アフィンDeligne-Lusztig多様体の等次元性

高谷悠太
東京大学数理科学研究科

類体論とラングランズ対応

高木とArtinによる類体論では,

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\text{の指標} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}\text{の指標}$$

という対応が構成された．ラングランズは類体論の高次元化を考え，$\mathbb{Q}$上の簡約代数群Gに対し

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\text{の}L\text{パラメータ} \longleftrightarrow G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})\text{の保型表現}$$

という対応を予想した．類体論はこの予想の$G=\mathbb{G}_m$の場合である．

志村多様体

志村多様体$\mathrm{Sh}_K(G,X)$は3つのデータ

- G: $\mathbb{Q}$上の簡約代数群
- $X=\{h\colon \mathbb{S}\to G_{\mathbb{R}}\}$: $\mathrm{Rep}(G_{\mathbb{R}})$の“複素構造”
- $K\subset G(\mathbb{A}_f)$: コンパクト開部分群

から定まる代数多様体であり，$\mathbb{C}$上の点集合は

$$\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})=G(\mathbb{Q})\backslash X\times G(\mathbb{A}_f)/K$$

と表される．志村多様体$\mathrm{Sh}_K(G,X)$は代数体E上定義され，ℓ進エタールコホモロジー

$$\mathrm{colim}_K\, H_{\acute{e}t}^{*}(\mathrm{Sh}_K(G,X),\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

には$\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$と$G(\mathbb{A}_f)$が作用する．そのため，志村多様体のコホモロジーはラングランズ対応の主な源となっている．

Oortの葉層構造とアフィンDeligne-Lusztig多様体

志村多様体には整モデルがあり，特殊ファイバーにはstratification

$$\overline{\mathrm{Sh}}_K=\coprod_b \overline{\mathrm{Sh}}_K^b$$

と概直積構造

$$\mathrm{RZ}_b^{\mathrm{red}}\times \mathrm{Igs}_b\to \overline{\mathrm{Sh}}_K^b$$

が入る．これをOortの葉層構造といい，Mantovanの公式という志村多様体のコホモロジーの計算手法などに応用されている．
$\mathrm{RZ}_b^{\mathrm{red}}$は$p$可除群のモジュライ空間であり，Dieudonné加群を用いた分類理論を用いることで，その完全化$\mathrm{RZ}_b^{\mathrm{perf}}$が半線形データで表せる．半線形表示を一般化することで，p可除群と対応しない場合にも完全スキームが定義され，アフィンDeligne-Lusztig多様体が得られる．

アフィンDeligne-Lusztig多様体の定義

アフィンDeligne-Lusztig多様体$X_\mu(b)$は3つのデータ

- $\mathcal{G}$: 簡約代数群$G_{/\mathbb{Q}_p}$の$\mathbb{Z}_p$上簡約モデル
- $\mu\colon \mathbb{G}_m\to G_{\breve{\mathbb{Q}}_p}$
- $b\in G(\breve{\mathbb{Q}}_p)$

から定まる$\overline{\mathbb{F}}_p$上の完全スキームであり，$\overline{\mathbb{F}}_p$上の点集合は

$$X_\mu(b)(\overline{\mathbb{F}}_p)=\{g\in G(\breve{\mathbb{Q}}_p)/\mathcal{G}(\breve{\mathbb{Z}}_p)\mid g^{-1}b\sigma(g)\in \mathcal{G}(\breve{\mathbb{Z}}_p)\mu(p)\mathcal{G}(\breve{\mathbb{Z}}_p)\}$$

と表される．$\breve{\mathbb{Q}}_p$は$\mathbb{Q}_p$の最大不分岐拡大の完備化であり，その整環を$\breve{\mathbb{Z}}_p$，Frobenius自己同型をσとする．

	$\overline{\mathrm{Sh}}_K^b$	$X_\mu(b)$
代数群	$G_{/\mathbb{Q}}$	$G_{/\mathbb{Q}_p}$
指標	X: miniscule	μ: arbitrary
レベル	K	$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$
分類対象	アーベル多様体	p可除群のDieudonné加群

$\overline{\mathrm{Sh}}_K$に比べ$X_\mu(b)$は群論的に定義されており扱いやすい．修士論文では$X_\mu(b)$の既約成分について研究を行った．bのσ交換子群

$$J_b(\mathbb{Q}_p)=\{g\in G(\breve{\mathbb{Q}}_p)\mid g^{-1}b\sigma(g)=b\}$$

は$X_\mu(b)$に作用する．この作用に関する$X_\mu(b)$の既約成分の軌道がMirković-Vilonenサイクルを用いて表示されることが予想されていた．

Chen-Zhu予想

$$J_b(\mathbb{Q}_p)\backslash \mathrm{Irr}(X_\mu(b))\cong \mathrm{MV}_\mu(\lambda(b))$$

最大次元の既約成分に制限すれば[Nie22]においてMirković-Vilonenサイクルへの全単射が構成されていた．そのため，修士論文では次の結果を示し，系としてChen-Zhu予想を得た．

主定理

$X_\mu(b)$の既約成分の次元はすべて等しい．

アフィンDeligne-Lusztig多様体は$\mathbb{F}_p((t))$などの等標数の局所体上でも定義される．等標数での$X_\mu(b)$の等次元性は[HV12]で証明されている．主定理の証明では，[HV12]を混標数の局所体上に言い換え，Oortの葉層構造の局所類似を構成することを目標とした．Sh_Kの各点での完備化がp可除群の普遍変形になることを利用すると，以下が期待される．

局所葉層構造

各点$g\in X_\mu(b)(\overline{\mathbb{F}}_p)$に対し$b'=g^{-1}b\sigma(g)$に対応する“$p$可除群”の普遍変形環を$\mathcal{D}_{b'}$とする．$\mathcal{D}_{b'}$の閉Newton stratum $\mathcal{N}$への有限全射

$$X_\mu(b)^{\wedge}_{/g}\,\widehat{\times}\,\mathrm{Igs}^{\wedge}\xrightarrow{\mathit{fin.surj.}}\mathcal{N}$$

を局所葉層構造という．

等標数の場合に比べ，混標数では次のような問題がある．

- 等標数では$X_\mu(b)$は$\overline{\mathbb{F}}_p$上有限型だが，混標数では完全スキームである．そのため，完備化$X_\mu(b)^{\wedge}_{/g}$が自然には定義されない．
- “p可除群”に対応するシュトゥーカは，等標数では任意の標数pのスキーム上定義される．一方で，混標数では完全スキームに対してのみ定義されるため，普遍変形環$\mathcal{D}_{b'}$が自然には定義されない．

完全スキーム$X_\mu(b)$の完備化

$X_\mu(b)$のgにおけるdeperfectionをとり，そのgにおける完備化のperfectionとして$X_\mu(b)^{\wedge}_{/g}$を定める．つまり，

$$X_\mu(b)^{\wedge}_{/g}=(\mathrm{RZ}_b^{\mathrm{red}})^{\wedge,\mathrm{perf}}_{/g}$$

が成立するよう定める．

“普遍”変形環$\mathcal{D}_{b'}$の構成

以下の図式に沿ったb'^{-1}の適切な持ち上げtを構成し，$t^{-1}\sigma$が定めるシュトゥーカを$\mathcal{D}_{b'}$上の“普遍”変形とする．

$$\begin{tikzcd}
 & LG=G(W(-)[\tfrac{1}{p}]) \arrow[d] \\
\mathcal{D}_{b'}=(\mathrm{Gr}_{\le\mu^{-1}})^{\wedge}_{/b'^{-1}} \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "t"] & \mathrm{Gr}=G(W(-)[\tfrac{1}{p}])/\mathcal{G}(W(-))
\end{tikzcd}$$

完全スキームの圏では普遍変形の特徴付けができないものの，具体的な構成から$\mathcal{D}_{b'}$上の変形の性質を抽出することができる．この性質を用いて，局所葉層構造の類似を構成した．

局所葉層構造の完全類似

$\mathrm{Igs}^{\wedge}$に対応するアフィン空間の1点完備化$\mathcal{I}$に対し，

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{\mathcal{N}}^{\wedge} \arrow[dl, "adic"'] \arrow[dr, "\text{“}fin.surj.\text{”}"] & \\
X_\mu(b)^{\wedge}_{/g}\,\widehat{\times}\,\mathcal{I} & & \mathcal{N}
\end{tikzcd}$$

という対応が存在する．

ここで，$\mathcal{N}$は完備局所ネーター環のperfection，$\widetilde{\mathcal{N}}^{\wedge}$は$\mathcal{N}$と次元が等しい完備局所ネーター環のperfectionの完備化である．完備化をとると位相的にも$\widetilde{\mathcal{N}}^{\wedge}$はネーターでなくなってしまうが，$X_\mu(b)^{\wedge}_{/g}\,\widehat{\times}\,\mathcal{I}$への射を構成する上で完備性が必要となった．この対応におけるadic射は，完備局所ネーター環の間の有限射をperfectionや完備化と整合的に一般化したものとみなすことができ，適切な次元理論の下で次元の評価を与える．特に，この対応から

$$\dim X_\mu(b)^{\wedge}_{/g}+\dim\mathcal{I}\ge\dim\widetilde{\mathcal{N}}^{\wedge}=\dim\mathcal{N}$$

を得る．$X_\mu(b)$と$\mathcal{I}$，$\mathcal{N}$の次元は明示的に計算できるため，この評価から$X_\mu(b)$の各点の次元が全体の次元と一致することが従う．

[HV12] Urs Hartl and Eva Viehmann, *Foliations in deformation spaces of local G-shtukas*, Adv. Math. **229** (2012), no. 1, 54–78.

[Nie22] Sian Nie, *Irreducible components of affine Deligne-Lusztig varieties*, Camb. J. Math. **10** (2022), no. 2, 433–510.