Diffeological spaceの接空間

Masaki Taho
math M2

Diffeological spaceは，可微分多様体の一般化の一つで，角付き多様体やorbifold，無限次元多様体などを含む．ここではまず定義から説明する．

Definition

Xを集合とする．ある整数$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$と開集合$U_p \subset \mathbb{R}^n$に対して，$p\colon U_p \to X$という形の写像を$X$のparametrizationという．$X$のparametrizationの族$\mathcal{D}_X$が次の公理を満たすとき，$(X, \mathcal{D}_X)$をdiffeological spaceという．ここで，$\mathcal{D}_X$の元をXのplotと呼ぶ．

- 全ての定値写像$U_p \to X$はXのplotである．
- $p\colon U_p \to X$をparametrizationとする．任意の$x \in U_p$に対して，あるxの開近傍Vが存在して，$p|_V \in \mathcal{D}_X$であるとき，p自身もXのplotである．
- 任意のXのplot $p\colon U_p \to X$と任意のなめらかな写像$f\colon V \to U_p$（ここで，$V \subset \mathbb{R}^m$は開集合であり，fは通常の意味でなめらかであるとする）に対して，$p \circ f\colon V \to X$はXのplotである．

Diffeological spaceを考えることによって，多様体の枠組みでは不可能だった種々の構成が可能となり，多様体の枠組みでは考察が難しかった対象も考察が可能になる．

- Mを可微分多様体とする．多様体間の写像としてなめらかなparametrizationを全て集めた集合を$\mathcal{D}_M$とすると，$(M, \mathcal{D}_M)$はdiffeological spaceとなる．
- Diffeological spaceの商集合には常にdiffeologyが入れられる．例えば，$\mathbb{R}^n$に多様体のdiffeologyを入れたとき，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$（$\alpha$は無理数）や$\mathbb{R}^n/O(n)$などもdiffeological spaceとみなすことができる．
- Diffeological spaceの部分集合にも常にdiffeologyが入れられる．例えば，$[0,\infty) \subset \mathbb{R}$や$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$などは自然にdiffeological spaceとみなすことができる．このとき，前の例の$\mathbb{R}^n/O(n)$と$[0,\infty)$とは全て微分同相でないことが知られている．

Diffeological spaceの接空間を考えたい．[2]は内部接空間，外部接空間という二つの種類の接空間を考案した．内部接空間は速度ベクトル全体の空間，外部接空間は微分作用素全体の空間というイメージである．

Eucl_*を基点付きのEuclid空間の開集合の圏，Dflg_*を基点付きdiffeological spaceの圏とする．包含関手$i\colon \mathrm{Eucl}_* \to \mathrm{Dflg}_*$と，通常の多様体としての接空間関手$T\colon \mathrm{Eucl}_* \to \mathrm{Vect}$を考える．

Definition

Xをdiffeological space，xをXの点とする．Xのxでの内部接空間$T_x(X)$を，

$$T_x(X) = \mathrm{Lan}_i\, T(X,x)$$

で定義する．

一方，$G(X,x)$を点xの近傍で定義された実数値関数の芽の集合としたとき，Xのxでの外部接空間$\hat{T}_x(X)$を，

$$\left\{ D\colon G(X,x) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} D\text{は線形かつなめらか} \\ D\text{はLeibniz則を満たす} \end{array} \right\}$$

で定義する．上の条件のうち，Dがなめらかであるという条件を外した接空間を右側接空間といい，$\hat{T}^R_x(X)$と書く．

修士論文の主結果をまとめると次のようになる．

Theorem

Xをdiffeological space，xをXの点とする．Xがsmoothly regular（[1]にて定義される）であるとき，次の同型が成立する:

$$\hat{T}^R_x(X) \cong \mathrm{Ran}_i\, T(X,x).$$

この定理の右辺を$\hat{\mathbb{T}}^R_x(X)$と書き，smoothly regularでない空間においては通常の右側接空間と区別する．いくつかのdiffeological spaceの接空間の計算結果を述べる．

- $\mathbb{R}$の$\mathbb{R}^2$への作用を$t \cdot (x,y) = (2^t x, 2^{-t} y)$（$t \in \mathbb{R}$）により定義する．この作用による$\mathbb{R}^2$の商空間を$X$とすると，$T_{[(0,0)]}(X) \cong 0$である一方で$\hat{\mathbb{T}}^R_{[(0,0)]}(X)$は1次元以上であることが計算できる．
- 二つの$\mathbb{R}$を，負の実軸の部分だけ重ね合わせてできる商空間Yを考えると，$T_0(Y) \cong \mathbb{R}^2$であるが，内部接空間から外部接空間への自然変換の像は1次元である．

Augustin Batubenge, Yael Karshon, and Jordan Watts.
Diffeological, frölicher, and differential spaces, 2023.

J. Daniel Christensen and Enxin Wu.
Tangent spaces and tangent bundles for diffeological spaces.
Cah. Topol. Géom. Différ. Catég., 57(1):3–50, 2016.