BV構造による小平-Spencer重力理論の拡張

東京大学物理学研究科 物理学専攻　下田亮太

Intro: Topological strings

物理学において、基本的な力を全て記述できる統一理論として、**弦理論**が有望とされている。

基本的な構成要素を1次元の広がりを持った弦とし、数学的に無矛盾なものを考えることで得られる。

弦理論は、様々な数学的現象の物理学的な理解を得られるということで役立つことが知られている。

特に数学との交わりが大きい弦理論として、力学的自由度を失ったtoy modelの位相的弦理論というものがある。

位相的弦理論の成果として、Grormov-Witten不変量という代数多様体の位相不変量を定めたことが挙げられる。

GW不変量は位相的弦理論のA-modelと呼ばれる理論から得られるが、弦の運動という描像からわかる弦の双対性(String duality)によってB-modelと呼ばれる理論に対応づけられる。

小平-Spencer重力(KSG)とは位相的閉弦のB-modelのことである。

閉弦：重力理論＝時空の幾何構造の変形理論

物理学ではCalabi-Yau 3-fold M上の理論

B-model：複素構造変形の理論:KS gravity

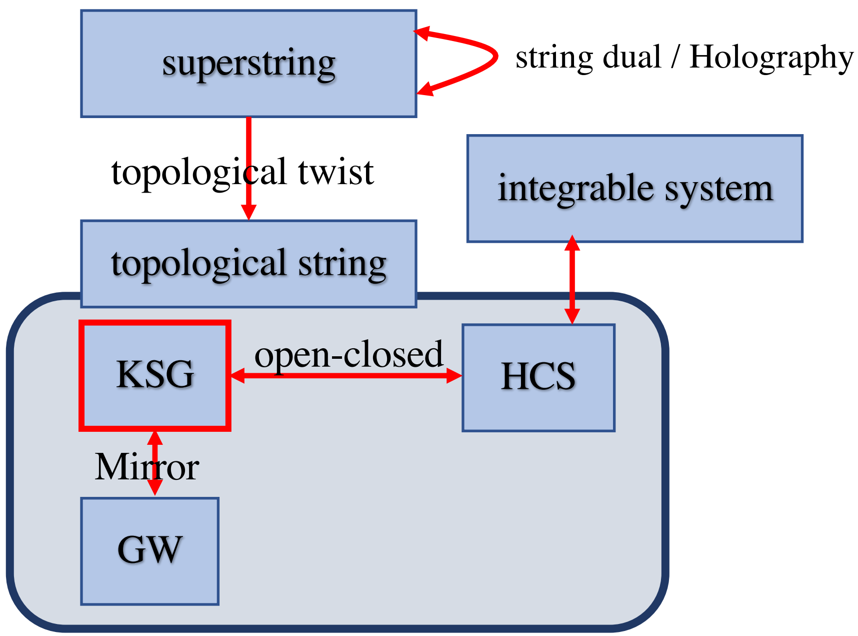
motivation　string duality・Holographyの厳密解析

：物理的弦理論での数理現象を部分的に証明する

可積分系への応用：可積分系の閉弦理論の構成

<u>今回、拡張されたKS重力理論と同じ変形を記述する</u>

<u>非Calabi-Yau 上の重力理論を構成した</u>



Kodaira-Spencer gravity

量子KS重力理論=B-modelの弦の”場の理論”

BCOVは複素構造変形の場の理論を与えた

- CY3の複素構造moduli sp.=弦理論の真空のmoduli sp.
- Polyvectors $\mathrm{PV}^{i,j} = \Omega^{0,j}(M, \wedge^i T_M)$
- 複素構造変形 $\mu \in \mathrm{Ker}\,\partial \subset \mathrm{PV}^{1,1}, \quad \overline{\partial} \mapsto \overline{\partial} + \mu$
- Holomorphic 3-form $[\Omega_M] \mapsto [e^{\mu}\Omega_M] \in H^3_{dR}(M)$
- 作用汎関数

$$\int^{\mathrm{PV}} \frac{1}{2}\mu\partial^{-1}\overline{\partial}\mu + \frac{1}{3}\mu^3$$

Mirror 対称性からの疑問

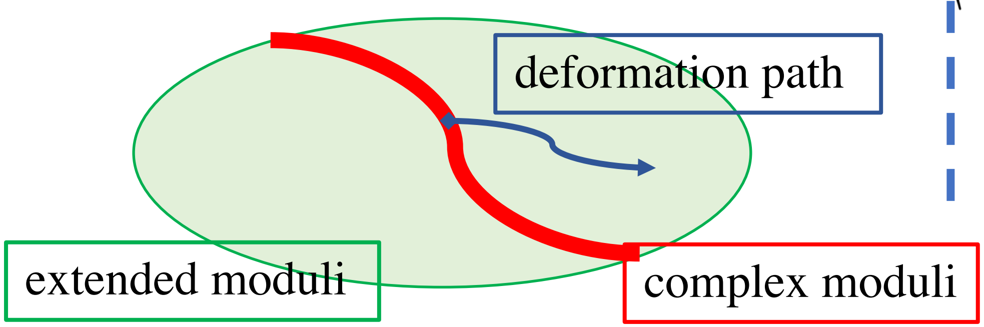
- Mirror symmetry w/ gravitational descendants

$$\Omega^{*,*}[\![u]\!] \leftrightarrow \mathrm{PV}^{*,*}[\![u]\!]$$

を成立させる理論とは?

→ 場の変数の増大：幾何構造の変形自由度の増大

この変形理論の記述についての理解を深めたい



Gravitational descendants

位相的弦の記述ができないGW不変量の要素として

Gravitatinal descendantsがある。

- Gromov-Witten 不変量 on symplectic mfd

deRham cohomology $\alpha_i \in H^*_{dR}(M)$

安定写像のmoduli空間で積分 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(M,\beta)$

$\beta \in H_2(M,\mathbb{Z})$ の効果: worldsheet instanton

世界面理論から得られないGW inv

- marked point の接空間からなる連接層

$$\mathcal{L}_i \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(M,\beta)$$

- 第1Chern類の積分は自然 $\psi_i := c_1(\mathcal{L}_i)$
- GW inv. w/ gravitational descendants

$$u^{k_i}\alpha_i \in H^*_{dR}(M)[\![u]\!]$$

$$\langle u^{k_1}\alpha_1, \ldots, u^{k_n}\alpha_n\rangle_{g,n,\beta} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(M,\beta)} \psi_1^{k_1}\mathrm{ev}_1^*\alpha_1 \cdots \psi_1^{k_n}\mathrm{ev}_n^*\alpha_n$$

- B-modelはworldsheet instantonを持たない

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(M,0) \cong \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \times M$$

これを含むKS重力理論はMirror 対称性の観点から重要

Method:Batalin-Vilkovisky formalism

代数構造を与え、作用汎関数・場の理論を定義する

- 場：例えばgraded ベクトル束の切断全体 $\mathcal{E}$
- 場の局所汎関数全体$\mathcal{O}(\mathcal{E})$,微分Q,括弧 $\{-,-\}$

→differential Gerstenhaber alg. $(\mathcal{O}(\mathcal{E}), Q, \{-,-\})$

相互作用項 $I \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ Maurer-Cartan eq.の解

- Planck 定数 $\hbar$で量子化 $QI + \frac{1}{2}\{I,I\} = 0$

古典論を定めるdifferential BV alg. $(\mathcal{O}(\mathcal{E}), Q, \Delta)$

→量子論を定めるdifferential Gerstenhaber alg.

$$(\mathcal{O}(\mathcal{E})[\![\hbar]\!], Q - \hbar\Delta, \{-,-\})$$

Costello-Li formulation

- Costello-Li式のdifferential BV alg.

$$\mathcal{E} = \mathrm{PV}[\![u]\!]\ ,\ Q = \bar{\partial} - u\partial：\ \text{u-quantized}$$

- ghost数 0 fields

$$\mathrm{PV}^{1,1} \oplus \mathrm{PV}^{2,0} \oplus \mathrm{PV}^{0,2} \oplus u\,\mathrm{PV}^{0,0}$$

これらの幾何学的意味

- 開弦：Holomorphic Chern-Simons th.

$$\mathcal{E} = \Omega^{0,*}(M) \otimes \mathfrak{gl}_N,\ Q = \bar{\partial}$$

- Coupling term：HCS理論の変形

$\mathrm{PV}^{1,1} \oplus \mathrm{PV}^{2,0} \oplus \mathrm{PV}^{0,2}$: generalized cx deform

$u\,\mathrm{PV}^{0,0}$: meromorphic 3-form

□ CYではない幾何を変形の基点としたときの記述?

Generalized Calabi-Yau structure

- 固有値分解: $L \oplus \overline{L} = (TM \oplus T^*M)_{\mathbb{C}}$

U_0: line bundle $\quad \oplus_k \Gamma(\wedge^k \overline{L} \otimes U_0) = \Omega^*(M)$

nowhere-vanishing closed $^\exists \rho \in \Gamma(U_0)$: g CY 条件

外微分の分解: differential BV alg.が得られる

$$\bar{\partial}_L : \Gamma(\wedge^k \overline{L}) \to \Gamma(\wedge^{k+1}\overline{L}),\ \partial_L : \Gamma(\wedge^k \overline{L}) \to \Gamma(\wedge^{k-1}\overline{L})$$

- 変形理論：一般化KS方程式

$$\bar{\partial}_L \mu + \frac{1}{2}[\mu,\mu]_{\partial_L} = 0,\quad \mu \in \Gamma(\wedge^2 \overline{L})$$

□ 複素構造のとき

$$\Gamma(\wedge^k \overline{L}) = \bigoplus_{i=0}^{k} \mathrm{PV}^{i,k-i} \qquad \bar{\partial}_L = \bar{\partial},\ \partial_L = \partial$$

<u>KSGで使われる構造を再現</u>：類似の場の理論が構成可能

New theory

修士論文で提案した理論は次のもの

generalized CY を基点とするdeformationの重力理論

- generalized CY mfdに付随するdifferential BV alg.

→局所汎関数のdifferential Gerstenhaber alg.

$$\left(\mathcal{O}(\Gamma(\wedge^* \overline{L}))\,[\![u]\!]\,,\overline{\partial}_L - u\partial_L,\{-,-\}\right)$$

- Costello-LiによるMaurer-Cartan eq.の証明
  - ➢ differential BV alg.としての性質
  - ➢ $g=0$ gravitational descendantsの性質

のみを使う：同様の証明が成立

☐ Costello-LiによるKS重力理論との具体的な等価性

- gravitational descendantsを含まない部分理論は等価
- generalized CY多様体はおおよそ"symplectic × CY"

symplectic 方向に対する開弦理論

:Lagrangian 部分多様体を台に持つ

e.g. 4d Chern-Simons理論?

☐ open-closed 理論の等価性はより難しい

future works

- A-model的な方向の存在

worldsheet instantonの問題の解決

- Brane 上の開弦理論

4次元Chern-Simons理論は開弦にとれるか?

- Brane backreactionのopen-closed的理解

→topological stringでのHolography の証明

- topological stringでのstring duality
- meromorphic 3-formについて

twistor空間でのHCSが現在研究されている

対応する重力理論の開発