高レベルプリズマティックおよび q-クリスタリンサイトについて

李公彦
数理科学研究科，数論幾何学専攻

用語の説明

数論幾何学の分野の一つである p 進コホモロジー論において，あるスキーム X(数論幾何学における“多様体”) に関する様々なコホモロジー (不変量の一種) を比較することより代数的対象を分析する手法が一般的である。あるコホモロジーはそれに対応するあるサイト (X/D) (X に付随する“位相空間”) およびクリスタル $\mathscr{F}$(サイトを“定義域”とする良い性質を持つ加群の層) に対して定義される。

Example

後で挙げるクリスタリンコホモロジーは，クリスタリンサイト $(X/D)_{\mathrm{crys}}$ 上でクリスタル $\mathscr{F}$ に対して定義される。

X 等の条件に対していい振る舞いをするコホモロジーは違っていて，満たしている性質も異なるが，異なる 2 つのコホモロジーの間の「比較同型」がもし成り立つとすれば，お互いの持っている情報の関連性が得られたり，お互いの性質が共有される。あるコホモロジーの情報からほかのコホモロジーの情報を復元することが可能となり，より深い理論を築くことができる。コホモロジーを計算する際に使われるクリスタルに関し，異なるサイトに関するクリスタルの圏 $\mathscr{C}((X/A))$ が圏同値かどうか (簡単に言うとクリスタルの集合の間に全単射があるかどうか) について調べることも大変重要である。以上を踏まえたうえで，内容の背景である一部の p 進コホモロジー論を簡単に紹介する。

Berthelot は 1970 年代において，p 進コホモロジー論の一つであるクリスタリンコホモロジーというものを定義した。これはスキーム X の PD 環 (D, I, γ) に関するクリスタリンサイト $(X/D)_{\mathrm{crys}}$ 上のコホモロジーとして定義される。これは基礎環 D が混標数の不分岐な離散付値環 V の時定義されるが，V が分岐するという “不都合” な性質持っている時でも類似の理論を構成するため，Berthelot は更に高レベルクリスタリンコホモロジーというものを定義した。これは，m を 0 以上の整数，(D, J, I, γ) を m-PD 環とすると，m-クリスタリンサイト $(X/D)_{m\text{-crys}}$ 上で定義され，$m = 0$ の場合は通常のクリスタリンサイトと一致する。Berthelot は以下の Frobenius descent と呼ばれる主張を示した。

定理 1(Berthelot)

X' を X のフロベニウス ϕ を m 回合成したものによる引き戻し $X \underset{\mathrm{Spec}(D/I),(\phi^m)^*}{\times} \mathrm{Spec}(D/I)$ として定めると，X の D 上の m-クリスタリンサイト上のクリスタルの圏 $\mathscr{C}((X/D)_{m\text{-crys}})$ は，X' の D 上のクリスタリンサイト上のクリスタルの圏 $\mathscr{C}((X'/D)_{\mathrm{crys}})$ と同値である。

定理 2(Berthelot)

定理 1 の状況において，X の D 上のレベル m クリスタリンコホモロジーは，X' の D 上のクリスタリンコホモロジーと同型である。

プリズマティックおよび q-クリスタリンコホモロジー

一方，Bhatt と Scholze は 2019 年において，クリスタリンコホモロジーのより一般化である二つの p 進コホモロジー論，プリズマティックコホモロジーおよび q-クリスタリンコホモロジーを定義した。A を有界プリズム，(D, I) を q-PD 対とすると，これらはそれぞれプリズマティックサイト $(X/A)_{\mathbb{\Delta}}$ および q-クリスタリンサイト $(X/D)_{q\text{-crys}}$ 上で定義される。プリズマティックコホモロジーは多くの p 進コホモロジーとの比較同型が成り立ち，多くの p 進コホモロジーの情報を復元する。スキームという“光”がプリズムを通して様々な“色”(クリスタリン，ド・ラーム，エタールコホモロジー等) が現れるイメージである。q-クリスタリンとの比較同型も以下のように成り立つ。詳細は省略するが，基礎環 A, D の δ 構造よりフロベニウスの持ち上げ ϕ が存在することに注意する。

定理 3(Bhatt-Scholze)

X' を X の ϕ による引き戻しとして定めると，X の D 上の q-クリスタリンコホモロジーは，X' の D 上のプリズマティックコホモロジーと同型である。

q-クリスタリンサイトの基礎環 D は $\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]$-代数であり，q-クリスタリンコホモロジーは $q=1$ の無限小近傍で定義されるコホモロジーであると考えられ，$q=1$ の場合はクリスタリンコホモロジーを復元する:

定理 4(Bhatt-Scholze)

D において $q=1$ であるとき，X の D 上の q-クリスタリンコホモロジーは，X の D 上のクリスタリンコホモロジーと同型である。

高レベルプリズマティックおよび q-クリスタリンサイト

自分は修士論文において，まずは高レベルの概念をプリズマティックおよび q-クリスタリンサイトに拡張して，m-プリズマティックサイト $(X/A)_{m-\Delta}$ および m-q-クリスタリンサイト $(X/D)_{m\text{-}q\text{-crys}}$ を定義し，定理１の類似について示した:

定理 5

$\mathscr{C}((X/A)_{m-\Delta}) \simeq \mathscr{C}((X'/A)_{\Delta})$,
$\mathscr{C}((X/D)_{m\text{-}q\text{-crys}}) \simeq \mathscr{C}((X'/D)_{q\text{-crys}})$.

次に，定理 3 と定理 5 を用いてコホモロジーを比較すること，つまり (レベル (-1) に関する記号は正確には定義されていないが)

$$\mathscr{C}((X'/D)_{\Delta}) \overset{(3)}{\simeq} \mathscr{C}((X/D)_{q\text{-crys}}) \overset{(5)}{\simeq} \mathscr{C}((X'/D)_{(-1)\text{-}q\text{-crys}})$$

より，(X'/D) 上のプリズマティックコホモロジーはある種の (X'/D) 上の“レベル (-1)”-q-クリスタリンコホモロジーとみなせる点に着目し，定理 3 の高レベル版について示した。(X^* は X にかなり近いスキーム)

定理 6

$\mathscr{C}((X/D)_{(m-1)\text{-}q\text{-crys}}) \simeq \mathscr{C}((X^*/D)_{m-\Delta})$

更に，$q = 1$ の場合の時，定理 4 の高レベル版について示した:

定理 7

D において $q = 1$ であるとき，
$\mathscr{C}((X/D)_{m\text{-}q\text{-crys}}) \simeq \mathscr{C}((X/D)_{m\text{-crys}})$

以上より，高レベルプリズマティックの概念と他の論文の内容との関連性も考えられ，例として論文 (志甫,Notes on generalizations of local Ogus–Vologodsky correspondence) の関手を用いると，高レベルを経由して，プリズマティックサイト上のクリスタルの圏から p-接続加群の圏への関手が構成できる:

$$\mathscr{C}((X'/W)_{\Delta}) \xrightarrow{\simeq} p\text{-MIC}(\widetilde{X}'/W)$$