# Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の微分作用素による表現の変形パラメータの反転，および関連するスペクトル分解の収束公式

樋川達郎

東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻

## 修士論文の要約

修士論文では，Ben Saïd–Kobayashi–Ørsted [BKØ2012] による「調和解析の補間」の理論に関して，次の二つのことを示した．

### 主結果１：変形パラメータの反転

あるユニタリ変換が [BKØ2012] で用いられている変形パラメータの符号を反転させるような関係式を満たすことを示した．
これにより，変形パラメータが正の場合にしか扱われていなかったものを，負の場合にも拡張した．

### 主結果２：スペクトル分解の収束公式

[BKØ2012] に関連して現れる自己随伴作用素を変形させるときのスペクトル分解の収束公式を定式化し，証明した．

## 調和解析と表現論

修士論文での研究は，大きな分類では調和解析と呼ばれる分野に属し，その理論的背景や問題意識には表現論が関わっている．

### 調和解析

Fourier 変換に（広い意味で）関係するような解析全般のこと．

### 表現論

群の線型空間への作用（これを群の表現という）や，それによって表される対称性を調べる数学の分野．

## 背景

Fourier 変換の表現論的背景として，Weil 表現の Schrödinger モデルと呼ばれるユニタリ表現

$$Mp(N,\mathbb{R}) \curvearrowright L^2(\mathbb{R}^N)$$

がある．この表現から，微分作用素の $\mathfrak{sl}_2$-三対

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{N}{2}, \qquad \frac{i}{2}|x|^2, \qquad \frac{i}{2}\triangle \qquad (*)$$

が得られる．Fourier 変換は，これらの微分作用素を用いて書ける半群（Hermite 半群）

$$\left\{\exp\left(z \cdot \frac{1}{2}(\triangle - |x|^2)\right)\right\}_{\mathrm{Re}\, z \geq 0}$$

の $z = i\pi/2$ における特殊値に（定数倍を除いて）なっている．（参考文献：[Fol1989], [How1988]）

Weil 表現は二つの既約成分に分解され，その各々が極小表現と呼ばれるタイプの表現になっている．これに関して，小林俊行氏は次の考え方を提唱した．

**極小表現の大域解析**

極小表現は，群から見れば「小さい」表現だが，逆に，群が作用する空間から見れば「その空間の対称性が大きく現れている」表現だといえ，その空間における大域解析をよく統制することが期待される．

この観点に基づき，Kobayashi–Mano [KM2007, KM2011] は別の群の極小表現

$$\widetilde{SO}(N+1,2) \curvearrowright L^2(\mathbb{R}^N, |x|^{-1}\,dx)$$

を用いて新しい調和解析の理論を構築した．この表現からは微分作用素の $\mathfrak{sl}_2$-三対

$$2\sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + N - 1, \qquad i|x|, \qquad i|x|\triangle \qquad (**)$$

が得られ，古典的な場合と同様に半群

$$\{\exp(z \cdot (|x|\triangle - |x|))\}_{\mathrm{Re}\, z \geq 0}$$

が定義できる（Laguerre 半群）．Laguerre 半群の $z = i\pi/2$ における特殊値は（定数倍を除いて）Fourier 変換の対応物であり，実際に Fourier 変換と類似した性質を満たす．

以上を踏まえて，Ben Saïd–Kobayashi–Ørsted [BKØ2012] は，変形パラメータ $a > 0$ で添字付けられた微分作用素の $\mathfrak{sl}_2$-三対の族

$$\mathbb{H}_a, \qquad \mathbb{E}_a^+, \qquad \mathbb{E}_a^-$$

を構成した．$a = 2$ の場合が $(*)$，$a = 1$ の場合が $(**)$ となり，$a$ はこれら二つの調和解析を補間するパラメータになっている．この $\mathfrak{sl}_2$-三対から

- 一般化 Laguerre 半群 $\{\mathscr{I}_a(z)\}_{\mathrm{Re}\, z \geq 0}$
- 一般化 Fourier 変換 $\mathscr{F}_a$

が定義される．

## 主結果１：変形パラメータの反転

$\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 上の関数の変換 $T$ を

$$Tf(x) = |x|^{2-N} f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

と定義する．この変換が次の関係式を満たすことを示した．

**定理**

$a \neq 0$ に対して

$$\begin{aligned} T \circ \mathbb{H}_a &= \mathbb{H}_{-a} \circ T, \\ T \circ \mathbb{E}_a^+ &= -\mathbb{E}_{-a}^+ \circ T, \\ T \circ \mathbb{E}_a^- &= -\mathbb{E}_{-a}^- \circ T. \end{aligned}$$

つまり，変換 $T$ を通して，変形パラメータが $a$ の場合と $-a$ の場合とが対応する．

**系**

[BKØ2012] の結果は，変形パラメータが負の場合にも拡張することができる．特に，

- 一般化 Laguerre 半群
- 一般化 Fourier 変換

は変形パラメータが負の場合にも定義でき，正の場合と同じような性質を満たす．

## 主結果２：スペクトル分解の収束公式

変形パラメータ $a$ を固定し，Hilbert 空間上の自己随伴作用素

$$c^{2a}|x|^a - |x|^{2-a}\triangle = \frac{a}{i}(c^{2a}\mathbb{E}_a^+ - \mathbb{E}_a^-) \curvearrowright L^2(\mathbb{R}^N, |x|^{a-2}\,dx) \quad (c \geq 0)$$

を考える．これについて，次のことがいえる ([BKØ2012] の内容から簡単にわかる)．

**命題**

上記の自己随伴作用素のスペクトル分解は，

- $c > 0$ のとき

  $$L^2(\mathbb{R}^N, |x|^{a-2}\,dx) = \sum_{m,l\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^m(S^{N-1}) \otimes \mathbb{C}f_{l,m}^{(a)}$$

  である．ここで，$f_{l,m}^{(a)}$ は Laguerre 多項式を用いて定義される $\mathbb{R}_{>0}$ 上の関数であり，対応するスペクトルは $c^a((2l+1)a + 2m + N - 2)$ である．
- $c = 0$ のとき

  $$L^2(\mathbb{R}^N, |x|^{a-2}\,dx) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}_{>0}}^{\oplus} \mathcal{H}^m(S^{N-1}) \otimes \mathbb{C}g_{s,m}^{(a)}\,ds$$

  である．ここで，$g_{s,m}^{(a)}$ は Bessel 関数を用いて定義される $\mathbb{R}_{>0}$ 上の関数であり，対応するスペクトルは $s^a$ である．

これらについて，$c > 0$ のときの離散的なスペクトル分解が，極限 $c \to +0$ において $c = 0$ のときの連続的なスペクトル分解に「収束」することを示した．

**定理**

$c > 0$ と $l \in \mathbb{N}$ が

$$c \to +0, \quad c^a((2l+1)a + 2m + N - 2) \to s^a$$

となる極限において，

$$\frac{s^{(a-1)/2}}{\sqrt{2}\, c^{a/2}} f_{l,m}^{(a)} \to g_{s,m}^{(a)}$$

が $\mathbb{R}_{>0}$ 上のコンパクト一様収束の意味で成り立つ．

## 今後の課題

**課題**

修士論文では，主結果２を，Laguerre 多項式に関する漸近公式を用いるという個別具体的な方法によって示した．これを何らかの一般論から導出することはできるか？

**課題**

主結果２では $a$ を固定してスペクトル分解の収束を考えたが，一方で，$a$ を動かして０に近づける極限を考えることもできる．この設定で，同様の「スペクトル分解の収束公式」を定式化・証明することはできるか？

## 参考文献


[BKØ2012] S. Ben Saïd, T. Kobayashi, B. Ørsted, "Laguerre semigroup and Dunkl operators", *Compositio Mathematica* **148**.4 (2012): 1265–1336.

[Fol1989] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton University Press, 1989.

[How1988] R. Howe, "The oscillator semigroup", *The Mathematical Heritage of Hermann Weyl*, American Mathematical Society, 1988: 61–132.

[KM2007] T. Kobayashi, G. Mano, "The inversion formula and holomorphic extension of the minimal representation of the conformal group", *Harmonic Analysis, Group Representations, Automorphic Forms and Invariant Theory: In honor of Roger E. Howe*, World Scientific, 2007: 151–208.

[KM2011] T. Kobayashi, G. Mano, *The Schrödinger Model for the Minimal Representation of the Indefinite Orthonormal Group $O(p,q)$*, American Mathematical Society, 2011.