コンパクト量子群の準同型に関する作用の誘導について

東京大学数理科学研究科 数理科学専攻　北村 侃

非可換幾何と量子群

(局所コンパクトハウスドルフ) 空間 X は、(無限遠で消える) $\mathbb{C}$ 値連続関数環 $C_0(X)$ から復元できる (ここでは線形空間や代数などは全て $\mathbb{C}$ 上で考えることにする)。これは可換な積構造を持つが、その非可換な拡張として C*環がある。

定義 (C*環)

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の上の有界線形作用素全体 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分 $\mathbb{C}$ 代数で、共役について閉じており、作用素ノルム位相で閉なものを C*環という。

この C*環を “非可換な空間” とみなして、空間における諸概念のアナロジーを考えることにより生まれる新たな数学的現象を研究する分野が (作用素環論の立場からの) 非可換幾何である。例えばこの見方の下で、群の非可換なアナロジーである量子群を考えることができる。これは非可換な空間のある種の対称性を与えるものとみなせる。

可換		非可換
(局所コンパクト) 空間	$\rightsquigarrow$	C*環
(局所コンパクト) 群	$\rightsquigarrow$	量子群

簡単のため、以下では量子群はコンパクトな場合に限って考えることにする。

定義 (コンパクト量子群、Woronowicz)

単位元を持つ C*環 A と C*環の単位的準同型 $\Delta : A \to A \otimes A$ が次を満たすとき、その組 $G = (A, \Delta)$ をコンパクト量子群という。

(1) $(\mathrm{id}_A \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_A)\Delta$ となる。

(2) $\Delta(A)(1_A \otimes A), \Delta(A)(A \otimes 1_A)$ はともに $A \otimes A$ の稠密な線形部分空間を生成する。

ここで、コンパクト群 G 自体はコンパクト量子群である。$A = C(G)$、Δ は G の群演算 $m : G \times G \to G$ の引き戻しで与えられる。上の (1) は m の結合律に、(2) は (Stone–Weierstrass の定理を通じて)m の消去律に対応する。

例

G をコンパクトで連結かつ単連結なリー群、$0 < q \leq 1$ とする。このとき、G の q 変形 G_q をコンパクト量子群として実現できる。

なお、C*環のような作用素のなす代数系は作用素環と呼ばれている。作用素環論は Murray と von Neumann により量子力学の数学的基礎付けが動機の一つとなって創始されたという経緯がある。このため非可換幾何や量子群は歴史的に物理との深い関連があるが、ここでは数学的側面のみに焦点を当てることにする。

C*環に対する作用の誘導と同変 K 理論

局所コンパクト群 G と、その閉部分群 H について、C*環に対する作用の誘導と呼ばれる方法で H の作用を持つ C*環から G の作用を持つ C*環を作りだすことができる。量子群の場合についても、Vaes により閉部分量子群の作用を持つ C*環からの作用の誘導が構成されている。

作用の誘導は、C*環に対する同変 K 理論においても基本的な構成となっている。古典的な場合と同様、C*環に対しても群の作用についての同変な K 群を考えることができ、これは特に Baum–Connes 予想の進展に代表されるような幾何学や群論への広範な応用を持っている。一方、非可換幾何の観点からは量子群の作用を持つ C*環を考えることは自然な発想であり、この場合の同変 K 理論も非常に豊かなものだと期待される。しかし、こちらはまだよく分かっていない部分が多い。

ここで、作用の誘導に関する素朴な疑問として次が考えられる。

問

閉部分量子群を与えるとは限らない量子群の準同型 $H \to G$ に対しても作用の誘導と呼べる構成は考えられるか？

このとき我々は、

- コンパクト量子群の間の任意の準同型に対し作用の誘導の類似を構成し、期待される性質を示した。
- この構成をコンパクト量子群の同変 K 理論に応用した。

余テンソル積と作用の誘導の一般化

以下、次の状況を考えることにする。

設定

- $G = (C(G), \Delta_G), H = (C(H), \Delta_H)$ をコンパクト量子群とする (ここで、$C(G), C(H)$ とは形式的な記号であることに注意する)。
- $\phi : H \to G$ を量子群の準同型とする。

ϕ に関する作用の誘導は、直観的には G と (非可換) 空間の H の作用に関する balanced product であるべきと思われる。これは余テンソル積で実現される。作用素環論の文脈では [2] において特別な場合に対し余テンソル積が考えられている。

定義 (余テンソル積)

A, B を C*環とし、$\alpha : A \to A \otimes C(H)$ を A の右 H 作用、$\beta : B \to C(H) \otimes B$ を B の左 H 作用とする。A と B の余テンソル積 $A \underset{H}{\square} B$ を余等化子 $\mathrm{Ker}(\alpha \otimes \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_A \otimes \beta)$ (の適切な部分 C*環) で定義する。

例

局所コンパクト空間 X, Y がコンパクト群 H の右、左作用をそれぞれ持つとする。このとき各 $(x, y) \in X \times Y, h \in H$ に対し $(xh, y) \sim (x, hy)$ とすると、$C_0(X) \underset{H}{\square} C_0(Y) \cong C_0((X \times Y)/\sim)$ となる。

この余テンソル積を用いて作用の誘導を定義する。

定義 (作用の誘導)

左 H 作用を持つ C*環 A に対し、ϕ に関する作用の誘導を $\mathrm{Ind}_\phi A := C(G) \underset{H}{\square} A$ とする。このとき、$C(G)$ により $\mathrm{Ind}_\phi A$ は自然な左 G 作用を持つ。

ここで、H が G の閉部分量子群である場合には、この定義は従来の作用の誘導の構成に一致することを示すことができる。

一方で、左 G 作用を持つ C*環 A があると、ϕ による引き戻しにより A に左 H 作用を与えることができる。このとき、我々は ϕ に関する Ind_ϕ の構成と作用の引き戻し ϕ^* の間の関係を調べた。

作用の誘導と引き戻しとの関係

C*環の作用の誘導の理論において最も基本的な結果として、作用の誘導と Pontrjagin 双対を介した作用の引き戻しを関連付ける imprimitivity 定理がある。まず Ind_ϕ の構成を作用の誘導と呼ぶことの正当化として、我々はその類似が次のような形で成り立つことを示した。

定理 1 (Imprimitivity theorem)

C*環 A が H の自由な左作用を持つとき、自然な H 同変森田同値 $\mathrm{Ind}_\phi A \overset{M}{\sim} \widehat{G} \ltimes \widehat{\phi}^*(H \ltimes A)$ が存在する。

ここで、$\ltimes$ は量子群の作用による被約クロス積を、$\widehat{G}$ はコンパクト量子群 G の "Pontrjagin 双対" にあたる離散量子群を表す。このとき、ϕ は双対量子群同士の準同型 $\widehat{\phi} : \widehat{G} \to \widehat{H}$ を自然に誘導する。

上の系として、Ind_ϕ が誘導する H および G 同変な K 理論のなす圏 (同変 Kasparov 圏) の間の関手 $\phi_* : \mathrm{KK}^H \to \mathrm{KK}^G$ について次が従う。

系 (Induction in stages)

さらに F をコンパクト量子群、$\psi : G \to F$ を準同型とすると、自然同値 $\psi_*\phi_* \cong (\psi\phi)_* : \mathrm{KK}^H \to \mathrm{KK}^F$ が存在する。

次に、作用の引き戻しが誘導する $\phi^* : \mathrm{KK}^G \to \mathrm{KK}^H$ について我々は次の形の随伴性を示した。この意味で、作用の誘導は ϕ に関する押し出しを与えている。

定理 2 (Frobenius reciprocity)

適切な条件を満たす ϕ に対し、$\phi^* \dashv \phi_*$ となる。

この主張は次の 2 つの異なる状況を統一するものである。

例

- 定理 2 の状況で ϕ が閉部分量子群を与えるとき、これはフロベニウス相互律の K 理論への類似である。
- G が自明なとき、定理 2 は Green–Julg の定理として知られている。特に、$K_\bullet^H(A) \cong K_\bullet(H \ltimes A)$ が H 作用を持つ C*環 A に対して成り立つ。

なお今回考えた Ind_ϕ や ϕ_* は、特に ϕ が量子群の全射 (の類似) を与えるときが新しく興味深い場合と思われる。次に我々はそのような ϕ として最もシンプルな場合に作用の誘導と同変 K 理論との関連を調べた。

コンパクト量子群の twist と K 理論

コンパクト量子群 G への離散群 Γ の作用 $\Gamma \curvearrowright G$ を考える。さらに適切な状況設定の下、新たなコンパクト量子群 G^τ を与える twist と呼ばれる構成が [1] などで考えられている。以下では Γ が有限アーベル群のときに G と G^τ の同変 K 理論を比べることを考える。

例

$q \in (0,1]$、$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、$SU_q(2n)$ の twist により $SU_{-q}(2n)$ を与えることができる。

各 $\bullet = \emptyset, \tau$ に対し、次の "分裂する完全列" がある。ここで $\widehat{\Gamma}$ は Γ の双対アーベル群、H は G, G^τ に共通のコンパクト量子群である。

$$1 \longrightarrow \widehat{\Gamma} \leftrightarrows H \xrightarrow{\phi^\bullet} G^\bullet \longrightarrow 1$$

(なお古典的な場合と異なり、$H \cong \widehat{\Gamma} \times G^\bullet$ とは限らないことを注意しておく。)

このとき各全射 ϕ, ϕ^τ の押し出しと引き戻しにより、KK^H を経由する KK^G と KK^{G^τ} の間の関手が構成できる。

さらに適切な補正項を追加することで、圏同値 $\mathrm{KK}^G \simeq \mathrm{KK}^{G^\tau}$ が得られる。しばしば G と G^τ の表現圏は異なるため、これは従来の枠組みだけからは期待できない "不自然な" 圏同値であり、興味深いものである。また、このこと (およびその証明) から次が従う。

系 3

以上の状況の下で、G, G^τ それぞれの双対離散量子群 $\widehat{G}, \widehat{G^\tau}$ の間で次の性質が保たれる。

(1) torsion-free 性の離散量子群への類似。

(2) Baum–Connes 予想の離散量子群への類似。

この特別な場合として、Voigt [3] による $\widehat{SU_q(2)}$ に対する Baum–Connes 予想の類似の $q < 0$ の場合の別証明や、コンパクトで連結かつ単連結なリー群の twist の双対離散量子群に対する Baum–Connes 予想の類似などが得られる。

参考文献

[1] J. Bichon, S. Neshveyev, M. Yamashita. Graded twisting of categories and quantum groups by group actions. *Ann. Inst. Fourier.*, 66(2016), no.6, 2299–2338.

[2] A. De Rijdt, N. Vander Vennet. Actions of monoidally equivalent compact quantum groups and applications to probabilistic boundaries. *Ann. Inst. Fourier.*, 60(2010), no.1, 169–216.

[3] C. Voigt. The Baum–Connes conjecture for free orthogonal quantum groups. *Adv. Math.*, 227(2011), no.5, 1873-1913.