

# 自由メタアーベル群は置換安定である

石倉宙樹

東京大学大学院数理科学研究科

## 定義

$\text{Sym}(n)$  を次数  $n$  の対称群とする.  $\text{Sym}(n)$  上のハミング距離  $d_H$  を  $d_H(\sigma, \tau) = \frac{1}{n} |\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \sigma(k) \neq \tau(k)\}|$  と定める.

可算群  $G$  が置換安定であるとは, 写像の列  $(\phi_n : G \rightarrow \text{Sym}(n))_n$  が任意の  $g, h \in G$  に対し  $d_H(\phi_n(gh), \phi_n(g)\phi_n(h)) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を満たすとき, 群準同型の列  $(\psi_n : G \rightarrow \text{Sym}(n))_n$  が存在して任意の  $g \in G$  に対し  $d_H(\phi_n(g), \psi_n(g)) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を満たすことを言う.

大まかに言えば置換安定性とは, “群準同型に近づいて行く有限対称群への写像の列を, 本物の群準同型の列で近似できる” ことである.

## 背景

20 世紀半ば頃, 作用素論において次のような問題が考えられていた:

可換に近づく行列の組を, 可換な行列の組で近似できるか?

これは, 自由アーベル群が行列のノルムに関して “安定” であるかを問う問題と見ることができる. そのような安定性の離散版 (すなわち行列を置換に, ノルムをハミング距離に変えたもの) が置換安定性である.

Arzhantseva-Păunescu は, 可換に近づく置換の組を可換な置換の組で近似できることを示した. より正確には, 次を証明した.

## 定理 (Arzhantseva-Păunescu 2015)

任意の有限生成アーベル群は置換安定である.

## testability との関係

$\mathbb{Z}^2$  の置換安定性から方程式  $XY = YX$  が “testable” であることが従う. それは以下のような性質である.

$\text{SOL}_{XY=YX}(n) = \{(\sigma, \tau) \in \text{Sym}(n)^2 \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}$  とおき,  $\epsilon > 0$  とする. このとき, 入力  $(\sigma, \tau) \in \text{Sym}(n)^2$  に対し YES または NO を出力する次のようなランダムアルゴリズムが存在する:

- ▶  $(\sigma, \tau) \in \text{SOL}_{XY=YX}(n)$  のとき, 確率 0.99 以上で YES を返す.
- ▶  $d_H(\sigma, \sigma') + d_H(\tau, \tau') < \epsilon$  なる  $(\sigma', \tau') \in \text{SOL}_{XY=YX}(n)$  が存在しないとき, 確率 0.99 以上で NO を返す.
- ▶ クエリ (ここでは置換に 1 つの値を代入する操作などを指す) の回数は  $n$  によらず有界である.

# Invariant Random Subgroup

近年, 置換安定性の研究は invariant random subgroup (以下 IRS と記す) と結びついたことで大きく進展した.

## 定義

$G$  を可算群とする.  $G$  の部分群全体の集合を  $\text{Sub}(G)$  と書き, 直積空間  $2^G$  の閉集合とみなすことでコンパクト空間とすることにする.  $G$  による共役作用で不変な  $\text{Sub}(G)$  上の Borel 確率測度を  $G$  の IRS という. ほとんど至る所で  $G$  の有限指数部分群であるような  $G$  の IRS を有限指数 IRS といひ, それらの  $C(\text{Sub}(G))^*$  における汎弱極限を co-sofic IRS という.

## 例

- $N \trianglelefteq G$  を正規部分群とすると, その上の Dirac 測度  $\delta_N$  は  $G$  の IRS である.
- $H \leq G$  を有限指数部分群とすると,  $\frac{1}{[G:H]} \sum_{g \in G/H} \delta_{gHg^{-1}}$  は  $G$  の有限指数 IRS である.
- $G \curvearrowright (X, \mu)$  を標準確率空間への測度を保つ作用とすると, 各点にその固定化部分群を対応させる写像  $x \in X \mapsto \text{Stab}(x) = \{h \in G \mid hx = x\}$  による押し出し測度  $\text{Stab}_* \mu$  は  $G$  の IRS である (逆に任意の IRS はこの形で与えられることが知られている).
- $G$  の単位元を  $e$  と書く.  $G$  の IRS  $\delta_{\{e\}}$  が co-sofic であることと,  $G$  が residually finite であることは同値である.

## 定理 (Becker-Lubotzky-Thom 2019)

$G$  を有限生成な従順群とする. このとき次は同値である.

- $G$  は置換安定である.
- $G$  の任意の IRS は co-sofic である.

## 注意

- ▶ 上の含意は両方向とも非自明であるが, 特に重要なのは “2 ならば 1” である. 置換安定性を言うためには, 群準同型に近づくあらゆる写像の列を考えなければいけなかったはずだが, 定理によって IRS という理解しやすいものに帰着される.
- ▶ 上の定理と左の例 4 により, 有限生成従順群が置換安定であるためには residually finite であることが必要である (実際には, sofic かつ置換安定ならば residually finite が成り立つ).

部分群を可算個しか持たないような群の IRS は調べるのが比較的簡単である. それによって次が示される.

## 系 (Becker-Lubotzky-Thom 2019)

次の群は置換安定である.

- polycyclic 群, およびそれを有限指数で含む群.
- Baumslag-Solitar 群  $\text{BS}(1, n) = \langle a, b \mid bab^{-1} = a^n \rangle (n \in \mathbb{Z})$ .

# メタアーベル群の置換安定性

ところが部分群が非可算個あるとき、任意の IRS の co-sofic 性を特徴づけることは一般には難しい. Levit と Lubotzky は、各点エルゴード定理を用いることで次を示した.

## 定理 1 (Levit-Lubotzky 2022)

$G$  を従順群とし、 $\mu$  を  $G$  の IRS とする.  $G$  の Følner 列  $F_n$  が次の性質 (#) を満たすとき、 $\mu$  は co-sofic である.

(#):  $\mu$ -a.e.  $H \leq G$  に対し、有限指数部分群の列  $K_n \leq G$  が存在して、

- $\frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \delta_{gK_n g^{-1}}$  は  $G$  の IRS であり、
- $C(\text{Sub}(G))^*$  の汎弱位相に関して  $\frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} (\delta_{gHg^{-1}} - \delta_{gK_n g^{-1}}) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) が成り立つ.

上の条件 1 と 2 が成り立つとき、 $(K_n, F_n)$  は  $H$  の Weiss approximation であるという. 彼らはこれを用いて次を示した.

## 定理 2 (Levit-Lubotzky 2022)

$A, B$  を有限生成アーベル群とし、 $X$  を集合とする.  $B$  は  $X$  に作用しており、その軌道の数有限個であるとする. このときリース積  $\bigoplus_X A \times B$  は置換安定である.

定理 2 は、性質 (#) を満たす Følner 列を具体的に構成することで示される. この際、十分様々な部分群  $H$  に対して Weiss approximation の存在を示すことで、IRS の中身に触れることを回避している. この方法には、上のリース積が有限生成メタアーベル群であることが効いている.

メタアーベル群とは、アーベル群のアーベル群による拡大 (すなわち長さ 2 の可解群) であり、ある意味でアーベル群に最も近い群と言える. 次は自然な問いである.

## 問題 (Levit-Lubotzky 2022)

任意の有限生成メタアーベル群は置換安定か?

## 注意

- ▶ これは、Arzhantseva-Păunescu の定理がメタアーベル群に拡張できるかを問うている.
- ▶ 任意の有限生成メタアーベル群は少なくとも residually finite であることが知られている (Hall の定理).
- ▶ 有限生成な長さ 3 の可解群であって residually finite だが置換安定でないものが存在する.

左の定理 2 の証明は、技術的な理由からリース積に限って Følner 列を構成しているため、その他のメタアーベル群には通用しない. たとえば、メタアーベル群の中にはアーベル群どうしの半直積で表せない (分裂しない) ものがある. 自由メタアーベル群はその基本的な例である.

## 定義

$F$  を自由群とし、 $F''$  をその 2 次導来部分群とする. このとき  $F/F''$  を自由メタアーベル群という.

# 主定理

我々は修士論文で次を示した.

## 主定理

任意の有限生成自由メタアーベル群は置換安定である.

この結果は Levit-Lubotzky の問いに対し, 基本的な例に関して肯定的解答を与える. さらに, 自由メタアーベル群の普遍性から次が従う:

## 系

任意の可算自由メタアーベル群は置換安定である.

以下, 主定理の証明について説明する. Levit-Lubotzky が有限生成アーベル群どうしのリース積に対して用いた方法を拡張し, 自由メタアーベル群に対し性質 (#) を満たす Følner 列を構成するというのが大まかな方針である. ここで自由メタアーベル群とリース積の間には大きな違いが2つあり, この点を克服することが証明の鍵となる.

## 自由メタアーベル群の特徴

1.  $d \geq 2$  のとき,  $F_d/F_d''$  は分裂しないメタアーベル群である. すなわち商群  $F_d/F_d'$  の  $F_d/F_d''$  への自然なリフトが存在しない.
2.  $d \geq 3$  のとき,  $F_d/F_d''$  は permutational なメタアーベル群ではない. これは要するに,  $F_d/F_d''$  の交換子部分群  $F_d'/F_d''$  が持つ  $\mathbb{Z}[F_d/F_d']$ -加群の構造が複雑であることを意味する.

特徴 1 に関して, 我々は人工的に作ったリフトを用いて証明を進めるが, その際次の補題が有用である.  $F_d/F_d''$  の自由生成系を  $\{a_1, \dots, a_d\}$  とする.

## 補題

$g \in F_d/F_d''$  と  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_d \in \{\pm 1\}$ ,  $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し次が成り立つ:

$$[g, a_1^{k_1} \cdots a_d^{k_d}] = \sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ k_j \geq 1}} \sum_{l=0}^{k_j-1} [g, a_j^{\epsilon_j l} a_{j+1}^{\epsilon_{j+1} k_{j+1}} \cdots a_d^{\epsilon_d k_d}].$$

ここで,  $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$ ,  $g^h = h^{-1}gh$  とし,  $F_d'/F_d''$  における群演算は足し算で表している.

Levit-Lubotzky の方法を適用する上で, 良い  $F_d'/F_d''$  の部分群を見つける必要があるが, 特徴 2 によってこれは容易ではない. そこで我々は, 群環  $\mathbb{Z}[F_d/F_d']$  を  $d$  変数ローラン多項式環と同一視し, 多項式の割り算を用いることで望みの部分群を見つける. その際, 次は重要な役割を果たす.

## 補題

次の集合は自由アーベル群  $F_d'/F_d''$  の自由生成系をなす:

$$\left\{ [a_i, a_j]^{a_1^{k_1} \cdots a_j^{k_j}} \mid 1 \leq i < j \leq d, k_1, \dots, k_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

## 参考文献

[1] G. Arzhantseva and L. Păunescu, Almost commuting permutations are near commuting permutations, *J. Funct. Anal.* **269** (2015), 745–757.

[2] O. Becker, A. Lubotzky and A. Thom, Stability and invariant random subgroups, *Duke Math. J.* **168** (2019), 2207–2234.

[3] A. Levit and A. Lubotzky, Infinitely presented permutation stable groups and invariant random subgroups of metabelian groups, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **42** (2022), 2028–2063.