

Even-periodic cohomology theories for twisted parametrized spectra

東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻

前川拓海

ホモトピー論

空間の本質的な形を把握するため、今日の幾何学では、標準的な図形・ n 次元単体 Δ^n からの写像を巧妙に数え上げるといった手法が共有されている。

位相空間 X に対し、以下の再帰的な余極限による X の「分解」が存在する。左辺の表す対象には、状況に応じてCW複体やKan複体、あるいは ∞ -垂群などの呼称があり、それらの適切な同値類は**ホモトピー型**と言及される。

$$\operatorname{colim}_{n \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c} \operatorname{colim} \left(\begin{array}{c} \prod_{\sigma: \Delta^n \rightarrow X} \partial \Delta^n \rightarrow \operatorname{colim} \left(\begin{array}{c} \prod_{\tau: \Delta^{n-1} \rightarrow X} \partial \Delta^{n-1} \rightarrow \operatorname{colim} \left(\begin{array}{c} \prod_{p: \Delta^1 \rightarrow X} \partial \Delta^1 \rightarrow \operatorname{colim} \left(\begin{array}{c} \prod_{x: \Delta^0 \rightarrow X} \emptyset \rightarrow \emptyset \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \rightarrow X$$

ホモトピー論とは、この「分解」によって空間を研究する分野を指す。その手法は、より一般に「分解」の備わった圏の研究に派生する。

広義のホモトピー論

対象の「分解」(resolution)や射の「分解」(factorization)を備えた圏に対し、「分解」に関して不変な性質を研究する理論

- このような圏の構造から自然に、射の間の**ホモトピー**という概念が定まる。

対象の「分解」で保たれる関手は**ホモトピー不変量**と総称される。

例 (ホモトピー不変量)

- **ホモトピー群** $\pi_n X$ (非安定ホモトピー不変量)
- **(コ)ホモロジー** $H(X)$
- **K -理論** $K(X)$ (安定ホモトピー不変量)
- **ボルディズム** $MG(X)$

導来関手

ホモロジー代数学の考え方を敷衍して、適切な「分解」を行なった上で関手の値を修正するという工程は**導来**と呼ばれる。この過程がホモトピー論的に「正しい」値を与えることが経験的に知られている。

導来関手

対象 $X \rightsquigarrow X$ の「分解」 $\xrightarrow[\text{適用}]{\text{関手の}}$ 正しい普遍性をもつホモトピー不変量

とくに、空間の(余)極限は導来関手をもち、それぞれ**ホモトピー(余)極限**と呼ばれ、 $\operatorname{hocolim}$ などと表示される。

通常圏における射の集合をホモトピー型に、(余)極限をホモトピー(余)極限に、それぞれ置き換えることで導来関手の「正しい」普遍性を捉える理論体系が、 ∞ -圏論として確立されている。

例 (∞ -圏)

∞ -category	objects	mapping spaces
位相空間 X	点 $x \in X$	道の空間 $\operatorname{Path}(x, y)$
ホモトピー論を展開可能な圏 \mathcal{C}	対象 $c \in \mathcal{C}$	射・「射の間のホモトピー」・「ホモトピーの間のホモトピー」・..... のなすKan複体 $\operatorname{Map}(c, d)$

- とくにCW複体のホモトピー論、および ∞ -圏のホモトピー論(関手の自然同型をホモトピーと定める)から ∞ -圏CW, $\operatorname{Cat}_\infty$ が得られる。

集合論	\rightsquigarrow	ホモトピー論	\rightsquigarrow	Topological spaces
sets	\rightsquigarrow	homotopy types	\rightsquigarrow	\downarrow
(co)limits	\rightsquigarrow	homotopy (co)limits	\rightsquigarrow	\downarrow
categories	\rightsquigarrow	∞ -categories	\rightsquigarrow	Sets \longrightarrow ∞ -Groupoids
groupoids	\rightsquigarrow	∞ -groupoids, a.k.a. spaces	\rightsquigarrow	\downarrow
additive groups	\rightsquigarrow	spectra	\rightsquigarrow	Categories \longrightarrow $\operatorname{Cat}_\infty$

安定ホモトピー不変量

ホモトピー不変量のうち、とくに振る舞いの良い（ホモトピー余極限を保つ）クラスとして**一般(コ)ホモロジー**と呼ばれるものが存在する。

ホモトピー群と（一般）ホモロジーの一つの違いとして、**加法性**（直和の保存）が挙げられる。

ホモトピー群とホモロジー群

$\pi_*(X)$	単独の連結成分に偏った情報	\rightsquigarrow	加法性とは程遠い
$H_*(X)$	連結成分を偏りなく参照	\rightsquigarrow	直和を保存

しかし、懸垂を介して $\pi_{*+1}(\Sigma X)$ と修正すると加法性に一步近づく。最終的には以下の**安定ホモトピー群** π_*^{st} が、ホモトピー群とホモロジー群の架け橋に相応しい。安定ホモトピー群に同型を誘導する写像による違いを無視するとき、空間は**安定ホモトピー型**と言及される。

安定ホモトピー群

$$\text{colim} (\pi_* X \rightarrow \pi_{*+1} \Sigma X \rightarrow \dots \rightarrow \pi_{*+k} \Sigma^k X \rightarrow \dots) =: \pi_*^{st} X$$

- 一般ホモロジーのもつ**真の加法性**を搭載するホモトピー群の変種

一般(コ)ホモロジーはその性質から、懸垂（ホモトピー余極限の一種）を保つ。とくに、一般コホモロジーは安定ホモトピー不変である。よってその定義域は、懸垂を可逆にする普遍的な ∞ -圏 $\mathbf{CW}_*[\Sigma^{-1}]$ の上に拡張される。

安定ホモトピー論

可換環 A と非零因子 x に対し、局所化 $A[x^{-1}]$ を構成するよく知られた方法は、点付き CW 複体のなす対称モノイダル ∞ -圏 \mathbf{CW}_* と円周 S^1 の場合に一般化され、Spanier-Whitehead 圏 \mathbf{SW} を与える。

$$A[x^{-1}] \simeq \text{colim} (A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \rightarrow \dots) \quad \mathbf{SW} \simeq \text{hocolim} (\mathbf{CW}_* \xrightarrow{\Sigma} \mathbf{CW}_* \xrightarrow{\Sigma} \mathbf{CW}_* \rightarrow \dots \in \mathbf{Cat}_\infty)$$

一方、 \mathbf{SW} はホモトピー余極限に関して完備でなく、その写像空間は \mathbf{CW}_* のホモトピー余極限を保たない。 \mathbf{SW} の写像空間を導来し、それらをホモトピー余極限に関して生成させ得られるのが**スペクトラムのなす ∞ -圏 \mathbf{Sp}** である。完備性の帰結として、すべての一般コホモロジーが \mathbf{Sp} において表現可能である。

Spectra

$$\mathbf{CW} \xrightarrow{\text{stabilization}} \mathbf{Sp}$$

\mathbf{Sp} は、球面スペクトラム \mathbb{S}^0 を単位元とする（本質的に一意の）対称モノイダル ∞ -圏の構造を有する。このとき、 \mathbf{Sp} において（強い意味で）可換なモノイド対象 $R \in \mathbf{Sp}$ は E_∞ -環スペクトラムと呼ばれ、 R 上の加群の圏は再び対称モノイダル ∞ -圏 \mathbf{Mod}_R をなす。

E_∞ -環スペクトラム

次数付き可換な積構造とコホモロジー作用素をもつ一般コホモロジーの一種

安定ホモトピー型の族

CW 複体 X に対し、 X 上の空間の族がなす ∞ -圏 $\mathbf{CW}_{/X}$ から同様の操作を始めたとき、出来上がる ∞ -圏は**スペクトラムの族**のなす ∞ -圏 $\mathbf{Sp}_{/X}$ と呼ばれる。

Parametrized spectra

$$\mathbf{CW}_{/X} \xrightarrow{\text{stabilization}} \mathbf{Sp}_{/X}$$

これは自然に関手圏 $\text{Fun}(X, \mathbf{Sp})$ と同値になることはよく知られている。

安定ホモトピー論の族

対称モノイダル ∞ -圏 \mathbf{Sp} 自身の、 (\mathbf{Sp}) -加群としての自己同型群 $\text{Pic}_{\mathbb{S}^0}$ は球面スペクトラムの**Picard ∞ -群** という別名で親しまれる。

Picard ∞ -group of an E_∞ -ring spectrum R

$$\text{Pic}_R := \mathbf{Mod}_R \text{ の可逆な対象のなす "位相群"} \\ \simeq \mathbf{Mod}_R \text{ の } (\mathbf{Mod}_R)\text{-加群としての自己同型群}$$

写像 $h: X \rightarrow B\text{Pic}_{\mathbb{S}^0}$ は、「 \mathbf{Sp} が X 上に並んだ族」であると理解される。

$$B\text{Pic}_{\mathbb{S}^0} : (\mathbf{Sp})\text{-束の分類空間}$$

実際, $BPic_{\mathbb{S}^0}$ は標準的な忠実埋め込み $BPic_{\mathbb{S}^0} \hookrightarrow \mathbf{Cat}_{\infty}$ をもち, 合成写像

$$h: X \rightarrow BPic_{\mathbb{S}^0} \rightarrow \mathbf{Cat}_{\infty}$$

のホモトピー余極限は (\mathbf{Sp}) -束 $\text{hocolim}_X h \rightarrow X$ を与える. これには以下のホモトピー pullback による構成も可能である. ここで $\mathbf{Sp} // \text{Pic}_{\mathbb{S}^0}$ はホモトピー商である.

$$\begin{array}{ccc} \text{hocolim}_X h & \longrightarrow & \mathbf{Sp} // \text{Pic}_{\mathbb{S}^0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{h} & BPic_{\mathbb{S}^0} \end{array}$$

定義

X を CW 複体とする. X 上の **twisted parametrized spectrum** \mathcal{T} とは, ある写像 $h: X \rightarrow BPic_{\mathbb{S}^0} (\rightarrow \mathbf{Cat}_{\infty})$ の大域切断, すなわち $\mathcal{T} \in \text{holim}_X h \simeq \text{Fun}_{/X}(X, \text{hocolim}_X h)$ のこととする.

Twisted parametrized spectrum の描像

局所的なスペクトラムの族 $\{\mathcal{T}|_U \in \mathbf{Sp}_{/U}\}$ が, 変換関数

$$h_{UV}: U \cap V \rightarrow \text{Pic}_{\mathbb{S}^0}$$

によって貼り合わさり $\mathcal{T}|_U \otimes h_{UV} \simeq \mathcal{T}|_V$, この同一視らが高次のコヒールレンスを満たすとき, これらが大域切断 \mathcal{T} をなす.

ここで h_{UV} は, $U \cap V$ 上の球面束の安定同値類の形式的な差を分類する.

$h: X \rightarrow BPic_{\mathbb{S}^0}$ が自明写像 $*$ の場合, $\mathcal{T} \in \text{holim}_X (*) \simeq \mathbf{Sp}_{/X}$ は (\mathbf{Sp} 自体の) 振れを伴わないスペクトラムの族である.

スペクトラムの族 $\in \mathbf{Sp}_{/X} \simeq \text{Fun}(X, \mathbf{Sp})$ においては, 一般コホモロジーの適用は即座である:

$$\begin{array}{ccccc} R^*: \text{Fun}(X, \mathbf{Sp}) & \xrightarrow{\otimes R} & \text{Fun}(X, \mathbf{Mod}_R) & \xrightarrow{\text{hocolim}} & \mathbf{Mod}_R \\ & \searrow \text{hocolim} & & & \downarrow R^* \\ & & \mathbf{Sp} & \xrightarrow{R^*} & \mathbf{Mod}_R \end{array}$$

一方, 振れ $h: X \rightarrow BPic_{\mathbb{S}^0}$ を伴った族 \mathcal{T} に関しては, 一般コホモロジーの適用はアプリアリには不可能である. そこで次のような問が考えられる.

問

どのような条件下で \mathbb{E}_{∞} -環スペクトラム R および twisted parametrized spectrum $\mathcal{T} \in \text{holim}_X h$ に対して, R -コホモロジー理論 $R^*(\mathcal{T})$ が well-defined であるか?

観察

h に同伴される Pic_R -コサイクル $h_R: X \rightarrow BPic_R$ が自明化可能 なとき, 問に対する肯定的な回答を得る.

$$\mathcal{T} \in \text{holim}_X h \xrightarrow{\otimes R} \text{holim}_X h_R \simeq \text{holim}_X (*) \simeq (\mathbf{Mod}_R)_{/X} \xrightarrow{R^*} \mathbf{Mod}_R$$

コホモロジー理論における向き付け

定義 (Thom spectra)

無限ループ空間 $\text{Pic}_{\mathbb{S}^0}$ の単位元連結成分を $BGL_1 \mathbb{S}^0$ とおくと, そのループ空間 $GL_1 \mathbb{S}^0$ は球面スペクトラムの自己同値群を与える:

$$GL_1 \mathbb{S}^0 \simeq \text{Aut}_{\mathbb{S}^0}(\mathbb{S}^0)$$

$f: X \rightarrow BGL_1 \mathbb{S}^0$ に対し, 次のホモトピー余極限により **Thom スペクトラム** を構成することができる.

$$Mf := \text{hocolim}(X \xrightarrow{f} BGL_1 R \hookrightarrow \text{Pic}_R \hookrightarrow \mathbf{Mod}_R) \in \mathbf{Mod}_R$$

一般の Thom スペクトラムは, コホモロジーにおける Thom 同型という現象の, 普遍性による言い換えである. すなわち, $J_{\mathbb{C}}: BU \rightarrow BGL_1 \mathbb{S}^0$ の Thom スペクトラムを MU (**複素ボルディズム**) とするとき, 以下が成立する.

Thom スペクトラムの普遍性 I

R が全ての複素ベクトル束に対して乗法的な Thom 同型を誘導

\iff ホモトピー環スペクトラムの準同型 $MU \rightarrow R$ が存在

この性質をもって, R は **複素向き付け可能** であると呼ばれている.

複素向き付け可能なコホモロジー理論は豊かに存在し、安定ホモトピー論の構造を特徴付けるための非常に重要な役割を果たす。

BU および Pic_R はともに無限ループ空間であり、 MU もまた E_∞ -環スペクトラムとなる。このとき Thom スペクトラムの環構造は次のように精密に理解される。

Thom スペクトラムの普遍性 II

$BU \xrightarrow{J_C} BGL_1 S^0 \rightarrow BGL_1 R$ が n 重ループ写像として自明化可能
 $\iff MU \rightarrow R$ が E_n -環スペクトラムの準同型として存在 (E_n -複素向き付け可能)

複素向き付け可能なコホモロジー理論を与える例として、**偶周期的** というクラスが存在する。これは、複素 Bott 周期性の一般化であると言える。

偶周期的一般コホモロジー

R が偶周期的 $\iff R$ がホモトピー環スペクトラムであり、
 $\pi_{\text{odd}} R = 0$ かつ $\exists \beta^{\pm 1} \in \pi_{\pm 2} R$

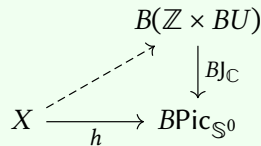
主結果

本研究の主定理は以下のように述べられる。

定理

X を CW 複体、 h を写像 $X \rightarrow \text{BPic}_{S^0}$ 、 R を偶周期的 E_2 -環スペクトラムとする。

さらに h は次のように $B(\mathbb{Z} \times BU)$ を経由しているとする。



このとき、写像 $h_R : X \xrightarrow{h} \text{BPic}_{S^0} \rightarrow \text{BPic}_R$ は自明化可能である。したがって、 ∞ -圏の圏同値

$$\text{holim}_X h_R \simeq (\mathbf{Mod}_R)_{/X}$$

が存在し、任意の $\mathcal{T} \in \text{holim}_X h$ に対して、 R -コホモロジー理論 $R^*(\mathcal{T})$ が well-defined である。

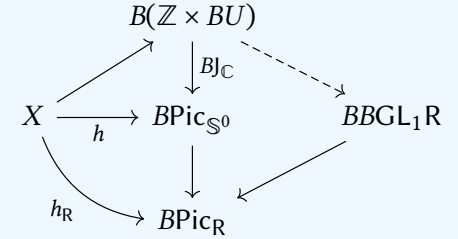
証明の概略

■ 仮定より、次の合成写像は $B(\mathbb{Z} \times BU)$ を経由する。

$$B(\mathbb{Z} \times BU) \rightarrow \text{BPic}_{S^0} \rightarrow \text{BPic}_R$$

■ 点線の自明化は、Thom スペクトラムの普遍性から、 E_1 -複素向き付けの存在に帰着される。

■ 仮定から E_1 -複素向き付け可能性が従うことはすでに知られており [1]、証明が完了する。



修士論文では、以上の同変理論を展開し、主定理の同変版にあたる主張と証明も行なった。

将来性

有向閉ホモロジー 3-球面 Y の、安定ホモトピー論に値をとる強力な不変量として、**Seiberg-Witten Floer ホモトピー型** $\text{SWF}(Y)$ と呼ばれる構成が存在する [2]。とくに $\text{SWF}(Y)$ の一般(同変)コホモロジー型が応用上用いられてきた。

さてこの構成を、 Y の族に対しても適用できるように拡張したいという幾何学的な要請がある。このとき、一般に期待される Seiberg-Witten Floer ホモトピー型は、 Sp の振れを伴うスペクトラムの族(すなわち twisted parametrized spectrum)であると予想される。しかし、現れるうる振れ $X \rightarrow \text{BPic}_{S^0}$ すなわち Pic_{S^0} -値変換関数は、「局所的な安定球面束の形式差」ではなく、「局所的な安定複素ベクトル束の形式差」から来ていると仮定することは幾何学的に自然な期待である。これこそ、主定理の仮定するところの“ B_{J_C} を経由する”ことの本来的な意味である。

[1] Steven Greg Chadwick and Michael A. Mandell.

E_n genera.

Geom. Topol., 19(6):3193–3232, 2015.

[2] Ciprian Manolescu.

Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with $b_1 = 0$.

Geom. Topol., 7:889–932, 2003.