コホモロジー的ドナルドソン・トーマス理論における次元還元

金城翼 (東京大学大学院数理科学研究科)

修士論文の要約

・「コホモロジー的ドナルドソン・トーマス理論」において、三次元と二次元を結びつける定理を証明した。

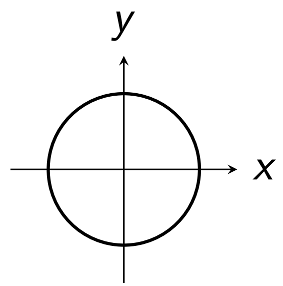
・これは「トム同型定理」の「導来代数幾何」的な拡張・再解釈によって得られた。

修士論文で得られた結果は「代数幾何学」という分野における定理である。

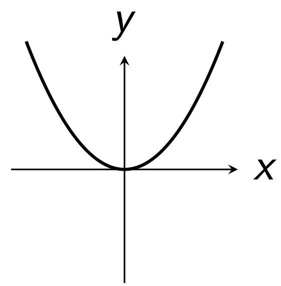
代数幾何学とは

代数幾何学 ･･･ 多項式の方程式によって定められた図形 (代数多様体) を調べる分野。

代数多様体の例



$x^2 + y^2 = 1$



$y - x^2 = 0$

現代の代数幾何においては、より高次元の代数多様体が研究の対象である。中でも「三次元カラビヤウ多様体」は非常に興味深い対象である。

三次元カラビヤウ多様体とは

超弦理論において時空 (四次元) の余剰次元 (六次元=複素数で三次元) の形として考えられている図形。

三次元カラビヤウ多様体に関する重要なテーマとして「曲線の数え上げ」というものがあり、これは数理物理学における発展を背景に純粋数学的にも興味を持たれている。

曲線の数え上げ理論

大きく分けて二つの数え上げの理論が存在する：

グロモフ・ウィッテン(GW)理論 ··· 曲線から三次元カラビヤウ多様体への「写像」を数える（媒介変数表示)。

ドナルドソン・トーマス(DT)理論 ··· 三次元カラビヤウ多様体に埋め込まれた曲線を数える(陰関数表示)。

これらの二つの不変量は本質的に等価であると考えられているが、全く異なる理論が展開されている。本研究はDT理論に関するものである。

DT理論の興味深い側面として「圏化」というものが存在する。圏化とは、元々は数であった不変量をベクトル空間などに値を取るように精密化することである。圏化の例として、オイラー数(図形の穴の数)に対するホモロジー(図形の穴の数を次元に持つベクトル空間)などがあり、ホモロジーの誕生によって幾何学は大きく進歩した。DT不変量の圏化としてコホモロジー的ドナルドソン・トーマス(DT)不変量というものがある：

$$\begin{tikzcd} & \text{ベクトル空間} \arrow[d, "\text{次元}"] \\ \text{三次元カラビヤウ多様体} \arrow[ur, dashed, "\text{コホモロジー的 DT 不変量（圏化）}"] \arrow[r, "\text{DT 不変量}"'] & \text{数} \end{tikzcd}$$

この不変量は2013年頃にJoyceらによってある偏屈層の超コホモロジーとして[1]で定義されたが、その定義は難解でありその多くが未解明である。

問題意識

コホモロジー的DT不変量にはDT不変量のような豊かな理論が存在するか？

以下、修士論文で得た成果について説明を行う。主張を正確に述べるために、このページでは専門的な言葉を用いる。
修士論文では「局所曲面」と呼ばれる、特別な三次元カラビヤウ多様体のコホモロジー的DT不変量を調べる研究を行った。これは代数曲面（二次元の代数多様体）に一次元座標を増やすことで作られる三次元の代数多様体である。

主結果

S を代数曲面，$X = \mathrm{Tot}_S(\omega_S)$ を付随する局所曲面とする。$\mathfrak{M}_X$, $\mathfrak{M}_S$ でそれぞれ X と S のコンパクト台を持つ連接層のモジュライスタックとするとき，次の同型

$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{M}_X, \varphi) \cong \mathrm{H}^{\mathrm{BM}}_{-*+\mathrm{vdim}\mathfrak{M}_S}(\mathfrak{M}_s)$$

が存在する。ここで φ は Joyce らによって [1] で導入された偏屈層であり，H^{BM} はボレルムーアホモロジーである。

これは大まかには次のようなことを意味している：一般には非常に複雑であると考えられるコホモロジー的DT不変量は、局所曲面の場合には簡単な記述を持つ。この主結果はDavisonによる次元還元定理 [2] の大域化と解釈することができる。

より一般に，次の定理の証明が得られた：

双対障害錘にたいするトム同型

Y を擬滑らか導来アルティンスタックとし，$\mathbf{T}^*[-1]Y$ をその -1-シフト余接スタックとする。$\pi\colon \mathbf{T}^*[-1]Y \to Y$ を射影とし，φ を Joyce らが [1] で導入した偏屈層とする。このとき，

$$\pi_! \varphi \cong \mathbb{Q}_Y[\mathrm{vdim}\, Y]$$

が成立する。特に

$$\mathrm{H}^*(\mathbf{T}^*[-1]Y, \mathbf{T}^*[-1]Y \setminus Y; \varphi) \cong \mathrm{H}^{*+\mathrm{vdim}\, Y}(Y)$$

が成立する。

局所曲面のコンパクト台を持つ連接層のモジュライスタックは元の曲面のコンパクト台を持つ連接層のモジュライスタックの -1-シフト余接スタックとして記述され、この定理から主結果が従う。

この定理は、滑らかな複素多様体上のベクトル束についてのトム同型の一般化になっていることがわかる。実際、Y としてベクトル束の零切断の自己交差により定まる導来スキームをとると、上で得られた同型は古典的なトム同型に他ならない。

主結果の帰結

・局所K3曲面のコホモロジー的DT不変量には**積構造**が入ることがわかる。一般の三次元カラビヤウ多様体のコホモロジー的DT不変量には積構造が入ることが予想され、重要な問題の一つであるが、局所K3曲面の場合に証明したことになる。

・双対障害錘に対するトム同型を用いることによって、従来のトム同型によって得られていたものを導来代数幾何的に一般化することができると考えられる。その一つとして、オイラー類の構成を一般化することで、**仮想基本類**と呼ばれる、重要な不変量の新しい構成を与えることができる。

このように、修論で得られた結果はほとんどのことが未解明であったコホモロジー的DT不変量について、局所曲面の場合に進展を与えていると同時に、仮想基本類の新しい構成のようなDT理論以外の問題にも関連している。

今後の展望

・局所K3曲面のコホモロジー的DT不変量の積構造を用いることによって、壁越え公式などの数値的DT不変量における定理の圏化を実現することはできるか。

・「双対障害錘に対するトム同型」には他にどのような応用があるか。例えば、四次元カラビヤウ多様体の曲線を数え上げるDT型の不変量を復元することはできるか。

参考文献

[1] O. Ben-Bassat, C. Brav, V. Bussi, and D. Joyce, *A 'Darboux Theorem' for shifted symplectic structures on derived Artin stacks, with applications*, Geom. Topol. 19 (2015), no. 3, 1287-1359.

[2] B. Davison, *The critical CoHA of a quiver with potential*, Q. J. Math. 68 (2017), no. 2, 635–703.