退化した楕円曲面の安定性条件

軽部友裕(東京大学大学院数理科学研究科)

修士論文の要約

- 退化した楕円曲線の「対称性（自己導来同値）」と「安定性条件」の関係を示した.
- 退化する前と退化した後の楕円曲線を一緒に扱うことで，退化した楕円曲面の知られていなかった対称性（導来同値）を発見した.

この定理は「代数幾何」という分野の結果である.
代数幾何では方程式で定められた図形（代数多様体）を扱う.
楕円曲線なども代数多様体の例である.

代数多様体の例

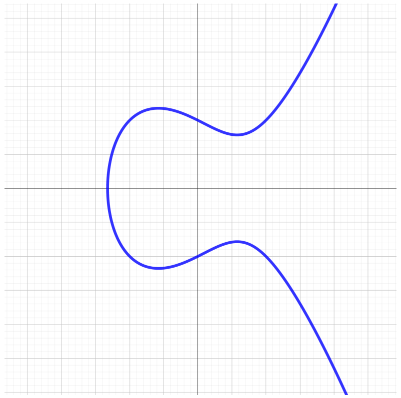

Figure: 楕円曲線

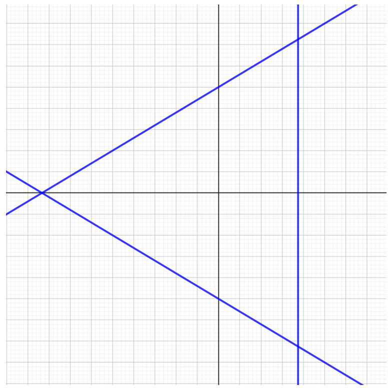

Figure: 楕円曲線の退化

方程式の係数を変えていったときに上図のように図形の様子が大きく変わることを「退化」という.
私は次に説明する「導来圏」の観点からこのような代数多様体の研究をしている.

代数幾何の研究対象として「導来圏」がある．

連接層と導来圏

連接層：代数多様体上の「関数」の概念の一般化．
導来圏：下のように連接層を並べた複体

$$\cdots \to \mathcal{F}_{-1} \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \cdots$$

とその間の写像のあつまり（圏と言われる）

連接層も導来圏も代数多様体の特徴を捉えている．導来圏は一見複雑であり，連接層だけの方が扱いやすいように思える．

なぜ導来圏を考えるのか？

- 技術的に連接層だけでは性質が悪い．
２つの代数多様体の間で連接層の対応を考えると情報が失われる事がある．
- 導来圏は情報を多く持っており，代数多様体の幾何学を反映している．

そして，導来圏は下のミラー対称性という予想に現れるため重要である．

ミラー対称性

ミラー対称性は「代数幾何」と「微分幾何（シンプレクティック幾何）」が導来圏と深谷圏を通じて等価になるという予想．
物理学における超弦理論のアイディアを背景とし，Kontsevich によって提唱された．

ミラー対称性は２つの全く異なる幾何の等価性を主張しており，現在はその証拠が発見されている．この予想の真偽の手がかりになると期待して，私は導来圏の対称性（導来同値）を研究している．

問題意識

代数多様体の導来同値を決定できるか？

しかし，愚直に導来圏を見ているだけだと決定は難しい．そのため，修士論文では「安定性条件の空間」を考えることで退化した楕円曲線の導来同値群を部分的に決定した．

Bridgeland は導来圏から「安定性条件の空間」を構成した [1].（安定性条件については定義しない.）下のような対応を考える事によって，安定性条件の空間の性質が導来圏の理解に重要な役割を果たすと期待できる.

$$\text{導来圏}\,\mathcal{D}^b(X) \dashrightarrow \text{安定性条件の空間}\,\mathrm{Stab}(X)$$

$$\mathcal{D}^b(X)\,\text{の対称性} \dashrightarrow \mathrm{Stab}(X)\,\text{の対称性}$$

修士論文の結果を不正確であるが簡単に述べると次のようになる.

修士論文の帰結

X を退化した楕円曲線とする．このとき，X の導来圏 $\mathcal{D}^b(X)$ の対称性は X の安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}(X)$ の被覆空間としての性質から理解できる.

以降は正確な主張を述べるため，専門的な言葉を用いる．安定性条件の空間には下の忘却写像が連続になる位相が入っている.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Stab}(X) & \to & G(X)^\vee \otimes \mathbb{C} \\ \Psi & & \Psi \\ (Z, \mathcal{A}) & \mapsto & Z \end{array}$$

ここで X は退化した楕円曲線であり，$G(X)$ は Grothendieck 群であり，有限階数の自由アーベル群であることが知られている.

修士論文の結果の正確な主張

X を退化した楕円曲線とする．このとき，ある連結成分 $\mathrm{Stab}^\dagger(X) \subset \mathrm{Stab}(X)$ と開集合 $\mathcal{P}_0^+(X) \subset G(X) \otimes \mathbb{C}$ があり，忘却写像の制限

$$\mathrm{Stab}^\dagger(X) \to \mathcal{P}_0^+(X)$$

は被覆写像になる．このデッキ変換群は $\mathrm{Auteq}_0^*(X)/(\mathrm{Pic}^0_{\mathrm{tri}}(X) \rtimes ((\mathbb{C}^*)^n))$.

ここで，$\mathrm{Auteq}_0^*(X)$ は連結成分 $\mathrm{Stab}^\dagger(X)$ を保ち，$G(X)$ 上で自明になる導来同値からなる群である.

このデッキ変換群の計算のために球面ねじり関手 $T_{\mathcal{O}_G(k)}$ を考察した．

球面ねじり関手の制限

S を楕円曲面とし，特異的なファイバーが X と同型であるとする．(-2) 曲線の直線束 $\mathcal{O}_G(k)$ 対し，$j_* \circ \Phi \cong T_{\mathcal{O}_G(k)} \circ j_*$ が成立する X の導来同値 Φ がある．ただし，j は閉埋め込み $X \hookrightarrow S$ である．

$T_{\mathcal{O}_G(k)} : \mathcal{D}^b(S) \to \mathcal{D}^b(S)$ の構成 [2] と同じ手法では導来同値を構成できないことがわかるため，上のようなことを示す必要があった．

研究の意義

- 特異的な多様体の安定性条件
  特異的な多様体の研究はほとんどされていないが，安定性条件の族の研究などではこのような退化の研究が必要であると考えている．
- K3 曲面のトイモデルとして
  退化した楕円曲線は K3 曲面と類似点が多く，K3 曲面の研究のトイモデルになると期待している．

今度の展望

- 球面ねじり関手の制限の性質の研究
- $\mathrm{Stab}(X)$ のトポロジーの研究

それぞれについて説明する．球面ねじり関手はよく研究されており，性質がよくわかっている．制限として得られる関手はもとのねじり関手と性質が似ていると期待できるが，特異ファイバー特有の対称性に対しての振る舞いはよくわかっていない．このような性質を調べることで，埋め込みによらずに関手を定義できれば興味深いと思っている．

$\mathrm{Stab}^{\dagger}(X)$ が単連結であれば，
$\mathrm{Auteq}_0^*(X)/(\mathrm{Pic}_{\mathrm{tri}}^0(X) \rtimes ((\mathbb{C}^*)^n))$ は基本群 $\pi_1 \mathcal{P}_0^+(X)$ と同型であり，導来同値群の構造を理解できると考えている．

参考文献

[1] Bridgeland, T. (2007). Stability conditions on triangulated categories. Annals of Mathematics 166,317-345.

[2] Seidel ,P and Thomas, R. (2001) Braid group actions on derived categories of coherent sheaves, Duke Math. J. 108 (1) 37-108.