向き付け不可能な3次元多様体へのスピンc構造の拡張と mod 2 指数

東京大学大学院数理科学研究科 宮澤 仁

筆者の専攻分野は幾何学であり，その中で指数定理に関する幾何学とゲージ理論が主な研究対象である．どちらも滑らかな多様体を調べる分野である．指数定理は線形楕円型作用素の指数という不変量を用いて多様体の情報を得る．ゲージ理論では非線形な楕円型偏微分方程式を用いて多様体の情報を得る．両者は密接に関連している．ゲージ理論は指数定理の理論の非線形化とみなすことができ，一般に指数の理論で手の届かない範囲の情報 (微分構造の情報など) をつかめることが多い．
本研究は，$8k+3$ 次元多様体の，ある楕円型作用素の mod2 指数と呼ばれる不変量についての研究である．さらに，その応用としてゲージ理論への応用が得られた．主定理とその応用を述べるために，この研究の背景となる事柄を述べる．

Atiyah-Singer の指数定理

指数定理はアティヤとシンガーによって 1968 年に示された定理で，**多様体上の楕円型作用素の指数と多様体のトポロジーから決まる量をむすびつけるものである．** 楕円型作用素の指数を解析的指数といい，位相的にきまる量を位相的指数という．指数定理は

- ガウスボンネの定理，
- ヒルツブルフ・リーマン・ロッホの定理，
- ヒルツブルフの符号数定理

を再現する重要な定理である．
通常の指数定理では，位相的指数は特性類の積分で表される．

mod2 指数

この指数定理の変種で，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に値を取るものがある．これを mod2 指数という．この mod2 指数についてもアティヤとシンガーにより 1971 年に示された，楕円型作用素の mod2 指数を位相的な量 (位相的指数) と結びつける定理がある．これは，通常の指数が K 群に値を取るのに対し，$KO^{-1}(pt)$, $KO^{-2}(pt)$ や，そのほかの K 群の変種に値を取るものと言える．本研究では $KO^{-1}(pt)$ に値を取るものを扱う．
mod2 指数の場合の位相的指数については，特性類の積分のようなわかりやすい表示は一般に知られていない．

4 次元多様体のゲージ理論

4 次元多様体の微分構造について，ある非線形偏微分方程式の解のなす空間をもちいて調べるのが 4 次元多様体のゲージ理論である．4 次元多様体のゲージ理論には主に以下のふたつがある．

- ドナルドソンによって 1982 年に初めて扱われた，ASD 方程式を用いるもの．(ドナルドソン理論)
- ウィッテンによって 1994 年に初めて扱われた，サイバーグ・ウィッテン方程式を用いるもの．(サイバーグ・ウィッテン理論)

本研究と関係があるのはサイバーグ・ウィッテン理論の変種である．サイバーグ・ウィッテン方程式はディラック方程式の非線形場版のような方程式である．解の空間をゲージ変換という同値類で割ったものはコンパクトで，必要なら初めから方程式を摂動しておくことで向き付け可能な多様体になる．一方，本研究と関係がある $Pin^{-}(2)$ モノポールは，モジュライ空間はコンパクトになるが，向き付け可能とは限らない．
モジュライの向きが問題になるのは，ゲージ理論で不変量を構成するときに，モジュライ空間の上であるコホモロジー類の積分を考えることが多いからである．

主定理を述べるために準備をする.

$Pin_+^{\tilde{c}}$ 構造

- Y : $8k+3$ 次元閉多様体で向き付け可能とは限らないものとする.
- $\pi\colon E \to Y$: Y 上の $\mathbb{R}^2$ 束で 1 次と 2 次の Stiefel-Whitney 類が TY のそれと等しいとする.

このとき, Y 上に $Pin_+^{\tilde{c}}$ 構造というものを定義できる. $Pin_+^{\tilde{c}}$ 構造は Freed-Hopkins[2] で導入されたものであり, Pin^+ 構造, $Spin^c$ 構造の共通の一般化である. これは Y と E から一意に決まるものではないことに注意する. $Pin_+^{\tilde{c}}$ 構造をひとつとって $\mathfrak{s}$ と書くことにする. また, E を $\mathfrak{s}$ の $O(2)$ 同伴束と呼ぶことにする.

解析的指数

$Pin_+^{\tilde{c}}$ 構造から, 解析的指数と呼ばれる不変量が定義できる.

- $\mathfrak{s}$ からスピノル束 S が定義される. S は実ベクトル空間である.
- S 上に反対称, すなわち L^2 内積 $\langle , \rangle$ について $\langle D\phi, \psi\rangle = -\langle \phi, D\psi\rangle$ をみたす Dirac 型作用素 D が定義される. これはホモトピーの違いを除いて一意である.
- $\dim_{\mathbb{R}} \ker D \mod 2$ は, 反対称性を保ったまま D をホモトピーで変形して変わらない. これを $\mathfrak{s}$ の解析的 mod2 指数と呼ぶ.

ここで登場する解析的 mod2 指数は $KO^{-1}(pt)$ に値を取るものである. 解析的指数を定義するときのスピノル束が定義できるのが $8k+3$ 次元である. 次元の仮定はここに現れる. なお, 8 が周期になっているのは Clifford 代数の周期性に由来する.

特性部分多様体とその $Spin$ 構造

$Pin_+^{\tilde{c}}$ 構造 $\mathfrak{s}$ から次のようにして $8k+1$ 次元の $Spin$ ボルディズム群 $\Omega_{8k+1}^{Spin}(pt)$ の元 $f(Y, \mathfrak{s})$ を与える.

- h を E の 0 切断と横断的な切断とする. このとき, $C := h^{-1}(0)$ 上に $\mathfrak{s}$ から決まる自然な $Spin$ 構造を定義することができる. これを $\mathfrak{s}'_C$ と書く. C を特性部分多様体とよぶ.
- $(C, \mathfrak{s}'_C, C \to Y;$ 埋め込み$)$ は Y の $8k+1$ 次元の $Spin$ ボルディズム群 $\Omega_{8k+1}^{Spin}(Y)$ の元を与える. これは $Spin$ ボルディズム群の元としては h によらない.
- $(C, \mathfrak{s}'_C, C \to Y;$ 埋め込み$) \in \Omega_{8k+1}^{Spin}(Y)$ を, Y を一点につぶす写像による押し出しで $\Omega_{8k+1}^{Spin}(pt)$ に送った元を $f(Y, \mathfrak{s})$ とする. これは, $(Y, \mathfrak{s})$ の定める $Pin_+^{\tilde{c}}$ ボルディズム類のみによることが分かる.

Theorem (M. 2021)

下の図式の f を前のスライドで定めた写像とする. このとき下の図式は可換である. ただし, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ への写像はそれぞれ $Pin_+^{\tilde{c}}$ 構造の解析的 mod2 指数の写像と, $8k+1$ 次元 $Spin$ 多様体の解析的 mod2 指数の写像であり, $\Omega_n^X(pt)$ は構造 X に関する n 次元のボルディズム群である.

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{8k+3}^{Pin_+^{\tilde{c}}}(pt) \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & \Omega_{8k+1}^{Spin}(pt) \arrow[d] \\
& \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

とくに, $k=0$ の場合には右側の写像 $\Omega_1^{Spin}(pt) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が同型なので $Pin_+^{\tilde{c}}$ の解析的 mod2 指数は位相幾何的に計算できる.

上の定理の後半で述べられていることから, 3 次元の場合には位相的指数が定義できる. **そして, 主定理は解析的指数と位相的指数の一致という形で述べることができる.**

今回扱った mod2 指数について, 3 次元の場合に非自明な例を構成することができた. 構成方法を二通り述べる.

具体例その 1

$S^1 \times \mathbb{R}P^2$ 上に $\mathbb{R}P^2$ 上の $Pin_+^{\tilde{c}}$ 構造 $\mathfrak{s}$ から誘導される $Pin_+^{\tilde{c}}$ 構造 $\mathfrak{s}_1$ と, それを S^1 まわりにひねった $Pin_+^{\tilde{c}}$ 構造 $\mathfrak{s}_0$ を考えることができる. このとき $\mathfrak{s}_0$ の mod2 指数が 0 であり, $\mathfrak{s}_1$ の mod2 指数が 1 であることが, 解析的指数と位相的指数それぞれの場合に直接確かめられる.

具体例その 2

向き付け可能な 3 次元多様体 Y 上に絡み目 L があったとする. Y 上の $Spin$ 構造で, L の管状近傍の境界に誘導される $Spin$ 構造がある条件を満たしている場合にデーン手術 (の類似) を施して mod2 指数が 0 でない様にできる. さらに, 向きがつかない 3 次元多様体上の絡み目について, mod2 指数を変えずにデーン手術する方法を求めた.

主定理の 3 次元の場合を用いると, 4 次元多様体のゲージ理論に応用が出る. そのことについて説明する.

Pin-(2) モノポール

$Pin^-(2)$ モノポール不変量は中村信弘によって 2013 年,2015 年の論文で導入された 4 次元多様体の不変量である.
サイバーグ・ウィッテン不変量 (モノポール不変量) は 4 次元多様体 X の $Spin^c$ 構造という構造に対して整数を返すが, $Pin^-(2)$ モノポールは $Spin^{c-}$ 構造といわれる構造に対し $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の値を返すものである. これは, モジュライ空間 (これは滑らかな有限次元の閉多様体である) に向きがつくとは限らないので今定義されているのは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 値の不変量である. $Spin^{c-}$ 構造は局所系係数付きの $Spin^c$ 構造といえるような構造である.
$Pin^-(2)$ モノポールは通常のサイバーグ・ウィッテン不変量では検出できなかった微分構造 (連結和した多様体の微分構造の差異など) の情報を検出することができる.

Theorem (M. 2020)

X を 4 次元多様体, $\tilde{\mathfrak{s}}$ を X 上の $Spin^{c-}$ 構造とする. l を $\tilde{\mathfrak{s}}$ からきまる局所系とする. このとき, $H^1(X, l)$ の生成元を $s_1, \ldots s_{b_1(l)}$ とする. $s_1, \ldots s_{b_1(l)}$ のポアンカレ双対の *3次元多様体上に誘導される* $Pin_+^{\tilde{c}}$ 構造の構造の位相的 *mod* 2 指数を調べることでモジュライ空間の向きの局所系を決定できる. **とくに, モジュライ空間の向きの局所系は位相幾何学的に計算できる.**
さらに, 実際にモジュライ空間の向き付けが可能でない例をはじめて構成した.

$Pin^-(2)$ モノポールのモジュライ空間の向き付け可能性が本研究の解析的 mod2 指数を調べることによってできるという考察は古田によってなされ, 中村によってノート [7] にまとめられていた. 本研究の主定理によって向きの局所系が位相的に計算できることが分かった.

今後の応用

$Pin^-(2)$ モノポールのモジュライの向きの局所系が比較的容易に計算できることが分かったので, 向きの局所系を用いた $\mathbb{Z}$ に値をとる新たな不変量を構成できるのではないかと期待できる. それによって, より精密な微分構造の情報を検出できると思われる. (たとえば, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 値の不変量が 0 になってしまうが, $\mathbb{Z}$ 値の不変量では区別できる例が存在するのではないかと思われる. 実際に向きのつく場合に $\mathbb{Z}$ 値の不変量が定義できるような場合で, 不変量が非自明であるが偶数なので $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の不変量が 0 になっている例が存在する.)

ここでは証明手法について説明する.

Witten-deformation

主定理の証明の手法は Witten deformation である. これは Witten により 1982 年に [8] で導入されたものである. Witten deformation は指数に関する現象を扱う強力な手法である.

Witten deformation のひとつの使い方は, 考えている作用素に摂動項を付け加え, その零点まわりに指数の情報を局所化させることである. 指数の局所化に関する研究は数多くある. その中で, 特性部分多様体と関連する局所化に関する研究に Zhang[9], Fast-Ochanine[1], 古田・亀谷 [3], 林 [4] がある. これらの研究は $Spin^c$ のスピノル束の行列式直線束の切断の零点に指数を局所化させている. 本研究では, $Pin_+^{\tilde{c}}$ 構造に付随する $O(2)$ 束 E の零点集合に局所化させる. E は $Spin^c$ 構造の行列式直線束に対応するものである.

Witten deformation の key point は摂動項を

- (Dirac operator が skew adjoint なら)skew-adjoint で
- Dirac 作用素の主表象と反可換

であることである. 上の条件を満たすと固有関数を局所化させるための解析の議論ができる. 本研究で重要だったステップは上の条件を満たす摂動項をみつけることができたところである.

参考文献

[1] J.L.Fast, S.Ochanine. *On the KO characteristic cycle of a* Spin^c *manifold.* Manuscripta Math., **115**(1):73–83, (2004).

[2] D.Freed, M.Hopkins, *Reflection positivity and invertible topological phases*, arXiv preprint arXiv:1604.06527, (2016).

[3] M. Furuta and Y. Kametani. *Equivariant version of rochlin-type congruences.* J. Math. Soc. Japan. **66**, no.1, :205–221, (2014).

[4] S. Hayashi, *Localization of Dirac Operators on 4n+ 2 Dimensional Open Spinĉ Manifolds*, arXiv preprint arXiv:1306.0389, (2013).

[5] N.Nakamura. *Pin*$^-$(2)*monopole equations and intersection forms with local coefficients of 4-manifolds*. Math. Ann. **357**, : 915–939(2013).

[6] N.Nakamura, *Pin*$^-$(2)*monopole invariants*, J.Differential Geom. **101**,no.3, :507–549.(2015).

[7] N.Nakamura, *Pin*$^-$(2) モノポールのモジュライの向き付け可能性についてのノート, http://kansai-gauge.squares.net/misc/pin2-ori.pdf

[8] E. Witten. *Supersymmetry and Morse theory.* J. Differential Geom., **17**(4):661–692, (1982).

[9] W.Zhang. *Spin*^{c}*-manifolds and Rokhlin congruences.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **317**(7):689–692, 1993.