ラフ微分方程式の数値解析

植田健人
東京大学大学院数理科学研究科　数理科学専攻　修士 2 年

問題設定

σ を拡散項、b をドリフト項とするラフ微分方程式 (RDE)

$$dy_t = \sigma(y_t)dB_t + b(y_t)dt \tag{1}$$

に対し、ミルシュタイン法の誤差分布およびそれに伴う R の値を決定することが本研究の主眼である。

- 非整数ブラウン運動 (fBm:fractional Brownian motion)
  n 次元非整数ブラウン運動とは、パラメータとしてハースト指数 $H(0 < H < 1)$ を持ち、

$$E[B_t^{(j)}B_s^{(k)}] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})\delta_{jk} \tag{2}$$

  によって分布が決定される n 次元ガウス型確率過程 $\{B_t^{(k)}\}_{1\le k\le n}$ である。
  今回は 1 次元の場合を考える。
- ミルシュタイン法
  上記のラフ常微分方程式の解 y_t に対する近似解 $\hat{y}_t^{(m)}$ を次のように帰納的に定める。
  $q = \lfloor 1/H \rfloor, \mathcal{D}f = f'\sigma, \tau_k^m = 2^{-m}k, \tau_k^m < t \le \tau_{k+1}^m$ として、

$$\begin{aligned}\hat{y}_t^{(m)} &= \hat{y}_{\tau_k^m}^{(m)} + \sum_{l=1}^{q}\frac{1}{l!}\mathcal{D}^{l-1}\sigma(\hat{y}_{\tau_k^m}^{(m)})B_{\tau_k^m,t}^{l} + b(\hat{y}_{\tau_k^m}^{(m)})(t-\tau_k^m)\\ &\quad + \frac{1}{2}(\sigma b' + \sigma' b)(\hat{y}_{\tau_k^m}^{(m)})2^{-m}B_{\tau_k^m,t}\end{aligned} \tag{3}$$

- 誤差分布
  次の極限が存在し、0 でないときに、その極限のことを誤差分布という。

$$\lim_{m\to\infty} 2^{mR}(\hat{y}_\cdot^{(m)} - y_\cdot) \ in\ law \tag{4}$$

  ただし、法則収束 (law) はより強い収束、たとえば確率収束 (probability) となることもある。

RDE の解について

- ラフ微分方程式 (1) の解を定義するために、ラフパス $\mathbf{B}$ を次のように定める。

$$\mathbf{B} = (1, \mathbb{B}_{s,t}^{(1)}, \cdots \mathbb{B}_{s,t}^{(q)}) = \left(1, B_{s,t}, \cdots, \frac{1}{q!}B_{s,t}^{q}\right) \tag{5}$$

- このとき次を満たす連続関数 y_t が一意的に存在しこれを (1) の解とする。($\mathcal{D}f = f'\sigma$)

$$y_t = y_s + \mathcal{D}\sigma(y_s)\mathbb{B}_{s,t}^{(1)} + \cdots + \mathcal{D}^q\sigma(y_s)\mathbb{B}_{s,t}^{(q)} + b(y_s)(t-s) + o(|t-s|) \tag{6}$$

一般のラフパスとは

$0 < \alpha \le 1/2, \Delta_T = \{(s,t)|0 \le s \le t \le T\}, q = \lfloor 1/\alpha \rfloor$ として、テンソル代数 $T^q(R^d) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^d \oplus \cdots \oplus (\mathbb{R}^d)^q$ 上の積を

$$\begin{aligned}&(a_0, \cdots, a_q)\cdot(b_0, \cdots, b_q)\\ &= \left(a_0b_0, a_0b_1 + b_0a_1, a_0b_2 + a_1\otimes b_1 + a_2b_0, \cdots, \sum_{i=0}^{q} a_i \otimes b_{q-i}\right)\end{aligned} \tag{7}$$

と定める。このとき α-ヘルダーラフパスとは、$\mathbf{X} : \Delta_T \to T^q(\mathbb{R}^d)$ であって、

1. 第一成分が 1 である。
2. $\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_{s,u}\mathbf{X}_{u,t}$
3. $\mathbf{X} = (1, X_{s,t}, \mathbb{X}^{(2)}, \cdots, \mathbb{X}^{(q)})$ とする。任意の k に対して、

$$\|\mathbb{X}^{(k)}\|_{k\alpha} = \sup_{0\le s<t\le T}\frac{|\mathbb{X}_{s,t}^{(k)}|}{|t-s|^{k\alpha}} < \infty \tag{8}$$

を満たすものを指す。

- 上記のラフパスはこの条件を満たす。

ラフ微分方程式の数値解析

植田健人
東京大学大学院数理科学研究科　数理科学専攻　修士 2 年

主結果

$0 < H < 1/2$ とする。

$$J_t = \exp\left(\int_0^t \sigma'(y_t)dB_t + \int_0^t b'(y_t)dt\right)$$

$$\phi_1 = -\frac{q!!}{(q+1)!}\mathcal{D}^q\sigma \qquad \phi_2 = \frac{(q+1)!!}{(q+2)!}((q+2)(\mathcal{D}^q\sigma)\sigma' + q\mathcal{D}^{q+1}\sigma)$$

$$\phi_3 = -\frac{1}{1+2H}\left(\frac{1}{2}(\sigma'\sigma)'b + H(b'\sigma)'\sigma\right) - \left(\frac{1}{1+2H} - \frac{1}{2}\right)((\sigma b' - \sigma' b)\sigma)'$$

として、

$$2^{m((q+1)H-1)}(\hat{y}_t^{(m)} - y_t) \xrightarrow{p} \begin{cases} J_t \int_0^t J_s^{-1}\phi_1(y_s)ds & q : odd \\ J_t \int_0^t J_s^{-1}\phi_2(y_s)ds & q : even, H < 1/q \\ J_t \int_0^t J_s^{-1}(\phi_2 + \phi_3)(y_s)ds & q : even : H = 1/q \end{cases} \tag{9}$$

となり、いずれも誤差分布を求めることに成功した。
$H \geq 1/2$ の場合については、先行研究ですでに解決している。

ハースト指数と fBm の性質について

本研究では q の偶奇によって誤差分布の振る舞いが変化した。
これは Hermite variation という理論に基づく $B_{s,t}^q$ の q の偶奇によるふるまいの違いによるもので、このことは Hermite Variation のことがわかっていれば自然である。
しかしながら、RDE の振る舞いとしては q の偶奇によって値が変化するということは考えにくい。
これは fBm の定性的な性質が $H < 1/2, H = 1/2, H > 1/2$ で大きく異なるためである。
一方、ラフパスの近似に関して、$q \leq 4$ かどうかで折れ線近似が有効かどうかが異なるなどの性質があり、これが Hermite variation と独立に誤差分布に影響を与える可能性はある。
この性質は 1 次元では関係ない。

先行研究

- ラフ微分方程式の誤差分布には多数の先行研究が存在する。
- 以下に先行研究との結果を比較する。なお、$\sigma, b \in C_b^n$ とし、n は十分大きいものとする。
- 最下段が本研究の成果である。

論文	解法	次元	b	σ	H
Neuenkirch-Nourdin2007	E	1	あり	任意	$H > 1/2$
Gradinaru-Nourdin2009	M	1	なし	$\inf \lvert\sigma\rvert > 0$	任意
Naganuma2015	CN	1	なし	$\inf \lvert\sigma\rvert > 0$	$H > 1/3$
Hu-Liu-Nualart2016	mE	任意	あり	任意	$H > 1/2$
Liu-Tindel2019	mE	任意	あり	任意	$H > 1/3$
Aida-Naganuma2020	CN	1	あり	$\inf \lvert\sigma\rvert > 0$	$H > 1/3$
Aida-Naganuma2021+	CN	任意	あり	任意	$H > 1/3$
U.	M	1	あり	任意	任意

- 解法の E はオイラー法、mE は修正オイラー法、M はミルシュタイン法、CN はクランク-ニコルソン法である。
- なお、修正オイラー法のことをミルシュタイン法ということもある。
- 本研究は Na2015,A-Na2020,A-Na2021+を参考にし、とくに主要部分は A-Na2021+の拡張である。
- 一方で、結果の類似する G-No2009 の証明法とは全く異なる。
- 結果としては解法によって誤差分布は全く異なるふるまいをするが、証明法としては次元、ドリフト項 b, 拡散項 σ, ハースト指数 H といった条件に大きく左右される。
- その意味で、1 次元とはいえドリフト項 b が存在しハースト指数 H が一般の場合の誤差分布を定義するには A-Na2021+の手法に大幅な拡張を加える必要があった。
- 誤差分布ではなく収束率という点を重視するならば、fBm のみではなく一般のガウス型ラフパスに関して考えることができる。
- しかしながら、任意のハースト指数の fBm の場合を含む結果は (知る限り) まだ発表されておらず、その意味でも実用的に意味のある結果であるといえる。
- 特に、ラフボラティリティの分野では $H \approx 0.1$ 程度という低いハースト指数のモデルが現実に適合することが知られているため、この分野への応用が期待される。

ラフ微分方程式の数値解析

植田健人
東京大学大学院数理科学研究科　数理科学専攻　修士 2 年

ラフ常微分方程式についての注釈

- RDE の解について
  RDE の解を定義する方法は Gubinelli の方法と Davie の方法があり、1 枚目で説明したのは Davie の方法である。
  どちらもラフパスを出発点とするが、Gubinelli は一般にラフ積分を定め、その特別な場合として RDE の解を定めたのに対して、Davie は最初に RDE の解を定め、解に対してのみラフ積分を定めている。
  ラフ微分方程式の解という意味ではどちらの解も同値である。
- ラフ積分について
  (1) は伊藤確率微分方程式がそうであるのと同様に、次のようなラフ積分方程式で書き表すことができる。
  右辺第一項はラフ積分と呼ばれ、確率積分に相当する積分であるが、ブラウン運動に対する確率積分とは定義が異なる。
  Gubinelli の方法ではこれが RDE の定義であり、Davie の方法ではこれがラフ積分を定める。

$$y_t = \int_0^t \sigma(y_t)dB_t + \int_0^t b(y_t)dt \tag{10}$$

- ラフパスについて
  確率過程を連続関数に値をとる確率変数とみなした時の実際の値をサンプルパスという。
  ラフパスとは fBm のようなマルチンゲール性を持たない確率変数に対し確率積分を定義できるように、かつ、サンプルパスごとに確率積分が定義できるように考え出されたものである。
  ラフパスの $\mathbb{R}^d$ 成分は確率過程のサンプルパスを意識している。
  ラフパスの $(\mathbb{R}^d)^k$ 成分はサンプルパスのサンプルパスによる (k-1) 重積分を意識している。
  1 ページ目の定義を見てわかるように、ラフパスはサンプルパスのヘルダー連続性に応じて定義され、ヘルダー連続性が低いほど定義が複雑になる。
  ハースト指数 H の fBm はそのサンプルパスが確率 1 で $(H-\epsilon)$-ヘルダー連続であるので、ハースト指数に応じて一律にラフパスが定義され、ハースト指数が低いほど解析が技術的に難しくなる。
  また、サンプルパスに対するラフパスは一意ではない。
  今回用いたラフパスは 1 次元の場合にのみ定義されるストラトノビッチラフパスといい、確率積分のストラトノビッチ積分という。

fBm の応用

fBm は一見人工的で特異な確率過程であるように見えるが、fBm は多くの現象のモデルに用いられている。その一例を以下に述べる。

- 数理ファイナンス
  もっとも単純にはブラック-ショールズ方程式

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{11}$$

  のように、確率微分方程式で株価を表すモデルは複数存在する。
  これらのモデルにおいて、ボラティリティσ を駆動する確率過程をブラウン運動からハースト指数の小さい fBm(おもに多次元) に切り替えたラフ・ボラティリティモデルが実際の株価変動をよりよく表すことが知られている。
- 待ち行列理論
  通信網において通信経路が何らかの機器を中継し、その前後で同期していないとき、機器にデータを一時的に記憶する必要がある。
  機器からデータを送るスピードが一定であるものとして、入力がある確率過程に従うものとする。
  ポアソン過程を考えることもあるが、fBm の自己相似性から fBm を入力量の確率過程として考えるモデルがある。
  このとき機器に必要な記憶領域は

$$V_t = \sup_{s\leq t}((m-C)(t-s) + \sqrt{am}B_{s,t}) \tag{12}$$

  となる。m は平均入力量、C は出力量、a は分散定数としている。
  このときハースト指数は $H \geq 1/2$ を想定している。
- 異常拡散現象
  マクロレベルで観測される拡散現象において、粒子は通常ブラウン運動に従うことが観測され、その結果粒子の軌跡の平均二乗変位は時間 t に対して線形である。
  しかしながら、ミクロレベルでは時間 t に対して t^α $(0<\alpha<1)$ というべき指数の形をとる拡散現象が細胞近傍や高分子溶液、土壌中などの環境で確認されている。
  通常の拡散現象が拡散方程式を用いて表されるように、この異常拡散現象を非整数階微分を用いた非整数階拡散方程式によってあらわすことができる。
  これらの拡散現象に対し通常の拡散過程に対するブラウン運動のようなミクロレベルの運動は、非整数ブラウン運動 $(H<1/2)$ になる。
  離散的には連続時間ランダムウォークを用いて異常拡散を再現することができる。

ラフ微分方程式の数値解析

植田健人
東京大学大学院数理科学研究科　数理科学専攻　修士２年

本研究の意義

- なぜ確率微分方程式を考えるのか
  確率微分方程式とは最も端的には微分方程式にランダムな項を付け加えたものとされる。
  正確には、時間発展を表す微分方程式 $\partial_t u(t) = b(u, \partial_x u, \cdots, \partial_x^n u, t, x)dt$ の右辺に、時間変化するランダムな項 $\sigma(u, \partial_x u, \cdots, \partial_x^n u, t, x)dB_t$ を付け加えたものを指す。
  特に x が現れない方程式を確率常微分方程式、現れる方程式を確率偏微分方程式といい、本研究では確率常微分方程式を考える。
  ランダムな項の意味は、基本的に微視的な要因によって現れるためその値を予測することができない代わりに統計的な状態を予測できるような作用である。
- なぜ fBm を考えるのか
  通常の微分方程式では、ランダムな項はブラウン運動によって駆動されるものを考える。
  ブラウン運動の特徴付けとして、初期値が 0 であり、連続であり、増分 $B_t - B_s$ が時刻 s 以前の値と独立であり、その増分が正規分布に従うというものがある。
  正規分布は中心極限定理から現れるということも考えると、これらの性質すべてがランダムな作用のモデル化にしばしば求められる望ましい性質であるといえる。
  さらにスケールフリー性、すなわちタイムスケールを拡大縮小してもその分布が保たれるという望ましい性質も導かれる。
  fBm はブラウン運動ではないので上記の性質すべてを満たすことはできないが、
  $B_t - B_s$ の独立性以外の条件はすべて満たす。
  独立性を満たさない理由を考えるよりは、実際にモデルが観測された事象をよく表すということが重要である。
- なぜミルシュタイン法を考えるのか
  ミルシュタイン法は常微分方程式におけるテイラー法に相当する解法であり、確率常微分方程式の数値解法において、もっとも単純に収束率を保証できる解法である。
  テイラー法はその単純性ゆえにそれ自体は研究の基礎として位置づけられ、ルンゲ-クッタ法や多段法を開発することが研究の対象となった。
  一方、RDE の複雑性ゆえにどのような数値解法であっても収束率を保証する証明法を考えることは決して容易ではない。
  それ故に、ミルシュタイン法を考えることが RDE の数値解法の研究において大きな意味を持つ。
  なお、修正オイラー法も収束率を得る手間はミルシュタイン法と変わらないが、ミルシュタイン法のほうが精度が高いうえ、ハースト指数によっては修正オイラー法は収束しない。

本研究の意義

- なぜ強近似を考えるのか
  実は数値解法には強近似と弱近似というものが存在する。真の解を X_t, 近似解を $X_t^{(m)}$ とすると、
  $X_t^{(m)}$ が強近似解であるとは、$C_m(X_t - X_t^{(m)}) \to 0$ となることをいう。収束は L^p 収束、概収束、確率収束のいずれの場合も考えることができ、C_m は m の関数で m の増大に伴い無限大に発散する。
  $X_t^{(m)}$ が弱近似解であるとは、本来は $X_t^{(m)}$ が X_t に分布の意味で収束する、すなわち任意の有界な連続関数 f に対し $E[f(X_t^{(m)})]$ が $E[f(X_t)]$ に収束することを指す。
  しかしながら、f に対し滑らかさの制限を掛ける場合もある。
  このとき強近似は弱近似を兼ねる。
  一方で、少なくともブラウン運動の場合には強近似法の理論的限界精度よりも高い精度の弱近似法が存在する。
  そのうえで強近似を計算したい場合というのは、数理ファイナンスで解がモデルに合うか確かめたい時のように解の軌道をシミュレーションしたい場合である。
  一方で弱近似を考える場合というのは基本的に平均値や期待値、数理ファイナンスにおけるグリークスなど、$E[f(X_t)]$ を計算したい場合である。
- なぜ誤差分布を考えるのか
  確率微分方程式の数値解法に関する研究としては、

  1. 数値解法が収束するか
  2. 収束先は真の解か
  3. 収束率はどの程度か
  4. 収束率の上限において誤差の上界下界はどの程度か
  5. 誤差分布は何か

  という段階が存在し、番号の大きいものは小さいものを兼ねる。
  このうち実用上必要になるのは 3 と 4 であり、5 は必要ない。
  そのうえで 5 を考えるのは純粋な数学的興味からであり、そこには「まだ計算できることが残っている」という以上の数学的現象が存在する。
  具体的には、fBm とは独立なブラウン運動による確率積分が誤差分布に現れることがあり、この場合誤差分布は分布収束の形の極限としてしか現れない。
  これが誤差分布と呼ぶ所以である。
  また、誤差分布はハースト指数によって異なる形をとる。
  本研究では予想通りそのような項は現れなかったが、先行研究のブロックで紹介されている修正オイラー法やクランク-ニコルソン法などではそのような項が現れる。
  これらの性質を指して中心極限定理に類似すると呼ぶことがある。