フラクトン系のBF理論におけるFoliated-Exotic双対性

東京大学大学院理学系研究科 物理学専攻　島村 洲太朗

研究目的・結果

・近年、物性物理学の分野で注目されている**フラクトン系**と呼ばれる模型の連続場の場の量子論(QFT)を考える。

⟹ **<u>QFTの一般化・新たな理論構造の発見を目指す</u>**

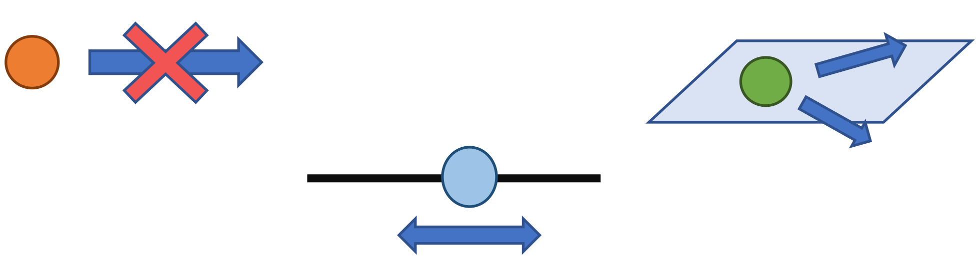
・フラクトン系のQFTの間の**<u>新たなタイプの双対性</u>**を示した。

フラクトン系

フラクトン系とは典型的には以下のような**単体での移動が制限された励起**を持つ模型である。

- **フラクトン**：移動できない
- **ライネオン**：直線上のみを移動できる
- **プラノン**：平面上のみを移動できる

格子模型の例：X-cube模型、Haah’s code



部分系対称性

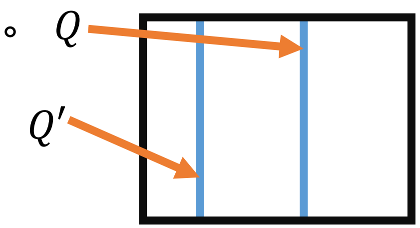
フラクトン系は**部分系対称性**と呼ばれる新たなタイプの大域的対称性を持つ。

通常の大域的対称性 ・・・ 空間全体での対称性

部分系対称性 ・・・ 直線や平面などの定まった**部分多様体上の対称性**

部分多様体ごとに電荷が保存する。

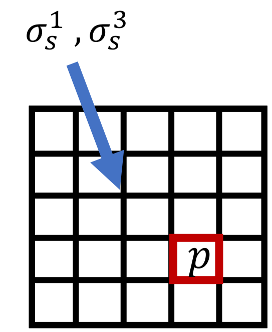
→ **<u>新たな理論的構造を持つ</u>**



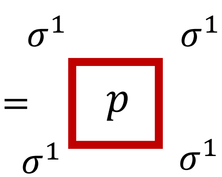
格子模型の例

2+1次元の $\mathbb{Z}_2$ **Plaquette Ising 模型**
（レビューとして[Johnston-Mueller-Janke, 16]）

正方格子の各サイト s にPauli行列 σ_s^1, σ_s^3 があるとする。（$\sigma_s^1\,\sigma_s^3 = -\,\sigma_s^3\,\sigma_s^1$ 、他は交換する）

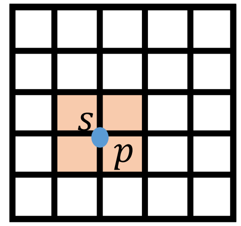


（最小の）正方形 p に対し、$A_p =$



の4つの σ_s^1 の積とする。

格子模型の例（続き）



Hamiltonian $H = -\sum_p A_p$

基底状態・・・すべての A_p の固有値が 1 となる状態 $|0\rangle$

励起状態 $\sigma_s^3|0\rangle$・・・ s のまわりの4つの $\boxed{p}$ で

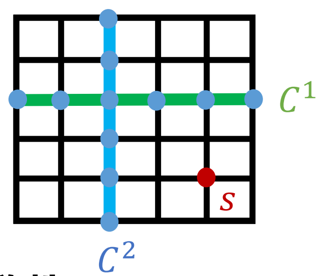
$$A_p\sigma_s^3|0\rangle = -\sigma_s^3|0\rangle$$ → 4つの励起がある

この励起は他の σ_s^1, σ_s^3 をかけることによって<u>単体で移動させることができない</u>。

⟹ **フラクトン**

対称性電荷はHamiltonianと交換する演算子で記述される。

- $\mathbb{Z}_2$ electric 対称性　$U(s) = \sigma_s^1$
- $\mathbb{Z}_2$ dipole 対称性　$W_1(C^2) = \prod_{s\in C^2}\sigma_s^3$，$W_2(C^1) = \prod_{s\in C^1}\sigma_s^3$



これらは部分多様体上の演算子 ⟹ **部分系対称性**

フラクトン系のQFT

通常、格子模型の低エネルギー連続極限を考えると連続場のQFTが得られる。

フラクトン系の格子模型に対しても同様に連続場のQFTは存在するか？

⟹ **<u>フラクトン系の連続場のQFT</u>**

フラクトン系のQFT（続き）

フラクトン系の連続場のQFTは、部分系対称性を持つ。また、Lorentz対称性/連続的な回転対称性を持たず、格子模型の回転対称性を反映した**離散的な回転対称性**を持つ。

⟹ **<u>新たなタイプの非相対論的QFT</u>**

フラクトン系のQFTには、2つの記述方法

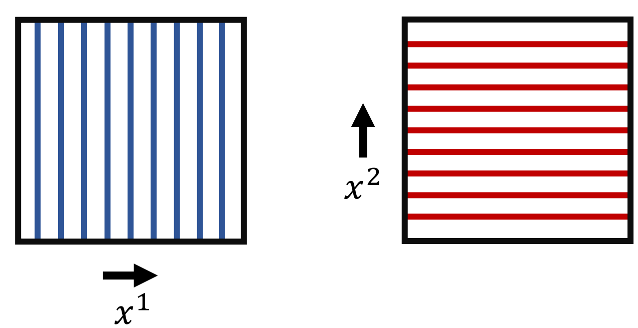
<u>Foliated QFT</u> / **<u>Exotic QFT (tensor gauge theory)</u>**

がある。**<u>これらの間の関係を調べたのが自身の研究の主要な結果</u>**である。

Foliated BF 理論

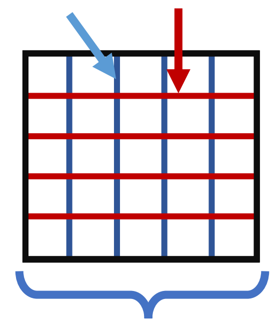
1つ目の記述は、**foliation**構造を持ったQFTであるFoliated QFTである。

Foliation (codim-1 foliation) とは、 d次元の多様体を $(d-1)$次元の多様体（leaf）の無限個の集まりとみなすことである。
ここでは、2+1次元で考える。
2次元空間を図のような無限個の1次元の直線に分割する。



Foliated BF 理論（続き）

Foliationでの分割による無限個の直線上に1+1次元のBF理論が乗った理論: **foliated BF理論** （[Slagle, 21]の2+1次元版）



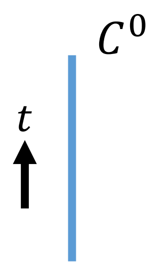
$$\mathcal{L}_f = \sum_{k=1}^{2} \frac{iN}{2\pi}(dB^k + b) \wedge A^k \wedge dx^k + \frac{iN}{2\pi} b \wedge da$$

は、$\mathbb{Z}_N$ plaquette Ising模型の連続場のQFTである。

ゲージ場 A^k, B^k は直線上のゲージ場と考えられ、直線が並んでいる方向に不連続性を持つことができる(**foliated ゲージ場**)。

フラクトンは、time-likeな方向に伸びたゲージ不変演算子（defect）で記述される。演算子が定義されている多様体は、励起の時空中の軌跡を表す。

フラクトンの演算子 $F[C^0] = \exp\left[i \oint_{C^0} a\right]$



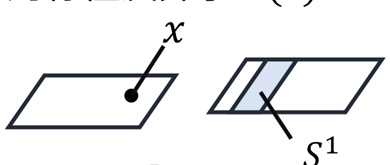
C^0 : 時間方向に伸びた閉曲線（直線）

C^0 を空間方向に変形すると、ゲージ不変性が壊れる。空間中を移動できない励起＝フラクトンを表す。

⟹ **フラクトン系のQFTに特有の演算子**

空間中に定義されたゲージ不変演算子は大域的対称性を生成する対称性演算子となる。

フラクトン系のQFTは、定まった部分系 S 上の対称性演算子 $U(S)$ で記述される**部分系対称性**を持つ。



- $\mathbb{Z}_N$ electric 対称性 $V[x] = \exp\left[i(B^1 - B^2)\right]$
- $\mathbb{Z}_N$ dipole 対称性 $W_k[S^k] = \exp\left[i \oint_{S^k} A^k \wedge dx^k + d(a_k dx^k)\right], \quad (k = 1, 2)$

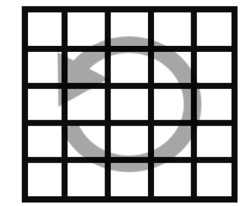
QFTの形式でフラクトン系が記述されている

Exotic BF 理論

もうひとつのフラクトン系のQFTの記述方法として、テンソルゲージ場を用いた**exotic QFT**がある。

2+1次元のfoliated BF 理論と同様に、 $\mathbb{Z}_N$ plaquette Ising模型のQFTである**exotic BF 理論** [Seiberg-Shao, 21] を考える。

テンソルゲージ場は、2次元正方格子の回転対称性 $\mathbb{Z}_4$ の表現である。



現れる場は、$U(1)$ スカラー場 ϕ^{12} と $U(1)$ テンソルゲージ場 (A_0, A_{12}) である。

(A_0, A_{12}) のゲージ変換は、

$$A_0 \to A_0 + \partial_0 \alpha$$

$$A_{12} \to A_{12} + \underline{\partial_1 \partial_2 \alpha} \quad \text{通常のゲージ変換と異なる}$$

2+1次元の**exotic BF理論**のLagrangianは

$$\mathcal{L}_e = \frac{iN}{2\pi} \phi^{12} (\partial_0 A_{12} - \partial_1 \partial_2 A_0)$$

場は発散や不連続性を持つことができる。

ゲージ不変演算子は

- フラクトンの演算子 $\tilde{F}[C^0] = \exp\left[i \oint_{C^0} dx^0 A_0\right]$
- $\mathbb{Z}_N$ electric 対称性 $\tilde{V}[x] = \exp\left[i\phi^{12}\right]$
- $\mathbb{Z}_N$ dipole 対称性 $\tilde{W}_1[S^1] = \exp\left[i \oint_{S^1} (dx^0 dx^1 \partial_1 A_0 + dx^2 dx^1 A_{12})\right]$
 $\tilde{W}_2[S^2] = \exp\left[i \oint_{S^2} (dx^0 dx^2 \partial_2 A_0 + dx^1 dx^2 A_{12})\right]$

⟹ **Foliated BF 理論と同じ形の演算子を持つフラクトン系のQFT**

Foliated-Exotic 双対性

Foliated BF 理論とexotic BF 理論は、同じ格子模型の連続極限と考えられているが、等価な理論だろうか？

これらの2つの理論は同じ形のゲージ不変演算子を持っている。それらの演算子を同一視することで、**ゲージ場とゲージパラメーターの対応**が得られる。その対応のもとで、場の発散と不連続性は一致し、Lagrangianも一致するので、理論が等価であることがわかる。

これを**Foliated-Exotic 双対性** [Ohmori-Shimamura, 22] と呼ぶ。

→ **<u>フラクトン系のQFTにおける双対性</u>**

例えば、フラクトンの演算子は時間方向に伸びた演算子だった。同一視すると

$$\exp\left[i\oint_{C^0} a\right] \simeq \exp\left[i\oint_{C^0} dx^0 A_0\right] \Rightarrow \boxed{a_0 \simeq A_0}$$

Foliated　Exotic　　Foliated　Exotic

他の演算子の同一視からも、場の対応が得られる。

$$\boxed{\begin{aligned} &A_0^k + \partial_0 a_k \simeq \partial_k A_0 \quad && k = 1,2 \\ &A_j^k + \partial_j a_k \simeq A_{12} \quad && (k,j) = (1,2),(2,1) \end{aligned}} \qquad \boxed{B^1 - B^2 \simeq \phi^{12}}$$

Foliated　Exotic　　Foliated　Exotic

Foliated側とExotic側で、**それぞれのゲージ場が非自明に対応している**。また、ゲージ変換を考えると、ゲージパラメーターの対応も示せる。

まとめ・展望

・**フラクトン系のQFT**である2+1次元のfoliated BF 理論とexotic BF 理論の間の**<u>ゲージ場とゲージパラメーターの顕わな対応</u>**を示し、2つの理論が**等価である**ことを示した。これは、**フラクトン系のQFTにおけるある種の双対性**と考えられる。

・論文 [Ohmori-Shimamura, 22] では3+1次元のBF理論についても双対性を示した。
BF理論以外でもfoliated QFTとexotic QFTの対応が得られるか？
Foliated / exotic QFTの片方でしか記述されていない理論をもう一方の記述で調べることができれば、片方の記述だけでは見えにくい構造が発見できる可能性がある。

→ **<u>新たな理論的構造の発見に繋がる</u>**

参考文献

[Johnston-Mueller-Janke, 16] D. A. Johnston, M. Mueller, and W. Janke, “Plaquette Ising models, degeneracy and scaling,” Eur. Phys. J. ST 226 no. 4, (2017) 749–764, arXiv:1612.00060 [cond-mat.stat-mech].

[Slagle, 21] K. Slagle, “Foliated Quantum Field Theory of Fracton Order,” Phys. Rev. Lett. 126 no. 10, (2021) 101603, arXiv:2008.03852 [hep-th].

[Seiberg-Shao, 21] N. Seiberg and S.-H. Shao, “Exotic Symmetries, Duality, and Fractons in 2+1-Dimensional Quantum Field Theory,” SciPost Phys. 10 no. 2, (2021) 027, arXiv:2003.10466 [cond-mat.str-el].

[Ohmori-Shimamura, 22] K. Ohmori and S. Shimamura, “Foliated-Exotic Duality in Fractonic BF Theories,” arXiv:2210.11001 [hep-th].