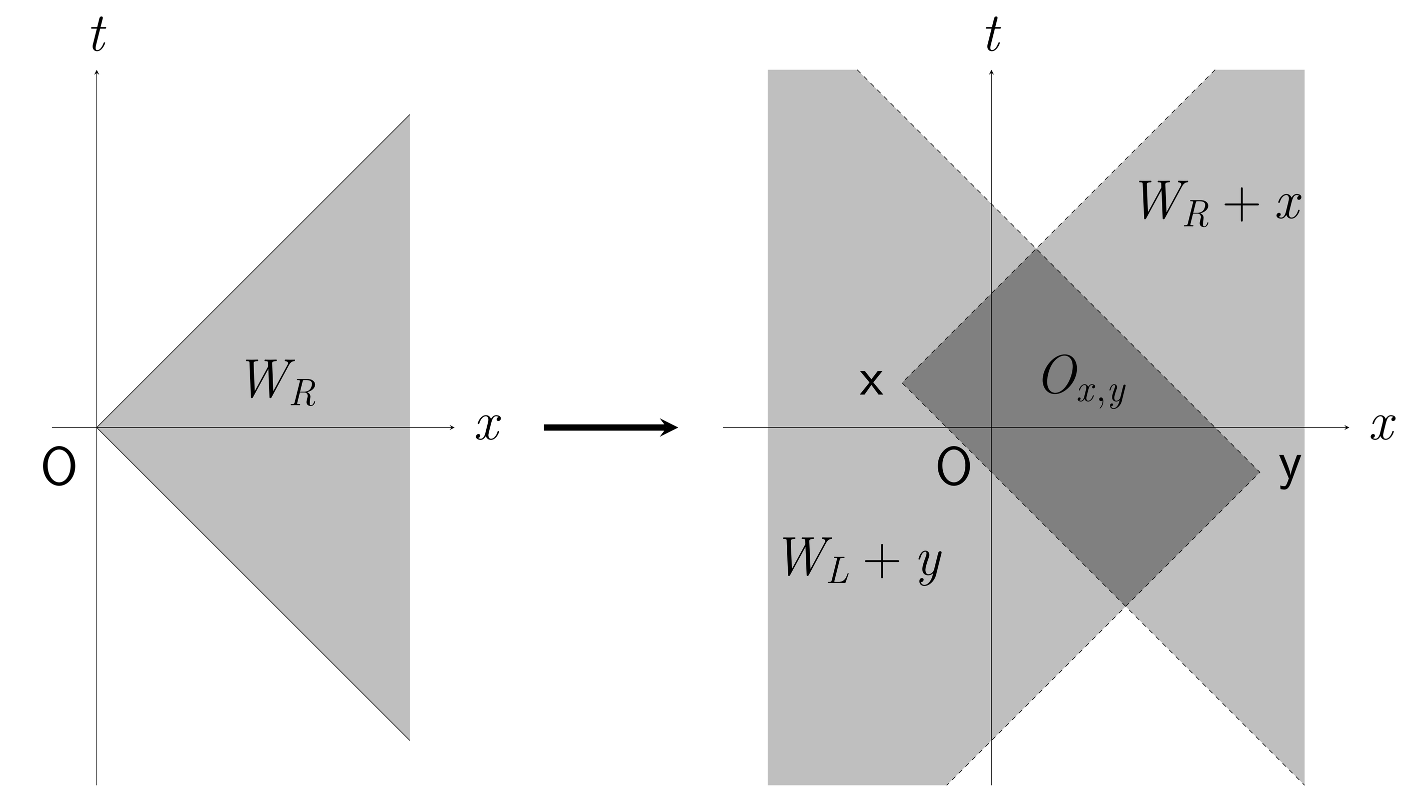

Figure: 2次元ミンコフスキー空間内の右楔形領域 W_R と楔形領域の共通部分 $O_{x,y}$

例：自由場

自由場を表すHaag-Kastlerネットは正準交換関係(Canonical Commutation Relation)を満たすWeyl代数をFock空間に表現することで得られる。

なぜ自由場以外のHaag-Kastlerネットの構成が難しいか？

構成の順序によって2通りの難しさがある。

- ヒルベルト空間から始める(方法1,2が該当)場合はV6を前提とできるので、V3や、有界領域に局在する作用素 $A \neq 1 \in \mathcal{M}(O)$ の存在が論点となる。
- 領域ごとの作用素を定めることから始める(方法3が該当)場合はV3が自動的に成り立つようにできるので、V6などが論点となる。

方法1：分解可能S行列を用いた方法 [Lec08]

内部で正則、境界で連続な散乱函数 $S_2 : S(0, \pi) \to \mathbb{C}$ であって

$$\overline{S_2(\theta)} = S_2(-\theta) = S_2(\theta + i\pi) = S_2(\theta)^{-1}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

を満たすものを考える。S_2で対称化したFock空間 $\mathcal{H}_{S_2}$ を構成し、自由場の時と同様の方法で場の演算子やフォンノイマン環 $\mathcal{M}$ それに付随した**2次元Borchers triple $(\mathcal{M}, U, \Omega)_{S_2}$ が構成できる。**

方法1は3次元以上には適用できないが、緩い追加の仮定を散乱関数に課すとmodular nuclearityを満たすので完全なHaag-Kastlerネットが構成できる。

方法2：変形量子化の1つであるWarped Convolutionを用いた方法 [BLS11]

$(\mathcal{M}, U, \Omega)$ を $d(\geq 2)$ 次元Borchers tripleとし、Q を次の形の $d \times d$ 実交代行列とする(それぞれ$d = 4, \neq 4$ のとき)：

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & -g & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & h & \cdots & 0 \\ h & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad h > 0, g \in \mathbb{R} \tag{2}$$

このとき、変形したフォンノイマン環を

$$\mathcal{M}_Q := \{A_Q \mid A \in \mathcal{M}\} \tag{3}$$

$$A_Q := \int_{\mathbb{R}^d} dE(p)\alpha_{Qp}(A) \tag{4}$$

とすることで Q で変形した**d次元Borchers triple $(\mathcal{M}_Q, U, \Omega)$ が構成できる。**

方法2は $d \geq 3$ のときはローレンツ対称性が破れてしまうことがわかっており、ミンコフスキー空間ではなく非可換ミンコフスキー空間上として考えるとうまく解釈ができることが知られている。

方法3：ラグランジアンを用いた構成方法 [BF20]

$d \geq 2$ とし、L をラグランジアンとする。テスト関数 ϕ に対し実数値を取る汎関数 F で添え字づけられた元 $S(F)$ 全体に次の関係式を入れる。

$$S(F)S(\delta\mathcal{L}(\phi_0)) = S(F^{\phi_0} + \delta\mathcal{L}(\phi_0)) = S(\delta\mathcal{L}(\phi_0))S(F) \tag{5}$$

$$S(F_1 + F_2 + F_3) = S(F_1 + F_3)S(F_3)^{-1}S(F_2 + F_3) \tag{6}$$

これによって生成される群を $\mathcal{G}_L$ とする。この群から群C*-環 $\mathcal{A}_L$ ができる。汎関数 F の台が O に含まれるものに制限すると $\mathcal{A}_L(O)$ を考えることができる。このとき、**C*-環のネット $\{\mathcal{A}(O)\}$ は(V1)〜(V5)を満たす。**

方法3は先述したように、V6に相当する条件が満たされておらず、ラグランジアンの形によって生成される作用素環のネットの構造に現れる差を調べる必要がある。

参考文献

[BF20] Detlev Buchholz and Klaus Fredenhagen.
A C*-algebraic approach to interacting quantum field theories.
Comm. Math. Phys., 377(2):947–969, 2020.

[BLS11] Detlev Buchholz, Gandalf Lechner, and Stephen J. Summers.
Warped convolutions, Rieffel deformations and the construction of quantum field theories.
Comm. Math. Phys., 304(1):95–123, 2011.

[Lec08] Gandalf Lechner.
Construction of quantum field theories with factorizing S-matrices.
Comm. Math. Phys., 277(3):821–860, 2008.