

方程式の解の爆発と4次元の幾何学

今野北斗（東京大学）

2024 年11月23日

2024年度公開講座 「爆発の数学」

今日のお話のプラン

- (1) 連続法（方程式を連続的に解く）：アイデア
- (2) 具体例
- (3) 4次元幾何学への応用

今日のお話のプラン

(1) 連続法（方程式を連続的に解く）：アイデア

(2) 具体例

(3) 4次元幾何学への応用

連続法（方程式を連続的に解く）

やりたいこと:

何か解きたい方程式 (☆) があったとする. これを以下のような方法で解くことを考える.

ステップ1: 明らかに解を持つ方程式 (☆)' を用意する.

ステップ2: 明らかに解を持つ方程式 (☆)' から本当に解きたい方程式 (☆) までを, 連続的なパラメータ t ($0 \leq t \leq 1$) で結ぶ.

ステップ3: 「方程式が解ける」という性質を, パラメータ t に沿って, $t = 0$ から「伝播」させる. もし $t = 1$ まで無事に伝播すれば, 元々解きたかった方程式 (☆) が解ける!

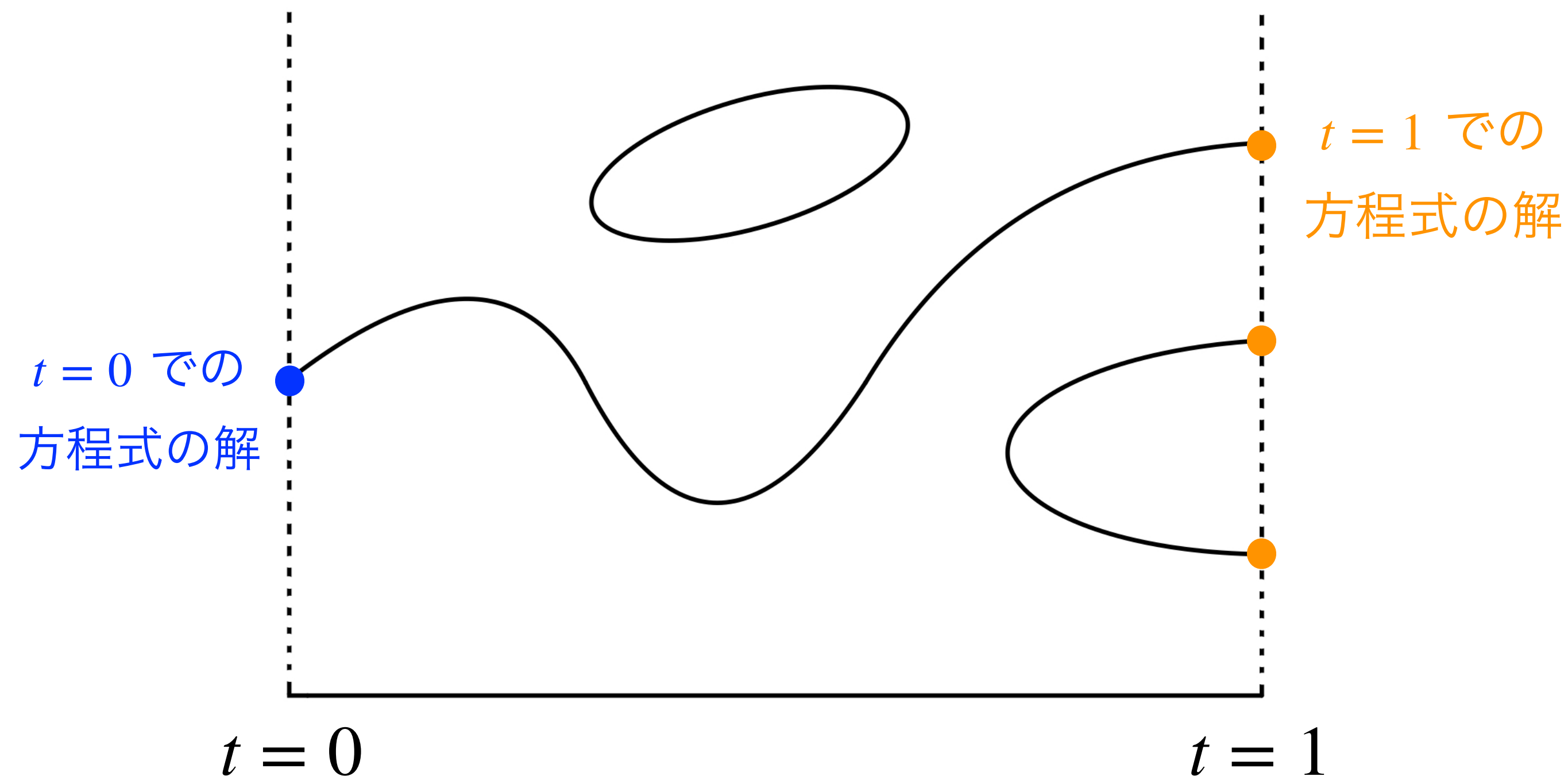
このような証明法を「**連続法**」という. 謂わば, 「数学的帰納法の連続版」である.

解の伝播が上手くいくとき, いかないとき

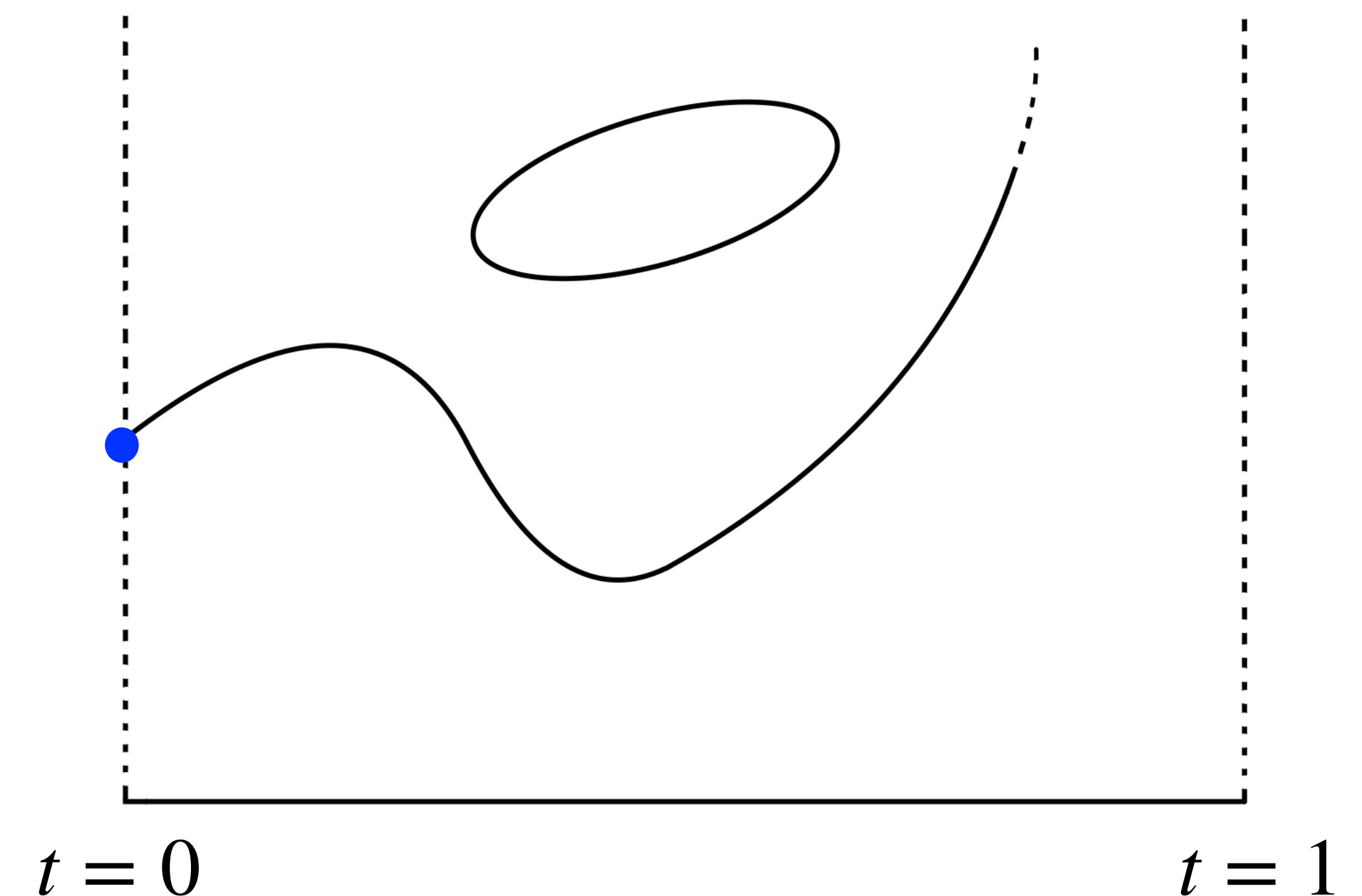
まとめ (連続法):

解があると分かっている方程式 ($t = 0$) から解きたい方程式 ($t = 1$) まで, 解を伝播させる.

伝播が上手くいっているとき



伝播が上手くいっていない例



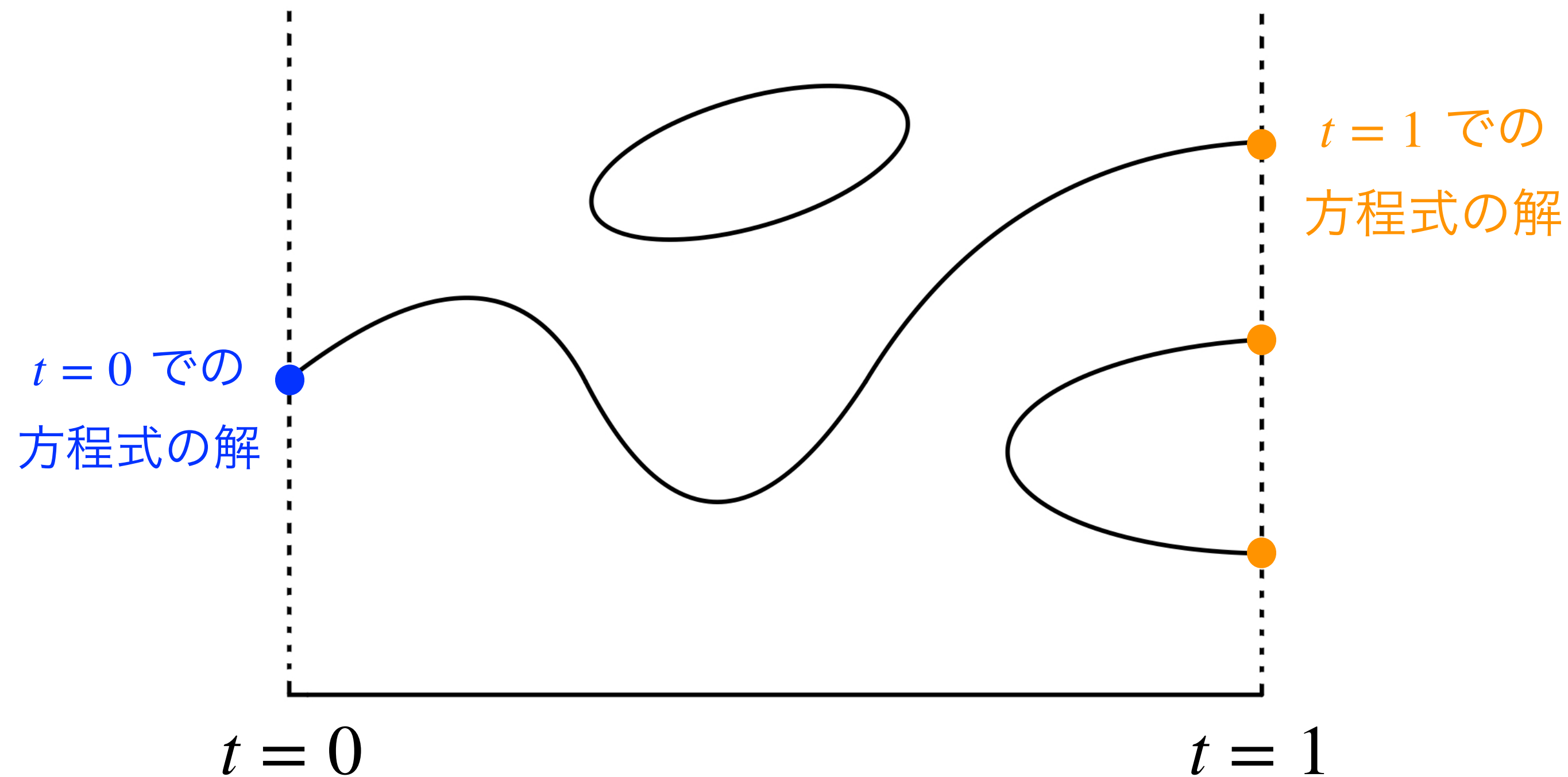
解が爆発してしまい, $t = 1$ まで届かない!

解の伝播が上手くいくとき, いかないとき

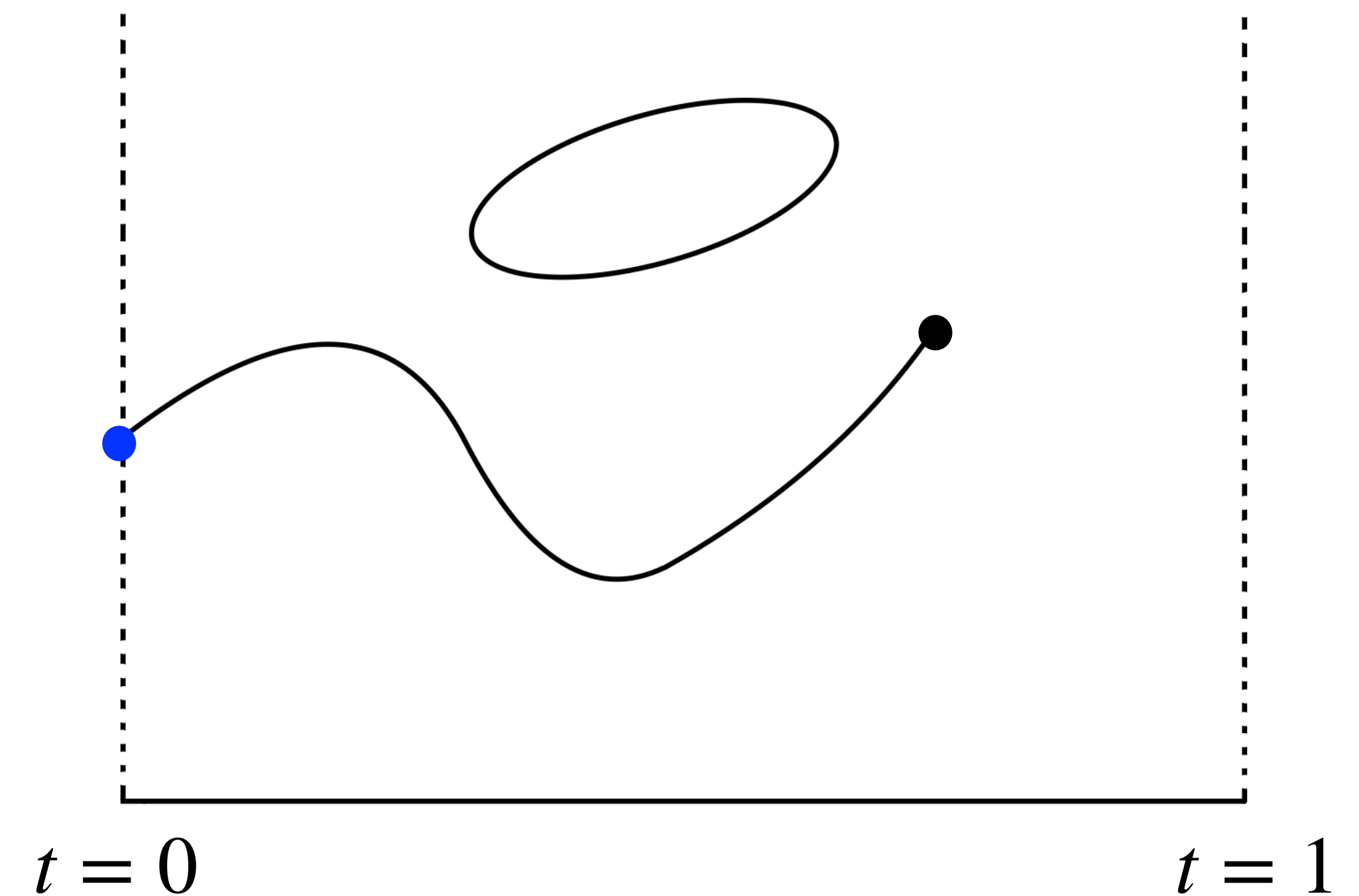
まとめ (連続法):

解があると分かっている方程式 ($t = 0$) から解きたい方程式 ($t = 1$) まで, 解を伝播させる.

伝播が上手くいっているとき



伝播が上手くいっていない別の例



解が途切れてしまい, $t = 1$ まで届かない!

解の伝播が上手くための条件

ここまでのまとめ:

解があると分かっている方程式から解きたい方程式まで、解を伝播させたい。

以下の二つの条件が満たされることが必要である。

1. 解が爆発しない。
2. 解が途切れない。

厳密に書いてみると… $t \in [0,1]$ に対して, $(Eq : t)$ をパラメータ t のついた方程式たちとする。 $(Eq : 0)$ が解けていて, $(Eq : 1)$ が解きたい方程式とする。

上の一つ目の条件を厳密に書いてみると：

1. 区間 $[0,1]$ 内の列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ がある点 $t_{\infty} \in [0,1]$ に収束したとする。もし各 i に対して $(Eq : t_i)$ が解を持つなら, $(Eq : t_{\infty})$ も解を持つ。

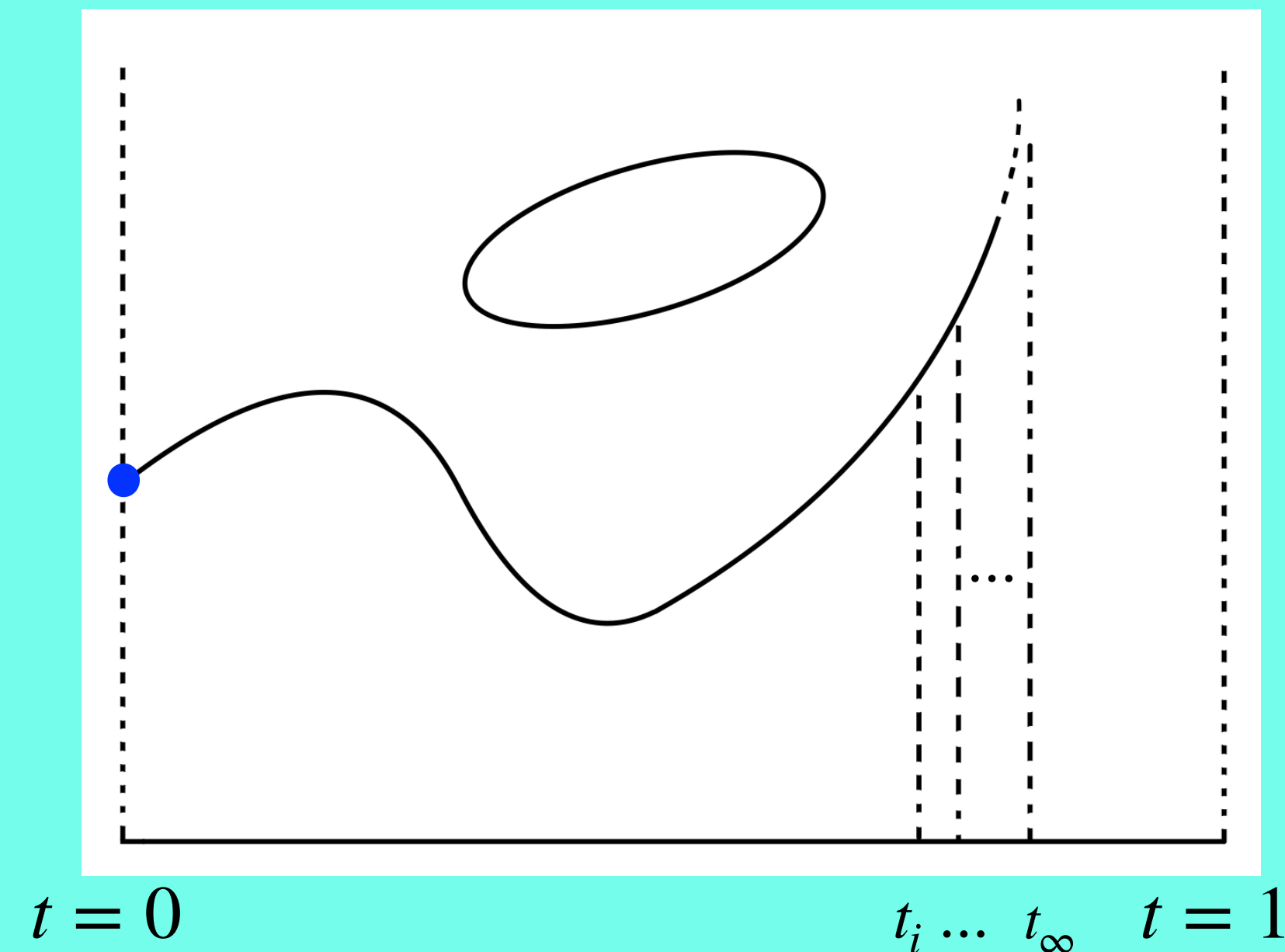
解の伝播が上手くための条件

ここまでのまとめ:

解があると分かっている方程式から解を得るためには、以下の二つの条件が満たされることが必要である。

1. 解が爆発しない。
2. 解が途切れぬ。

爆発する状況：



厳密に書いてみると... $t \in [0,1]$ に対して, $(Eq : t)$ をパラメータ t のついた方程式たちとする. $(Eq : 0)$ が解けていて, $(Eq : 1)$ が解きたい方程式とする.

上の一つ目の条件を厳密に書いてみると：

1. 区間 $[0,1]$ 内の列 $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ がある点 $t_\infty \in [0,1]$ に収束したとする. もし各 i に対して $(Eq : t_i)$ が解を持つなら, $(Eq : t_\infty)$ も解を持つ.

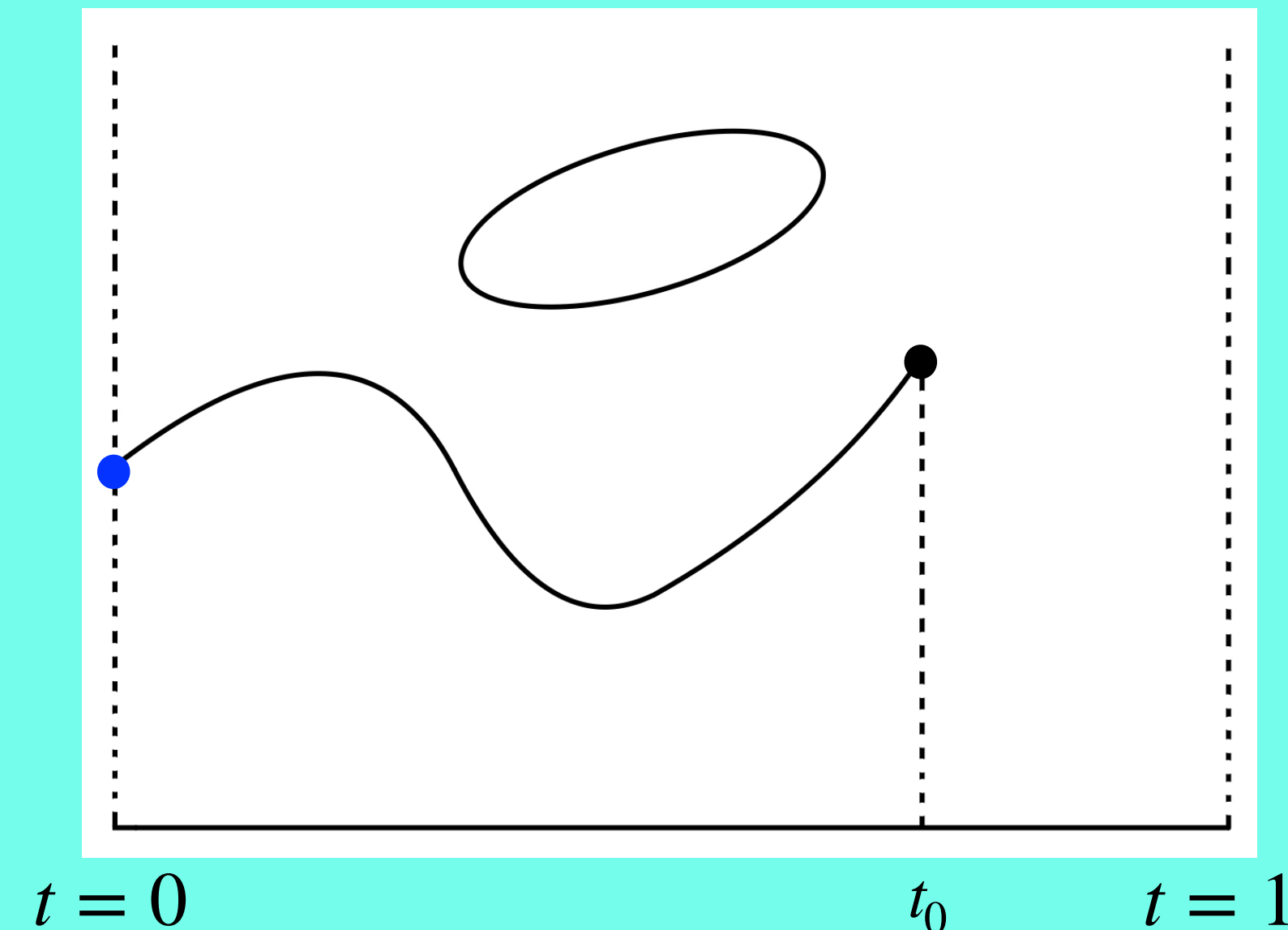
解の伝播が上手くための条件

ここまでのまとめ:

解があると分かっている方程式
以下の二つの条件が満たされる

1. 解が爆発しない.
2. 解が途切れない.

解が途切れる状況:



厳密に書いてみると… $t \in [0,1]$ に対して, $(Eq : t)$ をパラメータ t のついた方程式たちとする. $(Eq : 0)$ が解けていて, $(Eq : 1)$ が解きたい方程式とする.

上の二つ目の条件を厳密に書いてみると:

2. $t_0 \in [0,1]$ に対し, もし $(Eq : t_0)$ が解を持つなら, t_0 に十分近い全ての $t \in [0,1]$ に対して $(Eq : t)$ は解を持つ.

解の伝播が上手くための条件

ここまでのまとめ:

解があると分かっている方程式から解きたい方程式まで、解を伝播させたい。

以下の二つの条件が満たされることが必要である。

1. 解が爆発しない。
2. 解が途切れない。

事実+意欲的な方へのコメント: このように厳密に定式化すると、上の二つの条件は $t = 1$ まで解を伝播させるために必要かつ**十分である**ことを示すのは難しくない。

これは**位相空間論**の言葉を使うとすっきりと理解できる。 $S \subset [0,1]$ を、 $(Eq : t)$ が解を持つような t 全体のなす集合とする。 S は $t = 0$ を含んでいるから空集合ではない。

1. 「解が爆発しない」ことは S が**閉集合**ということに対応する。
2. 「解が途切れない」ことは S が**開集合**ということに対応する。

すると、 $[0,1]$ が**連結**という事実から、 $S = [0,1]$ 、特に $1 \in S$ ($t = 1$ で解がある)と分かる。

今日のお話のプラン

(1) 連続法（方程式を連続的に解く）：アイデア

(2) 具体例

(3) 4次元幾何学への応用

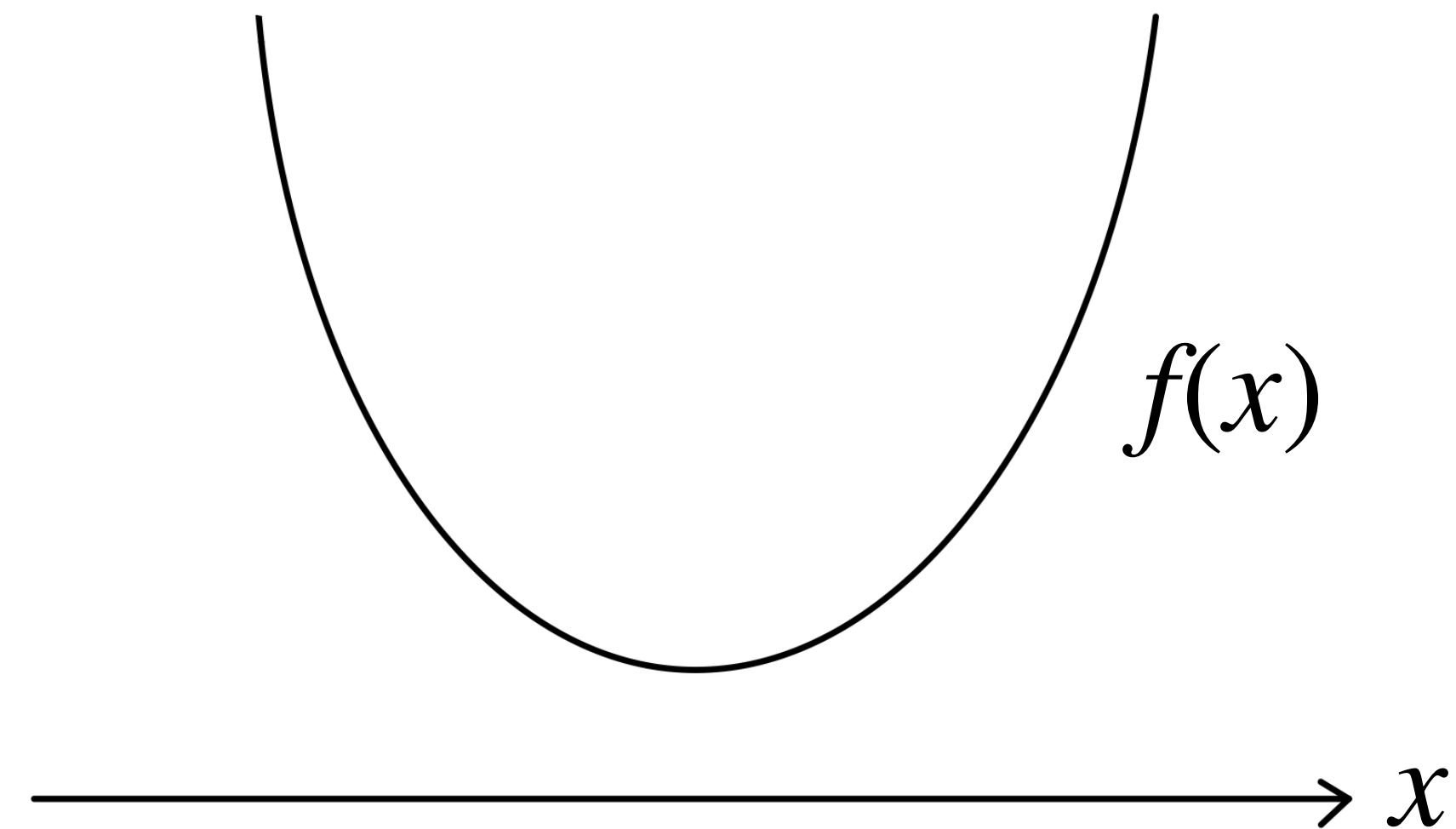
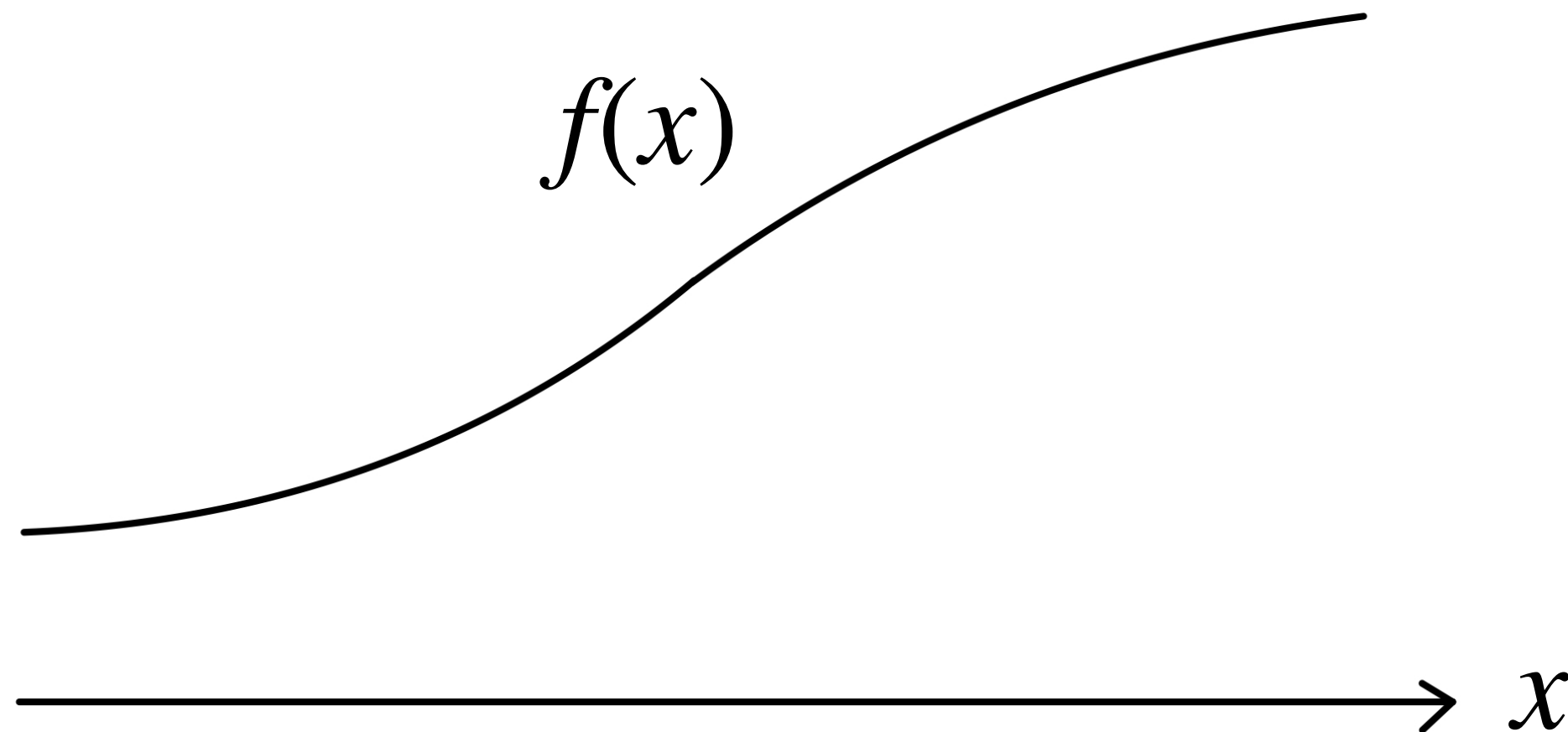
解いてみたい方程式

次の方程式を解くことを考える（4次元幾何学のために本当に考えたいもののトイ・モデルになっている）：

やりたいこと： [記号： $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする.]

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 $f(x) = 0$ という方程式が解けるための十分条件を見附けたい.

もちろん、この方程式が解けない f はいくらでもある.



方程式が解けるための十分条件

やりたいこと: [記号: $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする.]

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $f(x) = 0$ という方程式が解けるための十分条件を見付けたい.

以下では f が $\mathbb{R}$ 上で (何回でも) 微分可能と仮定しておく.

定理: 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が次の二条件を満たしているとする:

1. ある正の実数 $C > 0$ が存在し, $|x| \leq C(|f(x)| + 1)$ が全ての実数 x に対して成り立つ.
2. 導関数 f' を考えると, $f'(x) \neq 0$ が全ての実数 x に対して成り立つ.

このとき, 方程式 $f(x) = 0$ は解を持つ.

この定理の注目に値するところ: 関数 f の式が具体的に与えられていなくとも, f の満たす抽象的な性質だけから方程式が解けることがあることを定理は主張している. この定理により存在が保証される解も具体的な式で書けるものではない. (解が具体的に書ける二次方程式の解の公式のようなものと本質的に異なる.)

上の定理を**連続法**で証明しよう!

連続法ステップ0 (方程式の変形)

定理: 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が次の二条件を満たしているとする:

1. ある正の実数 $C > 0$ が存在し, $|x| \leq C(|f(x)| + 1)$ が全ての実数 x に対して成り立つ.
2. 導関数 f' を考えると, $f'(x) \neq 0$ が全ての実数 x に対して成り立つ.

このとき, 方程式 $f(x) = 0$ は解を持つ.

$t \in [0,1]$ に対し, 関数 $f_t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_t(x) = f(x) + (t - 1) \cdot f(0)$$

で定義する.

t をパラメータに持つ方程式の族

$$f_t(x) = 0$$

を考える. 明らかに $f_0(0) = 0$ だから, パラメータ $t = 0$ でこの方程式は解を持つ.

連続法ステップ0 (方程式の変形)

定理: 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が次の二条件を満たしているとする:

1. ある正の実数 $C > 0$ が存在し, $|x| \leq C(|f(x)| + 1)$ が全ての実数 x に対して成り立つ.
2. 導関数 f' を考えると, $f'(x) \neq 0$ が全ての実数 x に対して成り立つ.

このとき, 方程式 $f(x) = 0$ は解を持つ.

t をパラメータに持つ方程式の族

$$f_t(x) = 0$$

を考える. 明らかに $f_0(0) = 0$ だから, パラメータ $t = 0$ でこの方程式は解を持つ.

連続法によると, この方程式の族に対して,

1. 解が爆発しないこと
 2. 解が途切れないこと
- を示せば良いのだった.

連続法ステップ1 (解が爆発しないこと)

解が爆発しないとは、すなわち次を意味した：

区間 $[0,1]$ 内の列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ がある点 $t_{\infty} \in [0,1]$ に収束したとする．もし各 i に対して $f_{t_i}(x) = 0$ が解を持つなら， $f_{t_{\infty}}(x) = 0$ も解を持つ．

これを示すために，区間 $[0,1]$ 内の列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ がある点 $t_{\infty} \in [0,1]$ に収束し，各 i に対して $f_{t_i} = 0$ の解 x_i が存在したとしよう．

目標: 方程式 $f_{t_{\infty}}(x) = 0$ には，ある解 x_{∞} が存在することを示したい．

戦略: 数列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ の（部分列の）収束先として x_{∞} を作りたい．

どうなっているとまずいか？

連続法ステップ1 (解が爆発しないこと)

これを示すために、区間 $[0,1]$ 内の列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ がある点 $t_{\infty} \in [0,1]$ に収束し、各 i に対して $f_{t_i} = 0$ の解 x_i が存在したとしよう.

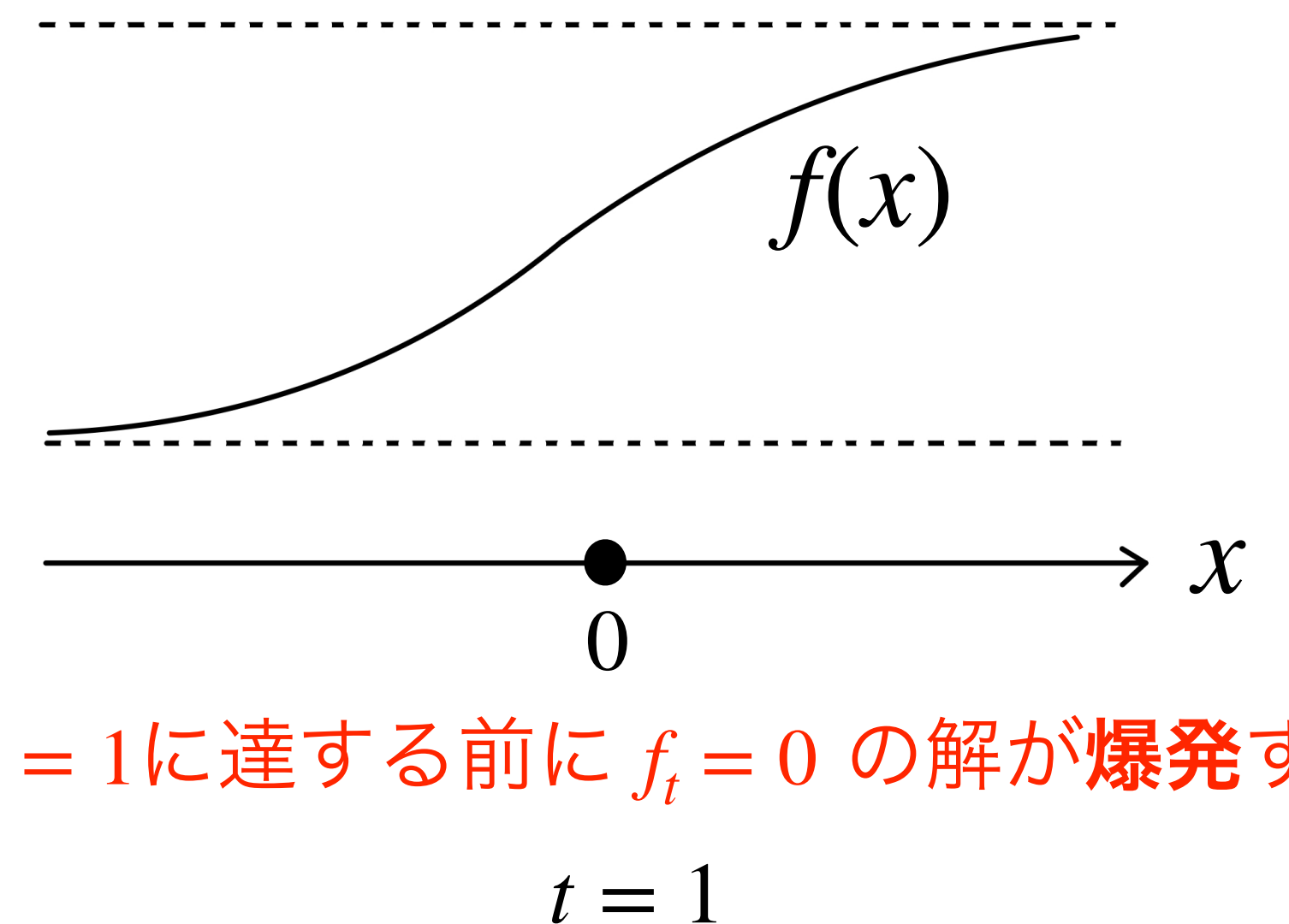
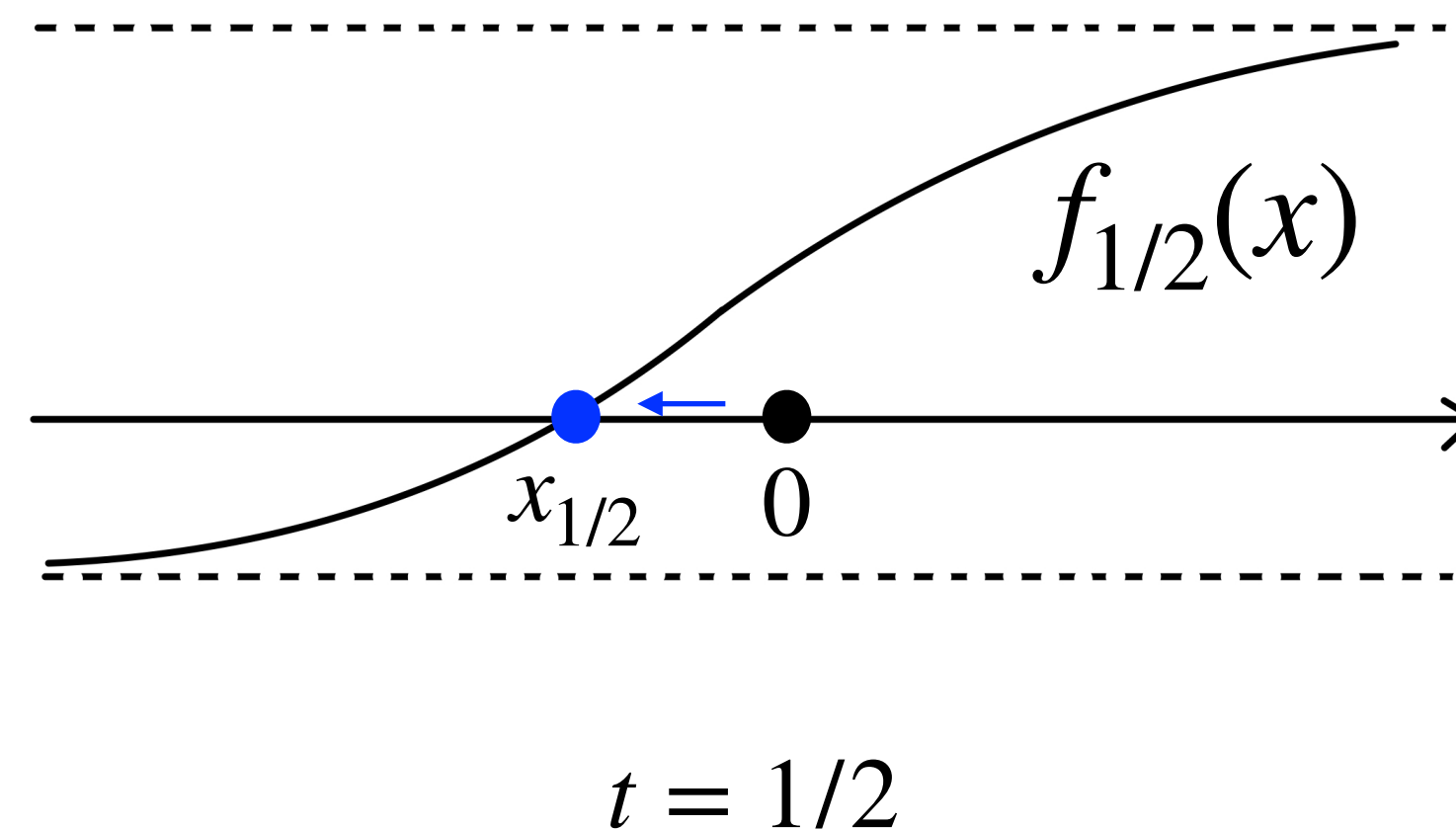
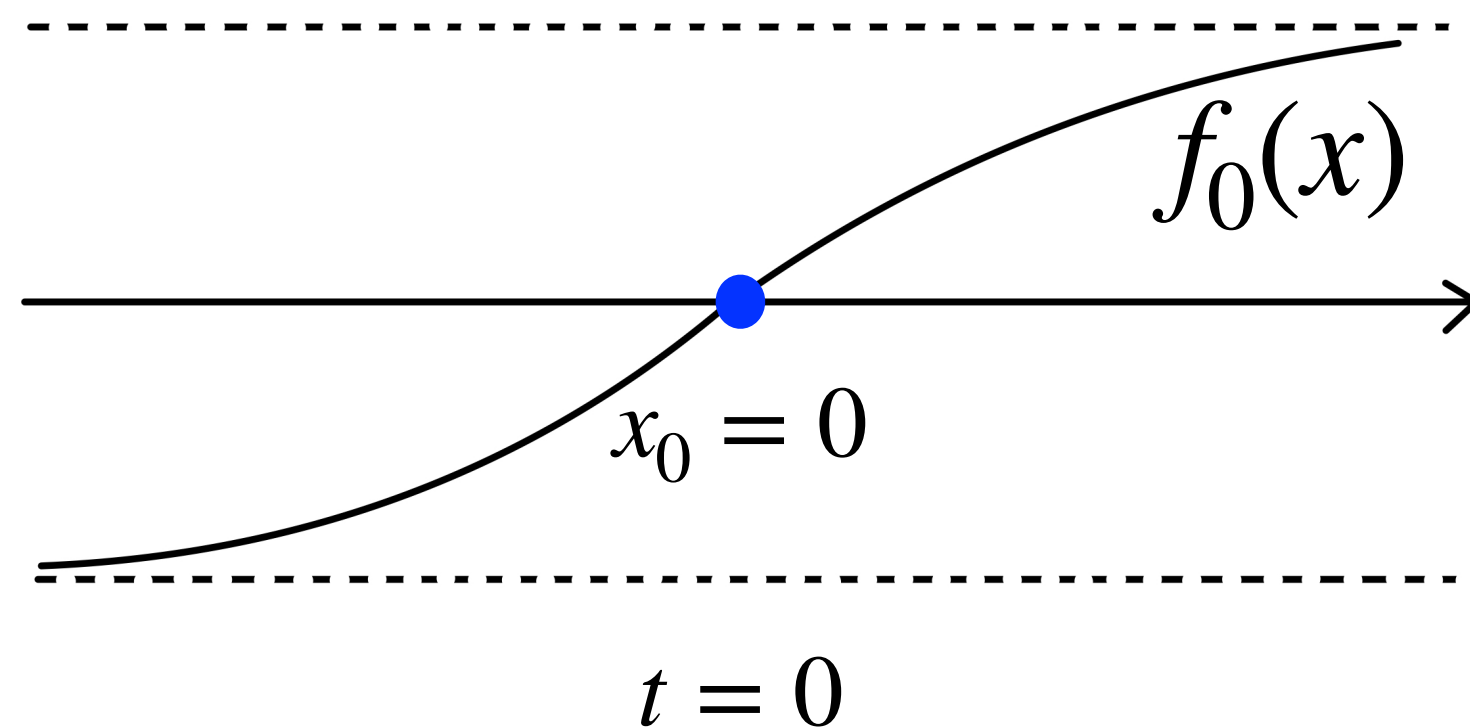
目標: 方程式 $f_{t_{\infty}}(x) = 0$ には、ある解 x_{∞} が存在することを示したい.

戦略: 数列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ の (部分列の) 収束先として x_{∞} を作りたい.

どうなっているとまずいか?

例: 下のような f (解を持たない)

$$f_t(x) = f(x) + (t - 1) \cdot f(0)$$



$t=1$ に達する前に $f_t = 0$ の解が爆発する

連続法ステップ1 (解が爆発しないこと)

これを示すために、区間 $[0,1]$ 内の列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ がある点 $t_{\infty} \in [0,1]$ に収束し、各 i に対して $f_{t_i} = 0$ の解 x_i が存在したとしよう.

目標: 方程式 $f_{t_{\infty}}(x) = 0$ には、ある解 x_{∞} が存在することを示したい.

戦略: 数列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ の (部分列の) 収束先として x_{∞} を作りたい.

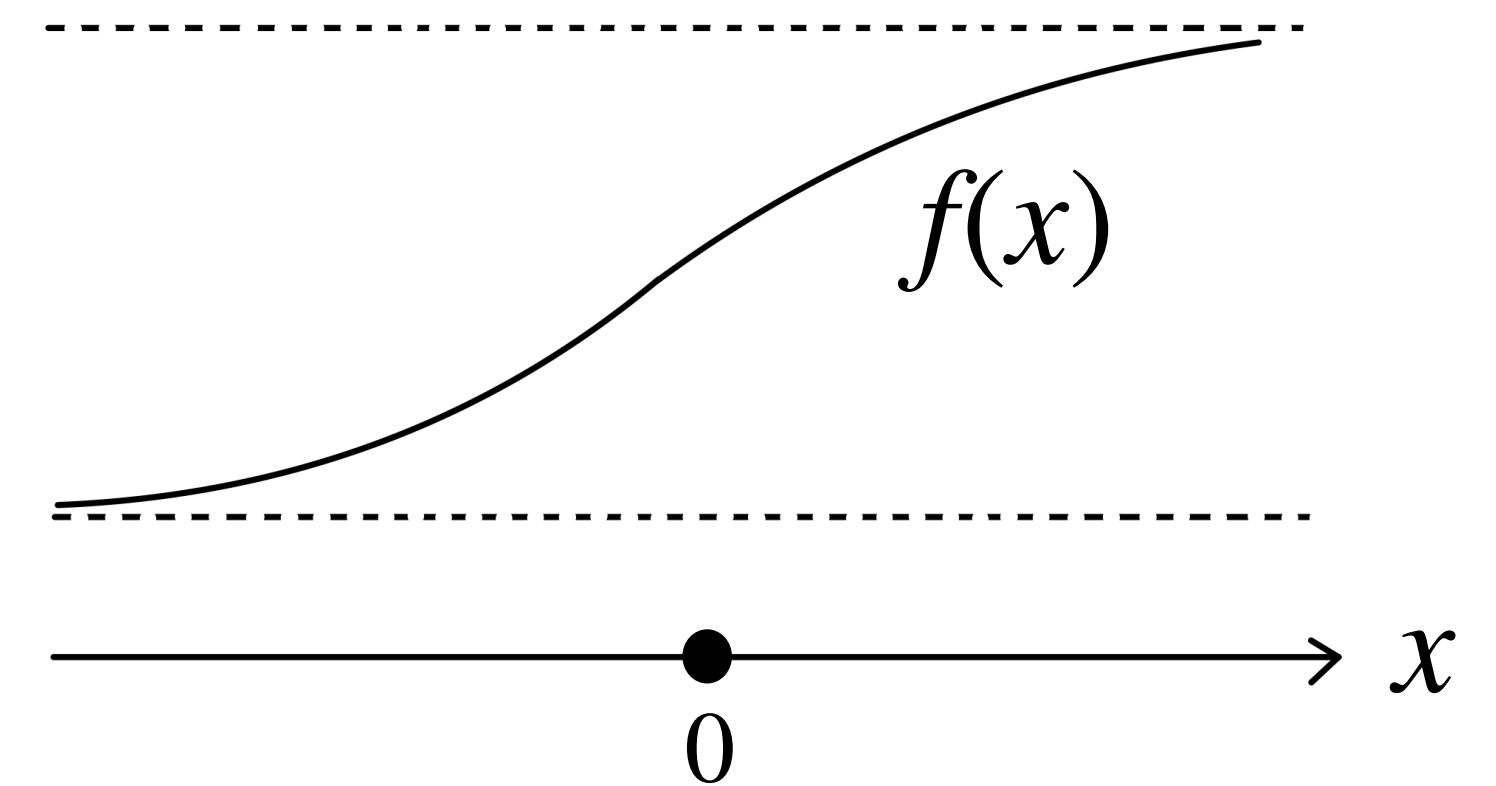
右のような例を排除するのが:

定理内の一つ目の仮定:

ある正の実数 $C > 0$ が存在し、 $|x| \leq C(|f(x)| + 1)$ が全ての実数 x に対して成り立つ.

右の f の例は確かにこの仮定を破っている: 実際、 f は**有界関数**だから、どんな定数 C に対しても $C(|f(x)| + 1)$ は有限の範囲しか動かない.

例: 下のような f (解を持たない)



$t = 1$ に達する前に $f_t = 0$ の解が**爆発**する

$t = 1$

連続法ステップ1 (解が爆発しないこと)

これを示すために、区間 $[0,1]$ 内の列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ がある点 $t_{\infty} \in [0,1]$ に収束し、各 i に対して $f_{t_i} = 0$ の解 x_i が存在したとしよう.

定理内の一つ目の仮定:

ある正の実数 $C > 0$ が存在し、 $|x| \leq C(|f(x)| + 1)$ が全ての実数 x に対して成り立つ.

この不等式のポイント:

実際に解があるかはまだ分からないが、もしあったとしたら有界、という評価（「**アプリアリ評価**」）

いま、 x_i は $f_{t_i} = 0$ の解だから、 $0 = f_{t_i}(x_i) = f(x_i) + (t_i - 1) \cdot f(0)$. よって $f(x_i) = (1 - t_i) \cdot f(0)$.

上の仮定と合わせて、 $|x_i| \leq C((1 - t_i)|f(0)| + 1) \leq C(|f(0)| + 1)$.

このように、 i に依らない数で押さえられた数列は、**部分列**を取ると収束すると知られている（キーワード：**実数の連続性**、**コンパクト性**）. すなわち：

上手く $0 < i_1 < i_2 < \dots$ を選ぶと、 $\{x_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ はある実数 x_{∞} に収束. 方程式 $f_{t_{i_j}}(x_{i_j}) = 0$ で

$j \rightarrow +\infty$ とすると、 $f_t(x)$ の t と x 両方への連続性から $f_{t_{\infty}}(x_{\infty}) = 0$. これが目標だった！

連続法ステップ2 (解が途切れないこと)

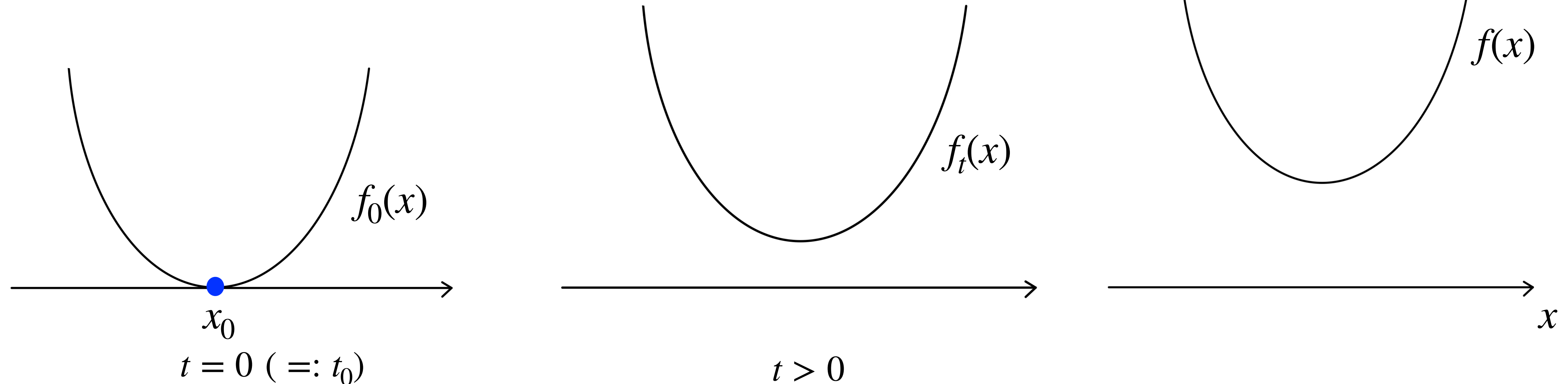
$t_0 \in [0,1]$ に対し, $f_{t_0}(x) = 0$ が解 x_0 を持つとする.

目標: t_0 に十分近い全ての $t \in [0,1]$ に対して $f_t(x) = 0$ は解を持つ.

どうなっているとまずいか?

例: 下のような f (解を持たない)

$$f_t(x) = f(x) + (t - 1) \cdot f(0)$$



どんなに $t > 0$ を小さくしても, $f_0 = 0$ の解が f_t に届かない! ($t = 0$ で途切れる)

連続法ステップ2 (解が途切れないこと)

$t_0 \in [0,1]$ に対し, $f_{t_0}(x) = 0$ が解 x_0 を持つとする.

目標: t_0 に十分近い全ての $t \in [0,1]$ に対して $f_t(x) = 0$ は解を持つ.

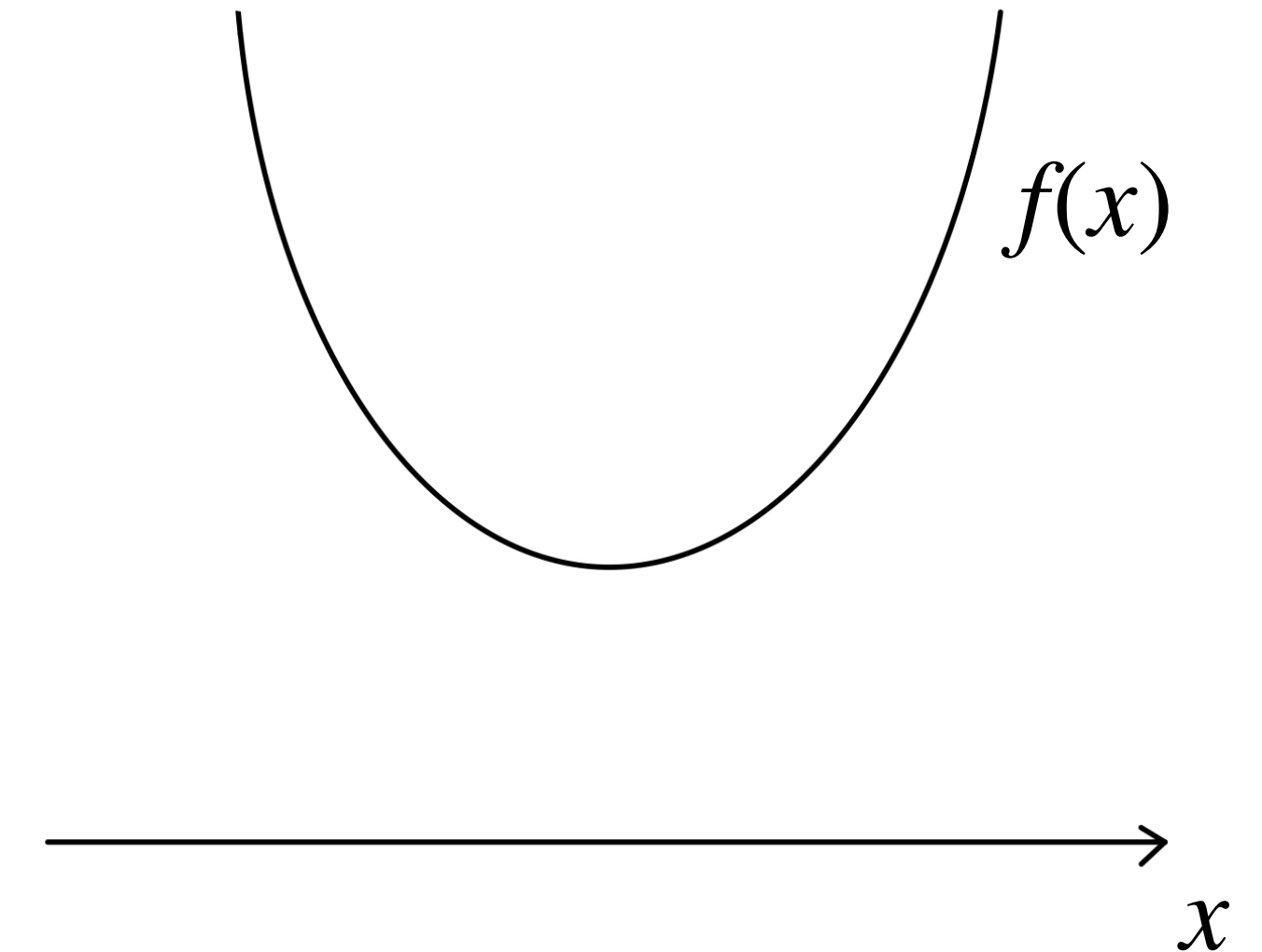
右のような例を排除するのが:

例: 下のような f (解を持たない)

定理内の二つ目の仮定:

導関数 f' を考えると, $f'(x) \neq 0$ が全ての実数 x に対して成り立つ.

この仮定を活かすには, 少し高級な定理が必要.



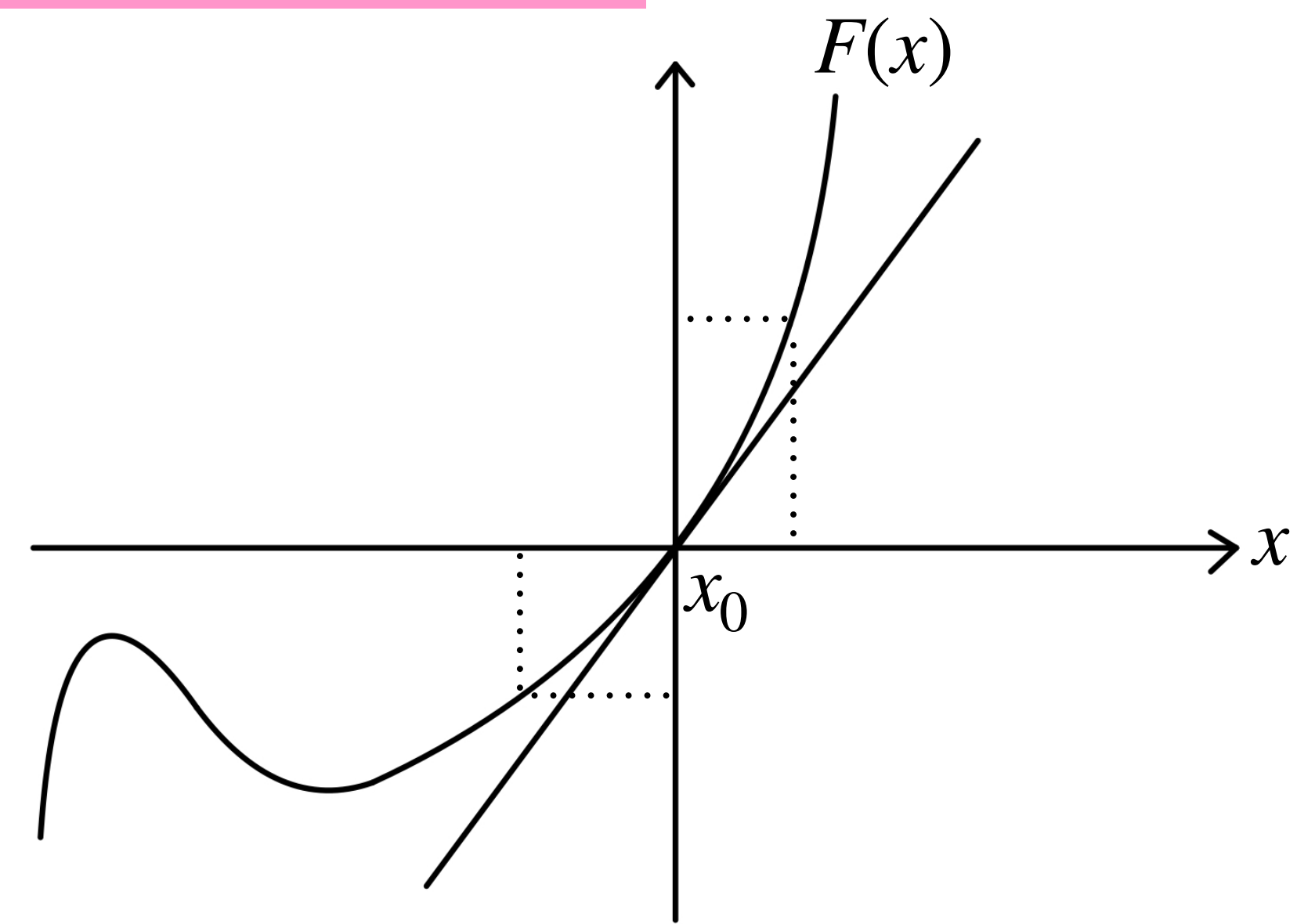
連続法ステップ2 (解が途切れないこと)

$t_0 \in [0,1]$ に対し, $f_{t_0}(x) = 0$ が解 x_0 を持つとする.

目標: t_0 に十分近い全ての $t \in [0,1]$ に対して $f_t(x) = 0$ は解を持つ.

定理内の二つ目の仮定:

導関数 f' を考えると, $f'(x) \neq 0$ が全ての実数 x に対して成り立つ.



道具 (逆関数定理): (微分可能で, 導関数も連続な) 関数 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が, 点 x_0 で $F'(x_0) \neq 0$ を満たすとする. このとき, F の定義域と値域を制限した関数 $F: (x_0 \text{ を含むある区間}) \rightarrow (F(x_0) \text{ を含むある区間})$ は逆関数を持つ.

連続法ステップ2 (解が途切れないこと)

定理内の二つ目の仮定:

導関数 f' を考えると, $f'(x) \neq 0$ が全ての実数 x に対して成り立つ.

道具 (逆関数定理): (微分可能で, 導関数も連続な) 関数 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が, 点 x_0 で $F'(x_0) \neq 0$ を満たすとする. このとき, F の定義域と値域を制限した関数 $F: (x_0 \text{ を含むある区間}) \rightarrow (F(x_0) \text{ を含むある区間})$ は逆関数を持つ.

上の仮定と, f_t の定義 $f_t(x) = f(x) + (t-1) \cdot f(0)$ から, どんな x, t に対しても $\frac{df_t}{dx}(x) \neq 0$. 故に逆

関数定理より, f_t の制限 $f_t: (x_0 \text{ を含むある区間}) \rightarrow (f_t(x_0) \text{ を含むある区間})$ (この値域の区間を I_t と置く) は逆関数を持つ. 実は, これらの区間は, t を連続的に動かすとき「連続的に動く」よう取れる (定量的版の逆関数定理). 故に, t が十分 t_0 に近ければ, I_t は I_{t_0} に十分近い. 特に, $0 = f_{t_0}(x_0)$ は I_t に含まれ, 特に $f_t(x) = 0$ は解を持つ. これが目標だった!

連続法証明完了

以上で、方程式の族に対して、

1. 解が爆発しないこと
2. 解が途切れないこと

を示せて、連続法が完了して、目標だった定理（再掲）が示せた。

定理: 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が次の二条件を満たしているとする：

1. ある正の実数 $C > 0$ が存在し、 $|x| \leq C(|f(x)| + 1)$ が全ての実数 x に対して成り立つ。
2. 導関数 f' を考えると、 $f'(x) \neq 0$ が全ての実数 x に対して成り立つ。

このとき、方程式 $f(x) = 0$ は解を持つ。

証明の特徴:

実際にどの実数 $x \in \mathbb{R}$ が解になるのかについては定理の証明は教えてくれない。

（抽象的な仮定だけから、抽象的に解があることだけ分かる！）

今日のお話のプラン

(1) 連続法（方程式を連続的に解く）：アイデア

(2) 具体例

(3) 4次元幾何学への応用

本当に解きたかった方程式：微分方程式

ここまで見てきた具体例は，次の状況のモデルだった：

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の代わりに，本当に考えたいのはある「関数」

$F: (\text{無限次元の空間}) \rightarrow (\text{無限次元の空間})$.

ここで出てくる無限次元の空間は，ある4次元空間の上の「関数全体のなす空間」

で， $F(\phi) = 0$ という方程式は，ある**微分方程式**として与えられる.

微分方程式とは，数ではなく関数が「未知数」の方程式で，方程式の中に関数の微分が入っているようなもの.

本当に解きたかった方程式：微分方程式

ここまで見てきた具体例は，次の状況のモデルだった：

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の代わりに，本当に考えたいのはある「関数」

$F: (\text{無限次元の空間}) \rightarrow (\text{無限次元の空間})$.

微分方程式の例: 関数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を「未知数」（普通は**未知関数**という）とする，

$\frac{d}{dx}\phi = \phi$ という方程式を考える．これに対応する F は次の通り：

$V = \{\mathbb{R}\text{上の（何回でも）微分可能な実数値関数 } \phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

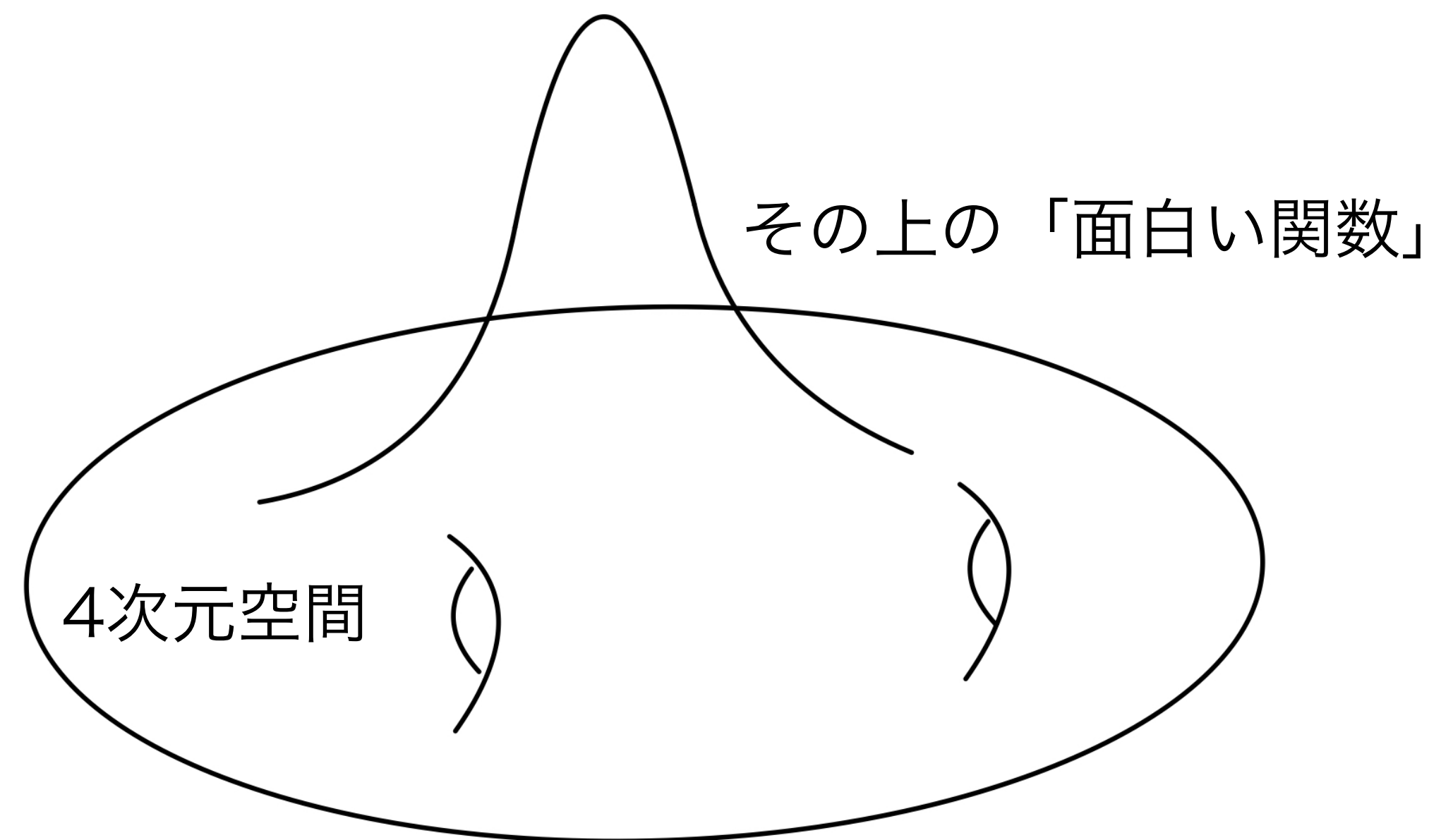
とおく． $F: V \rightarrow V$ を $F(\phi) = \frac{d}{dx}\phi - \phi$ で定義する．方程式 $F(\phi) = 0$ が上の微分方程式である．

この方程式の解は， $\phi(0) = 1$ という条件を課すと，指数関数 $\phi(x) = e^x$ になる．

このように，微分方程式を解くことはしばしば「面白い関数」を選び出すことになる．

4次元空間上の微分方程式

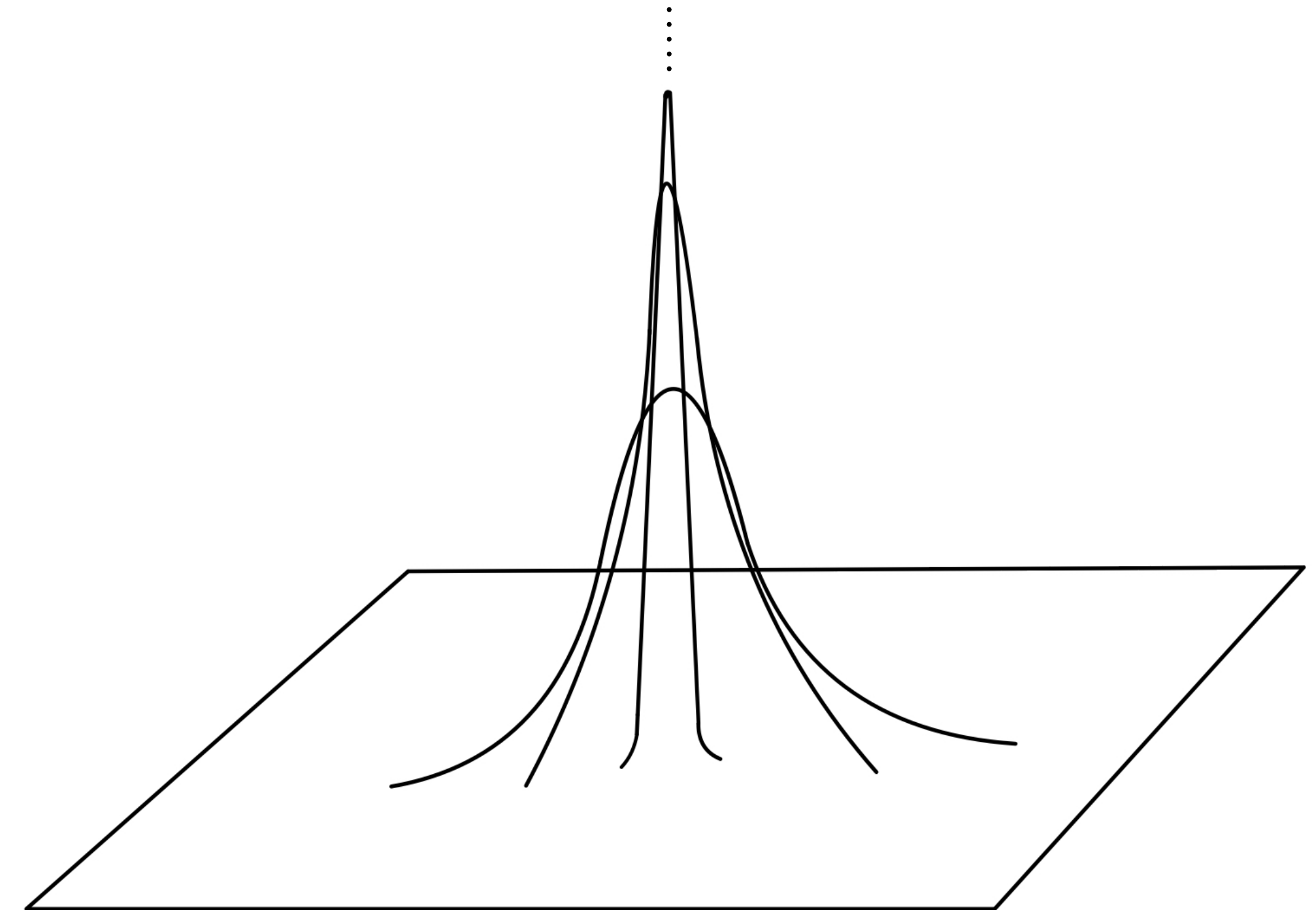
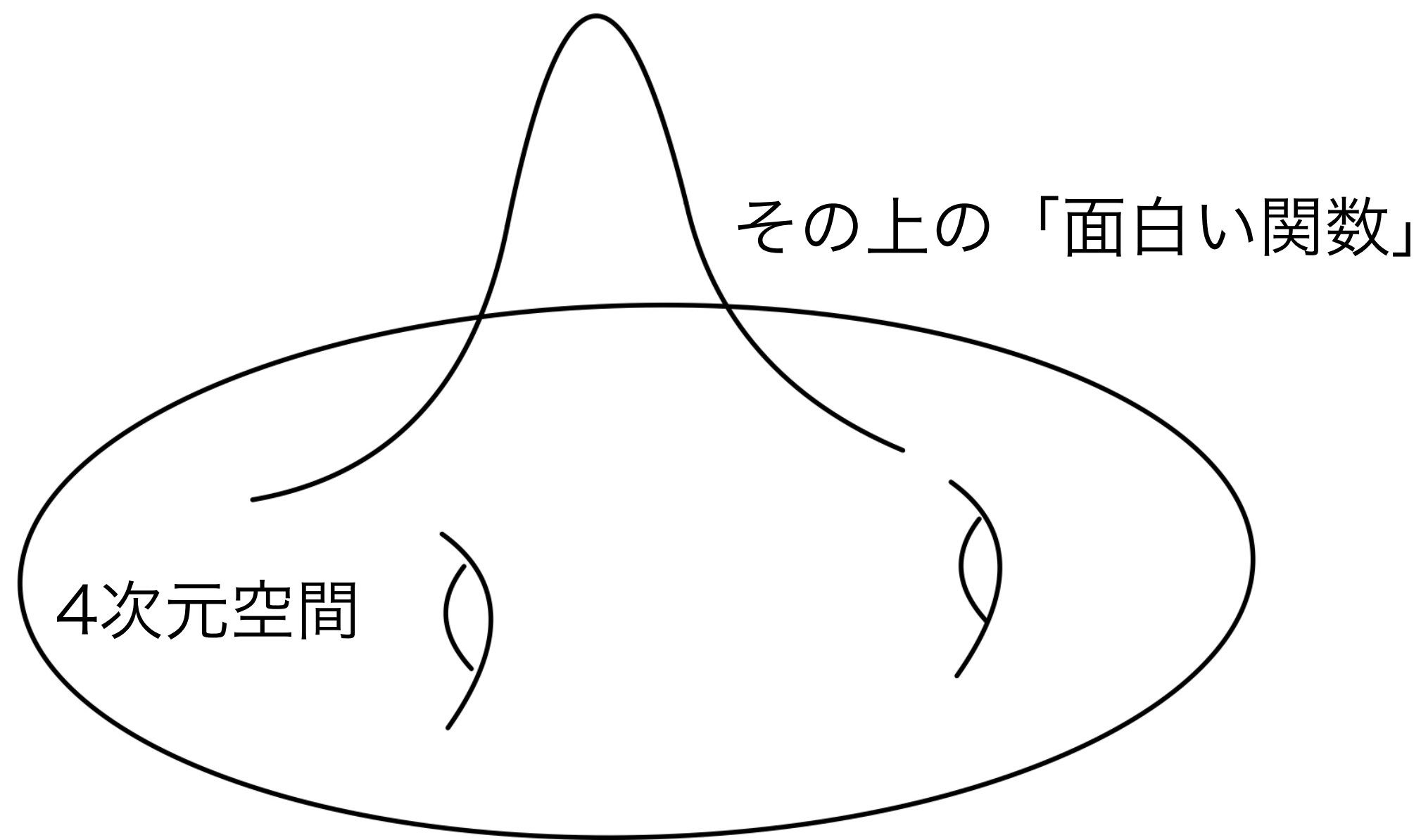
このように、微分方程式を解くことはしばしば「面白い関数」を選び出すことになる。4次元空間の上では、その上で定義される関数（もどき）に対する重要な微分方程式がいくつかある。その内のひとつ、**ASD方程式**の解は4次元空間の上の「面白い関数」で、その全てを集めると、4次元空間の形についての情報が得られる場合がある！そのような議論の一端を以下紹介する。



4次元空間上の微分方程式の解の爆発

4次元空間の上では、その上で定義される関数（もどき）に対する重要な微分方程式がいくつかある。その内のひとつ、**ASD方程式**の解は4次元空間上の「面白い関数」で、その全てを集めると、4次元空間の形についての情報が得られる場合がある！

この方程式の特徴: 解が**爆発**することがある。

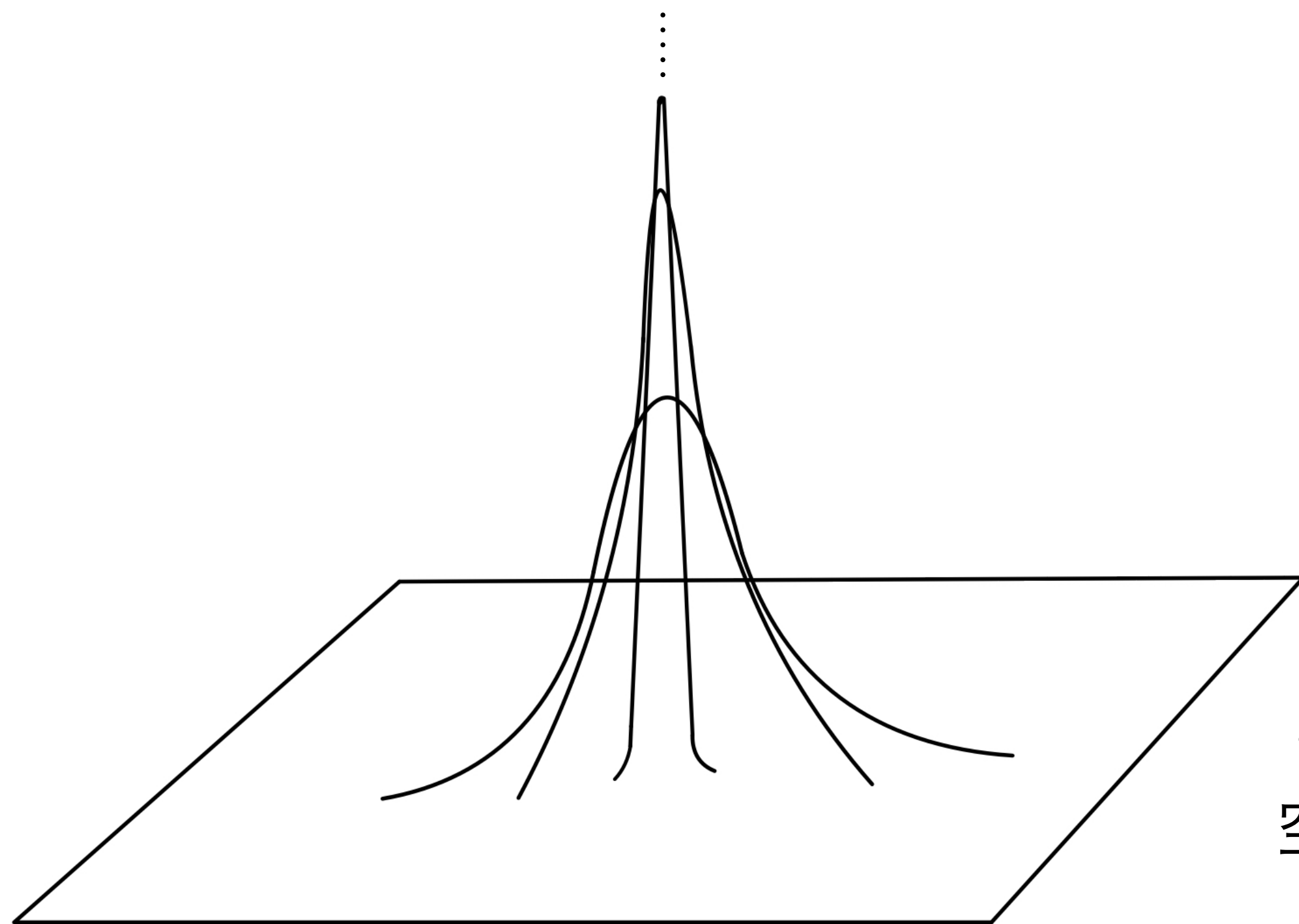


4次元空間上の微分方程式の解の爆発

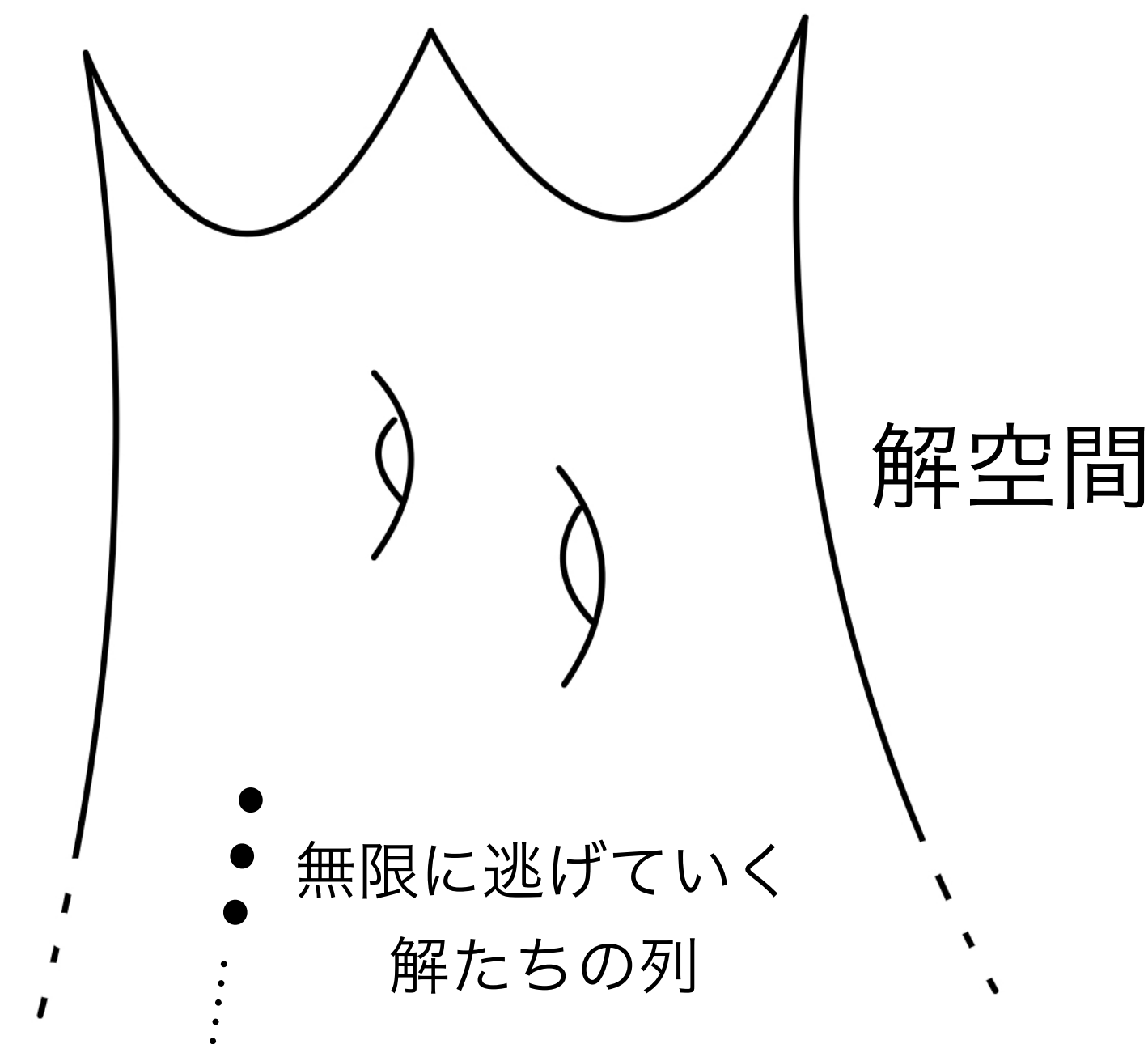
4次元空間の上では、その上で定義される関数（もどき）に対する重要な微分方程式がいくつかある。その内のひとつ、**ASD方程式**の解は4次元空間の上の「面白い関数」で、その全てを集めると、4次元空間の形についての情報が得られる場合がある！

この方程式の特徴: 解が**爆発**することがある。

したがって、解空間（解全体を集めた空間）は、有限的な大きさ（コンパクト）にならない。



このままでは、4次元空間の研究に応用するのは難しい！

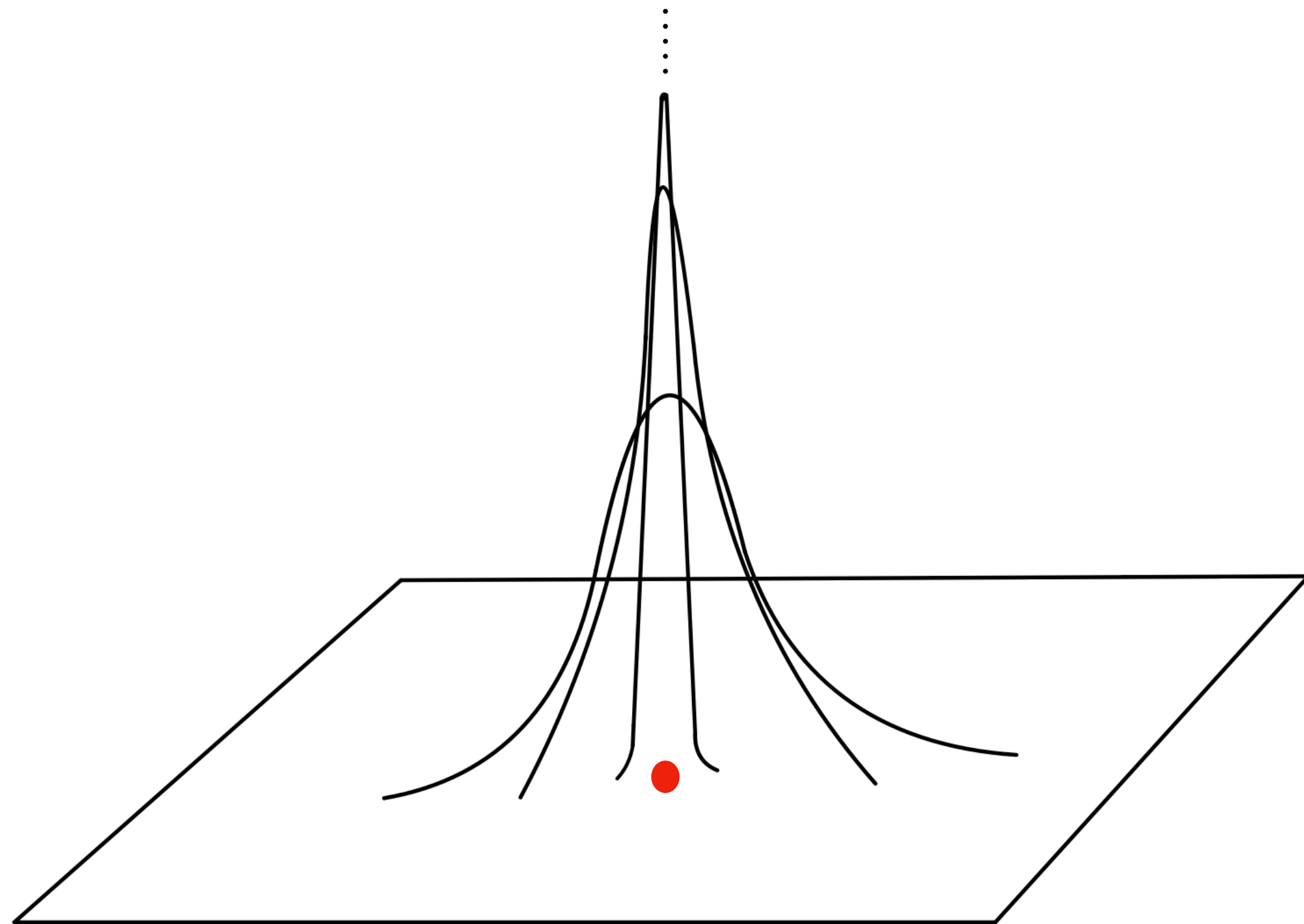


4次元空間上の微分方程式の解の爆発

4次元空間の上では、その上で定義される関数（もどき）に対する重要な微分方程式がいくつかある。その内のひとつ、**ASD方程式**の解は4次元空間上の「面白い関数」で、その全てを集めると、4次元空間の形についての情報が得られる場合がある！

この方程式の特徴: 解が**爆発**することがある。

爆発の解析: 実は、（適当な仮定の下）爆発していく解の列は、全て**4次元空間の中の1点**の近くに集中していくもので尽きることが分かる。



4次元空間上の微分方程式の解の爆発

4次元空間の上では、その上で定義される関数（もどき）に対する重要な微分方程式がいくつかある。その内のひとつ、**ASD方程式**の解は4次元空間上の「面白い関数」で、その全てを集めると、4次元空間の形についての情報が得られる場合がある！

この方程式の特徴: 解が**爆発**することがある。

爆発の解析: 実は、（適当な仮定の下）爆発していく解の列は、全て**4次元空間の中の1点**の近くに集中していくもので尽きることが分かる。

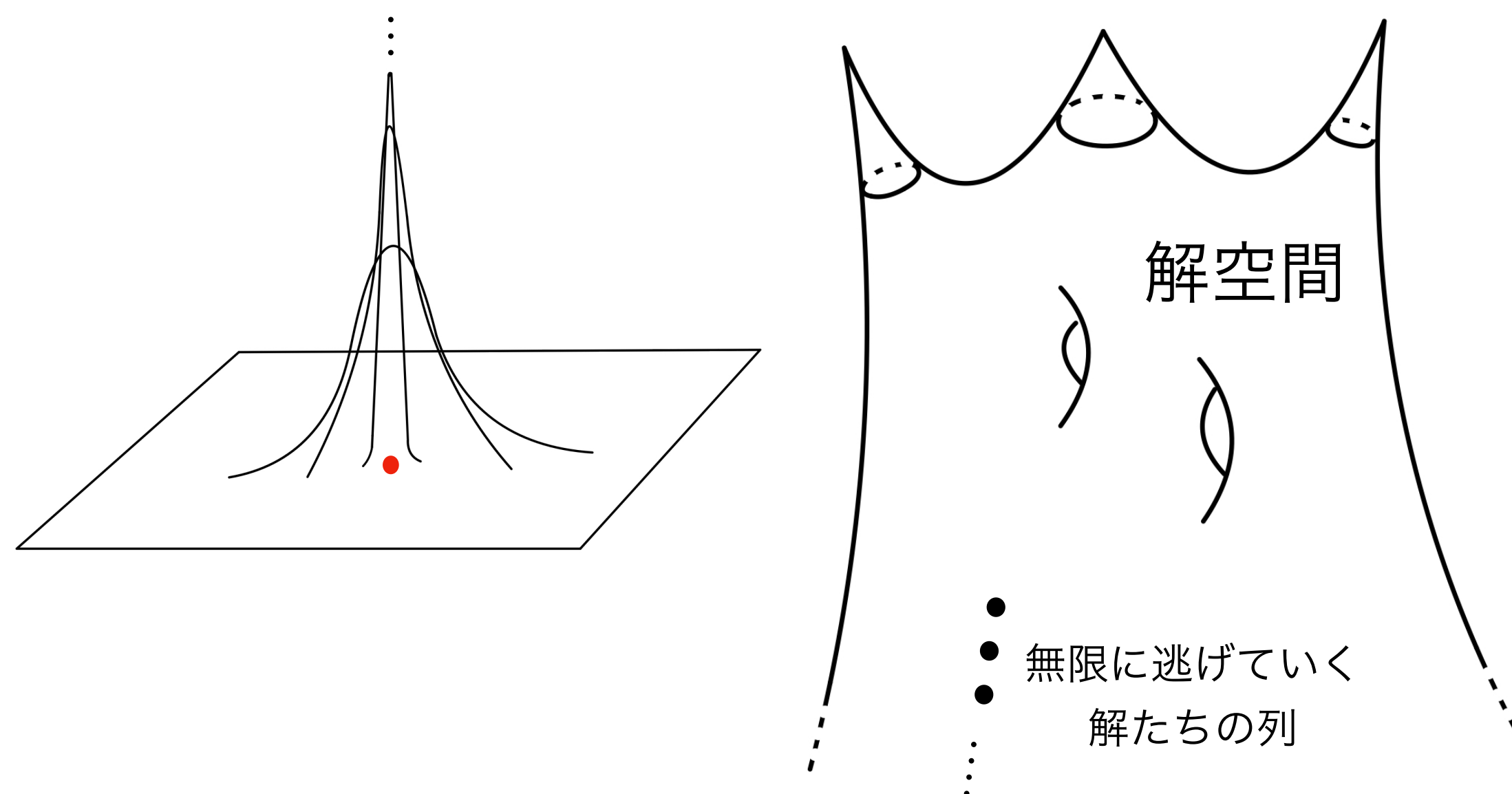
爆発の解析のポイント・連続法: 爆発の解析をするためには、爆発しかかっている解をこちらが作る必要がある。すなわち、ある状況下で微分方程式を解く必要がある。これは**連続法**で行われる。（微分方程式を、自明に解ける微分方程式に連続変形し、変形パラメータの途中で解が爆発しないことを示し、解が途切れなことを示す。）その鍵となる道具は、既に見たような**アプリアリ評価**と**逆関数定理**の無限次元版である。この方法で見つかる解は、やはり存在が抽象的に分かるだけで、全く式で書けない！

4次元空間上の微分方程式の解の爆発

4次元空間の上では、その上で定義される関数（もどき）に対する重要な微分方程式がいくつかある。その内のひとつ、**ASD方程式**の解は4次元空間上の「面白い関数」で、その全てを集めると、4次元空間の形についての情報が得られる場合がある！

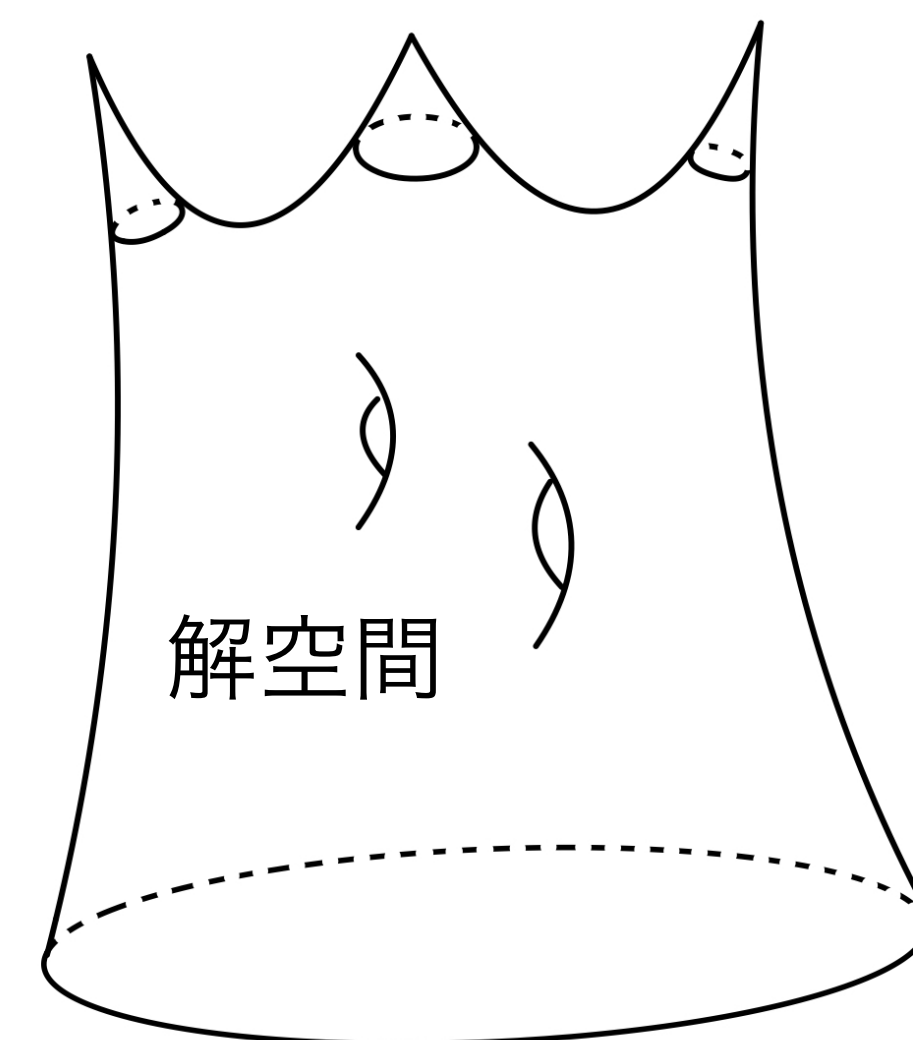
この方程式の特徴: 解が**爆発**することがある。

爆発の解析: 実は、（適当な仮定の下）爆発していく解の列は、全て**4次元空間の中の1点**の近くに集中していくもので尽きることが分かる。



「爆発していく点を覚えておく」ことで、元々の4次元空間を解空間の端に貼り付けて、有限的なサイズの空間を得ることができる。

元々の4次元空間



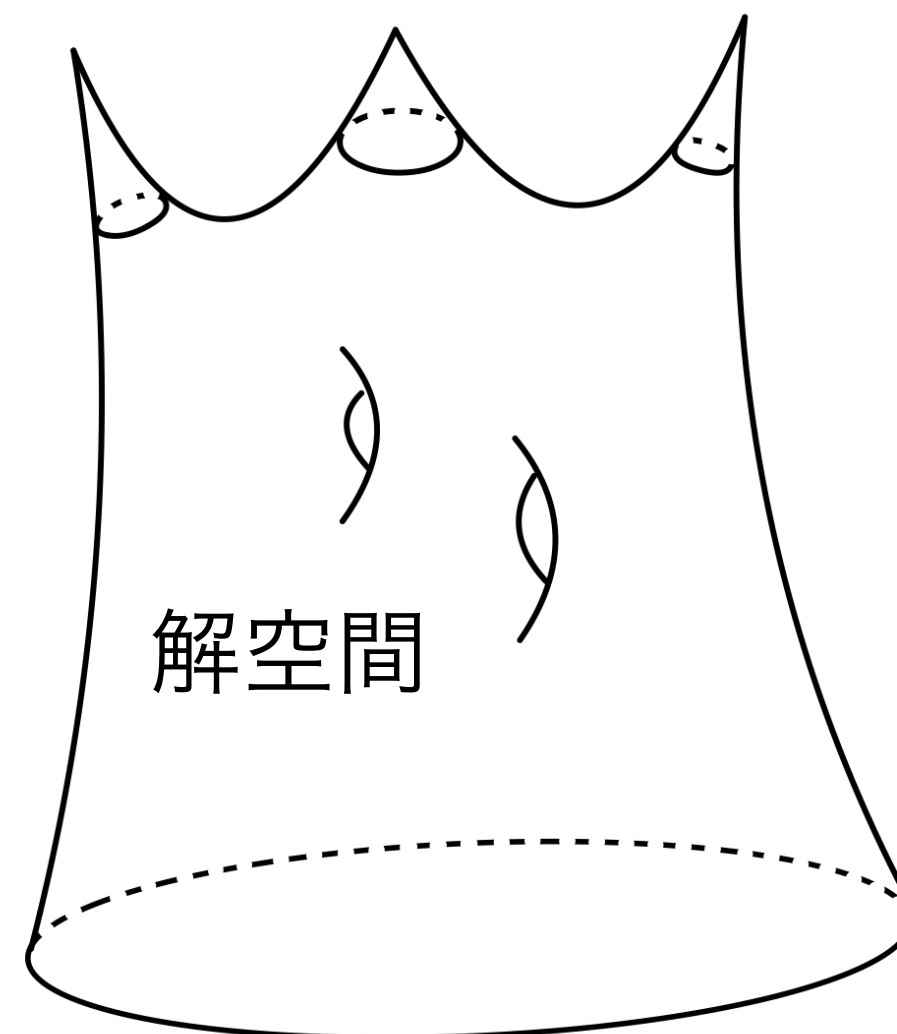
4次元空間上の微分方程式の解の爆発

4次元空間の上では、その上で定義される関数（もどき）に対する重要な微分方程式がいくつかある。その内のひとつ、**ASD方程式**の解は4次元多様体上の「面白い関数」で、その全てを集めると、4次元空間の形についての情報が得られる場合がある！

この方程式の特徴: 解が**爆発**することがある。

爆発の解析: 実は、（適当な仮定の下）爆発していく解の列は、全て**4次元空間の中の1点**の近くに集中していくもので尽きることが分かる。

「爆発していく点を覚えておく」ことで、元々の4次元空間を解空間の端に貼り付けて、有限的なサイズの空間を得ることができる。



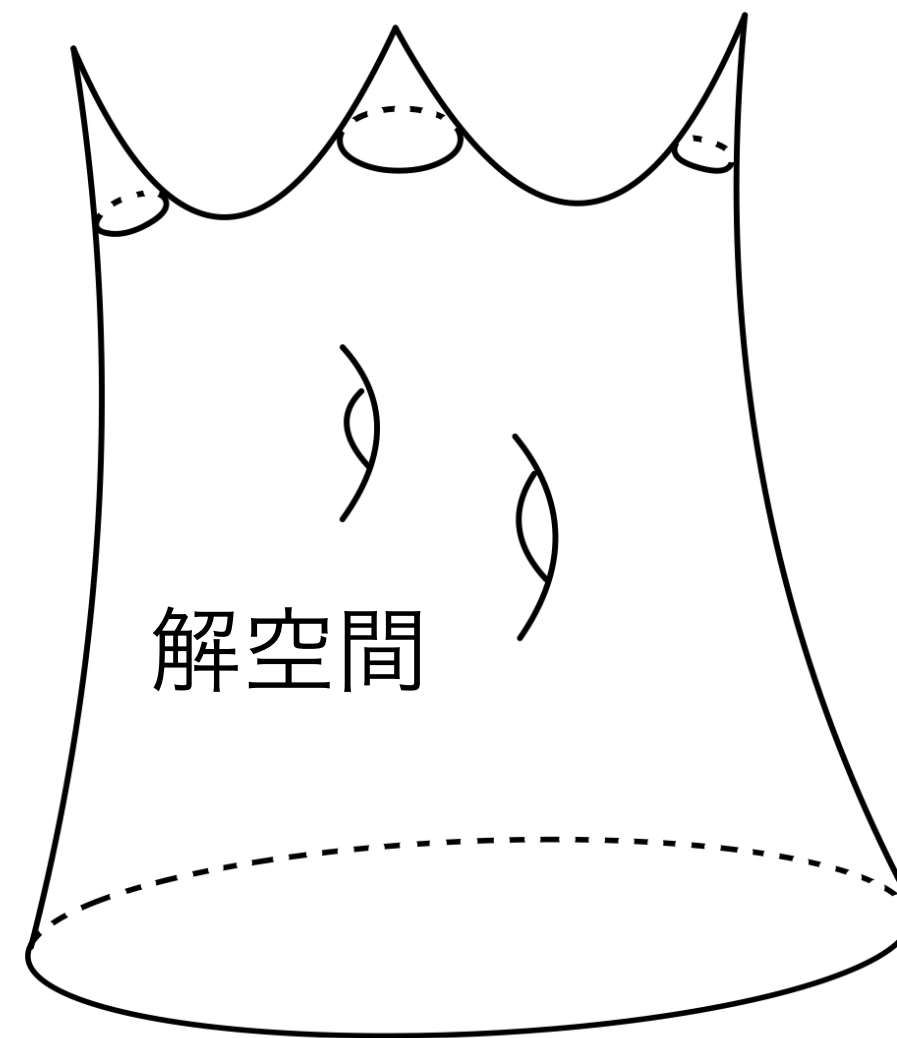
解空間から情報を取り出す:

別口の議論で、解空間はいくつかの具体的な特異点のある5次元の空間であると分かる。これが元々の4次元空間を境界に持つという事実により**トポロジー**を利用して、元々の4次元空間の形に制約がかかる！

4次元空間の幾何学へ

「爆発していく点を覚えておく」ことで、元々の4次元空間を解空間の端に貼り付けて、有限的なサイズの空間を得ることができる。

元々の4次元空間



解空間から情報を取り出す:

別口の議論で、解空間はいくつかの具体的な特異点のある5次元の空間であると分かる。これが元々の4次元空間を境界に持つという事実にとポロジーを利用して、元々の4次元空間の形に制約がかかる！

ある種の4次元空間の非存在定理: 得られる制約は、「4次元空間内の曲面たちはこれこれのように交わることはできない」というタイプのもの。逆に言えば、曲面たちがそのような交わり方をする4次元空間は**数学的に存在しない**ことが証明できたことになる。

これまでの議論をこの非存在定理を目標として思い直すと、長い背理法をやっている：

ある種の4次元空間の非存在を示したい

→ そのような4次元空間があるとして、その上である微分方程式の解空間を考える

→ その解空間は特殊な性質を持つ（もとの4次元空間を境界に持って、特異点の様子も分かる）

→ そこにとポロジーを適用して矛盾を得る → 最初の4次元空間は存在しない！

4次元空間の幾何学へ

ある種の4次元空間の非存在定理: 得られる制約は, 「4次元空間内の曲面たちはこれこれのように交わることはできない」というタイプのもの. 逆に言えば, 曲面たちがそのような交わり方をする4次元空間は**数学的に存在しない**ことが証明できたことになる.

これまでの議論をこの非存在定理を目標として思い直すと, 長い背理法をやっている:

ある種の4次元空間の非存在を示したい

→ そのような4次元空間があるとして, その上である微分方程式の解空間を考える

→ その解空間は特殊な性質を持つ (もとの4次元空間を境界に持って, 特異点の様子も分かる)

→ そこにトポロジーを適用して矛盾を得る → 最初の4次元空間は存在しない!

現代的な4次元の幾何学の研究 (ゲージ理論):

上のような議論はドナルドソン (1983年) によって初めて行われ, それを理由のひとつとしてドナルドソンはフィールズ賞を受賞した. その後も, ある種の微分方程式の解空間を利用して4次元空間を調べる研究領域は (方程式の由来である物理学のゲージ理論にちなみ) **ゲージ理論**と呼ばれ, 現在の4次元幾何学における重要な一分野をなしている.

ご静聴ありがとうございました!