

ベゾフ空間における関数の指数減衰と滑らかさに基づくスパースグリッド

東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻 修士2年 小暮祥弘

指導教員：田中健一郎 准教授

修士論文の要約

本研究では高次元の関数近似の計算量を緩和する際に用いられるスパースグリッドを、ベゾフ空間における関数の指数減衰と滑らかさに基づいて拡張した。

▶ 関数近似とは

特定の関数を用いて未知関数に近い関数を構成すること。できるだけ少ないパラメータで良い近似を得ることが応用上重要。

▶ 本研究で扱う関数近似

\mathbb{R}^d 上の d 次元の関数 f を有限個の基底関数の線型和で近似する (線型近似)。

$$f(x) \approx \sum_{\vec{j} \in \mathcal{J}} \sum_{\vec{m} \in \mathcal{M}_{\vec{j}}} \lambda_{\vec{j}, \vec{m}} \phi_{\vec{j}, \vec{m}}(x) \quad (1)$$

但し、

- $\mathcal{J}, \mathcal{M}_{\vec{j}}$: 有限集合
- $\lambda_{\vec{j}, \vec{m}} (\vec{j} \in \mathcal{J}^d, \vec{m} \in \mathcal{M}_{\vec{j}})$: 実数

- $\{\phi_{\vec{j}, \vec{m}}\}_{\vec{j} \in \mathbb{N}_0^d, \vec{m} \in \mathbb{Z}^d}$: \mathbb{R}^d 上の基底関数

$$\phi_{\vec{j}, \vec{m}} := \prod_{i=1}^d \phi_{j_i, m_i}(x_i) \quad (2)$$

$$\phi_{j_i, m_i}(x_i) := \phi(2^{j_i} x_i - m_i) \quad (3)$$

($\{\phi_{\vec{j}, \vec{m}}\}_{\vec{j} \in \mathbb{N}_0^d, \vec{m} \in \mathbb{Z}^d}$ は1次元の関数 ϕ のスケールリングと平行移動で定まる関数らを d 個掛け合わせたもの。テント型の関数 $\phi(x) = 1 - 2|x - 1/2|$ ($0 \leq x \leq 1$) がよく用いられる。)

小さなインデックス集合 $\mathcal{J}, \mathcal{M}_{\vec{j}}$ で(1)において、できるだけ良い近似を得たい。

注意：1次元の関数近似で N 個の基底を (2) の様に総当たりに掛け合わせてできる基底を、 d 次元の関数近似に用いると基底関数の数は N^d になり、基底の数が d に関して指数的に増加してしまう。これを避けるためにも、高次元の問題では適切な基底関数を選びたい。

→ 近似を行う関数 $f(x)$ に滑らかさや減衰に関する仮定を課すと、近似精度の観点から良い \mathcal{J}, M_j を選ぶことができる。

▷ \mathcal{J}, M_j の選択に関する直感的説明

- 関数 $f(x)$ が滑らかな場合

幅の狭い基底関数、すなわち大きなインデックス j を持つ基底関数 (Figure: 1 参照) を用いることなく $f(x)$ を良く近似できる。

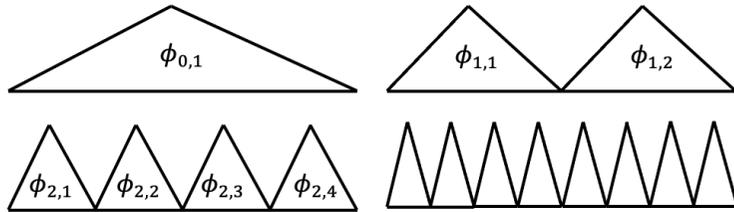


Figure: 1 テント型の関数 $\phi(x) = 1 - 2|x - 1/2|$

をスケーリング及び平行移動して構成される基底関数

- 関数 $f(x)$ が遠方方向に減衰する場合

例えば、原点から遠方に減衰する場合、原点から離れた遠方より $f(x)$ の値が大きいと期待できる原点付近に中心を持つ基底関数を多く使用した方が良い。

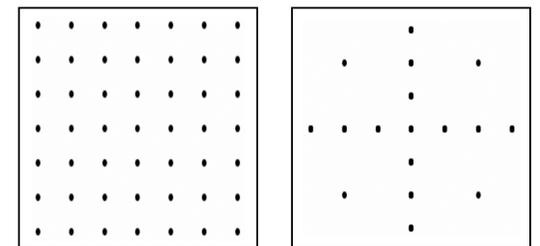
実際にはソボレフ空間における結果を用いて、関数 $f(x)$ の滑らかさや減衰を考慮した \mathcal{J}, M_j の選択が知られている。[Griebel and Knapek,09][Zeiser,12]

この基底関数の選択はスパースグリッドとして知られている。

▷ スパースグリッド

1つ1つの基底関数をグリッドと見做したとき、1ページ末尾の注意で述べた N^d 個の基底からいくつかの基底を適切に取り除いてできる基底関数の選択。

右図は、 $N = 7, d = 2$ の時、正方形領域上に存在する $7^2 = 49$ 個の基底関数 (左側) から、32個の基底を取り除いてできるスパースグリッド (右側)。



既存研究ではソボレフ空間上の議論に限定されていたので、本研究ではベゾフ空間における関数の指数減衰と滑らかさに基づいてスパースグリッドを構成した。

▶ ベゾフ空間

- ベゾフ空間はソボレフ空間の一般化
通常のベゾフ空間 $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ の準ノルムは次式で与えられる。

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)} := \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{jsq} \|\mathcal{F}^{-1} \Psi_j \mathcal{F} f\|_p^q \right)^{1/q}$$

- ウェーブレット展開係数によるベゾフ空間の特徴づけを用いるとスパースグリッドを構成可能 (次ページ参照)
- 通常のベゾフ空間の他に、混合微分を考慮した混合ベゾフ空間 $MB_{p,q}^{\vec{s},w}(\mathbb{R}^d)$ や指数重み付きベゾフ空間 $B_{p,q}^{s,w}(\mathbb{R}^d)$ (w : 高々指数増減の非負関数) が知られている。

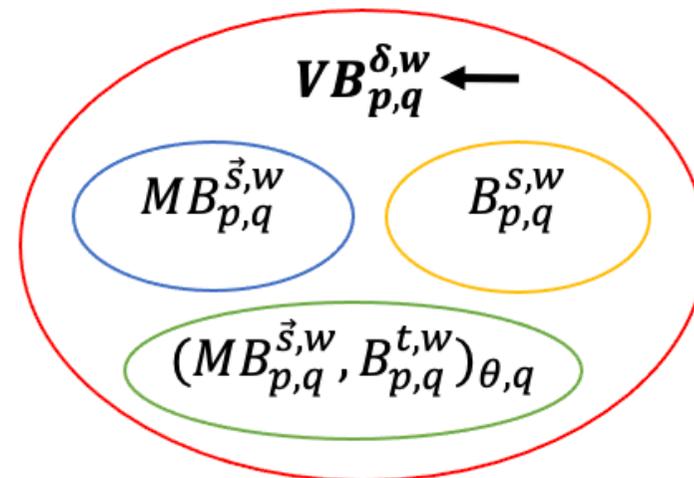
本研究では混合微分と指数重みの双方を考慮したベゾフ空間を構成し、混合微分と指数重みの双方を考慮したスパースグリッドを構成した。

◇ 高次元問題として知られている多粒子系のハミルトニアンの固有関数は混合微分の滑らかさと指数減

衰を持つ [Kreusler and Yserentant, 12] ため、両性質を捉えることのできるスパースグリッドは重要である。

▶ 本研究の詳細な成果

- $B_{p,q}^{s,w}(\mathbb{R}^d)$, $MB_{p,q}^{\vec{s},w}(\mathbb{R}^d)$ とそれらの実補間を含むより広い指数重み付き混合ベゾフ空間 $VB_{p,q}^{\delta,w}(\mathbb{R}^d)$ を新たに定義した。



- 新たに定義した空間でウェーブレットによる特徴付けを得て、混合微分と指数重みの双方を考慮したスパースグリッドを構成した。

本研究の主定理

$VB_{p,q}^{\delta,w}(\mathbb{R}^d)$ の準ノルム

$$\|f\|_{VB_{p,q}^{\delta,w}} := \left(\sum_{\vec{j} \in \mathbb{N}_0^d} 2^{\delta(\vec{j})q} \left\| \Phi_{\vec{j}} * f \right\|_{L_w^p}^q \right)^{1/q}$$

$w(x)$: 高々指数増減の非負関数、 $\delta: \mathbb{N}_0^d$ 上のノルム

主結果 1

- $VB_{p,q}^{\bar{s}(\cdot),w} = MB_{p,q}^{\bar{s},w}$, $VB_{p,q}^{s|\cdot|_\infty,w} = B_{p,q}^{s,w}$
- $\delta_1 < \delta_2$ ならば
 $(VB_{p,q}^{\delta_1,w}, VB_{p,q}^{\delta_2,w})_{\theta,q} = VB_{p,q}^{(1-\theta)\delta_1 + \theta\delta_2,w}$

◇ 以上の結果 1 より、 $VB_{p,q}^{\delta,w}$ は滑らかさに関するベゾフ空間の一般化である。

主結果 2(ウェーブレットによる特徴付け)

$$A \|f\|_{VB_{p,q}^{\delta,w}} \leq \left(\sum_{\vec{j} \in \mathbb{N}_0^d} 2^{\delta(\vec{j})q} \left\| \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} \lambda_{\vec{j},\vec{m}} \chi_{\vec{j},\vec{m}} \right\|_{L_w^p}^q \right)^{1/q} \leq B \|f\|_{VB_{p,q}^{\delta,w}}$$

A, B は正の定数で、 $\lambda_{\vec{j},\vec{m}}$ はウェーブレット基底 $\{\psi_{\vec{j},\vec{m}}\}$ で展開したときの展開係数。 $\chi_{\vec{j},\vec{m}}$ は

$Q_{\vec{j},\vec{m}} = [\vec{m}/2^{\vec{j}}, (\vec{m} + \vec{1})/2^{\vec{j}}]$ 上の指示関数

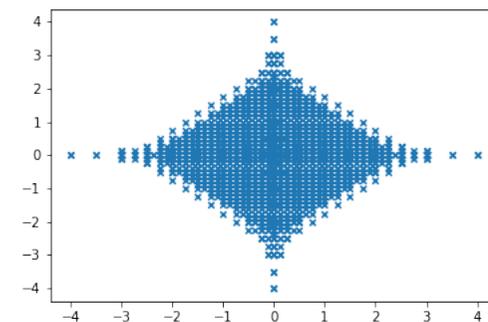
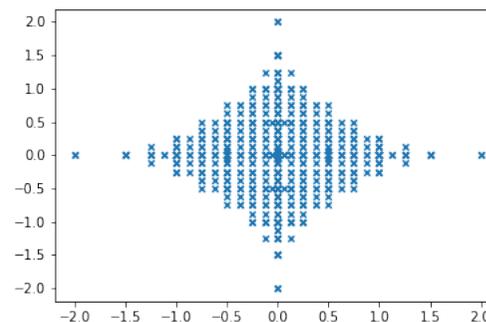
$VB_{p,q}^{\delta,w}(\mathbb{R}^d)$ 上のスパースグリッドの構成

$f \in VB_{p,q}^{\delta_2,w}$ のウェーブレット基底 $\{\psi_{\vec{j},\vec{m}}\}$ による近似 $f \approx \sum_{\vec{j} \in \mathbb{N}_0^d} \sum_{\vec{m} \in M_{\vec{j}}} \lambda_{\vec{j},\vec{m}} \psi_{\vec{j},\vec{m}}$ (有限の $M_{\vec{j}}$ が非空) を考える。
 $\delta_1 < \delta_2$ なら、特徴付け (主結果 2) より

$$\left\| f - \sum_{\vec{j} \in \mathbb{N}_0^d} \sum_{\vec{m} \in M_{\vec{j}}} \lambda_{\vec{j},\vec{m}} \psi_{\vec{j},\vec{m}} \right\|_{VB_{p,q}^{\delta_1,w}} \lesssim \dots \lesssim \max_{\vec{j} \in \mathbb{N}_0^d} \left(2^{-(\delta_2(\vec{j}) - \delta_1(\vec{j}))} \max_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d \setminus M_{\vec{j}}} \left(\frac{|Q_{\vec{j},\vec{m}}|}{w(Q_{\vec{j},\vec{m}})} \right)^{1/p} \right) \|f\|_{VB_{p,q}^{\delta_2,w}}$$

上式右辺を小さくする $M_{\vec{j}}$ を選択すれば、指数減衰と混合微分を考慮したスパースグリッドが得られる。

◇ 下図は $w(x) = e^{b|x|_1}$ ($b = 4$ (左), $b = 2$ (右)), $\delta_2(\cdot) = 0.25|\cdot|_1 + 0.75|\cdot|_\infty$, $\delta_1(\cdot) = 0$ としたときの、2次元の場合でのウェーブレット基底の中心のプロット。



原点を中心として選択された基底関数が減少している様子が見て取れる。