対称性から見る世界

ーミクロからマクロまでー

東京大学大学院数理科学研究科　松井 千尋

自己紹介

幼少期
（石川県）

夢はピアニスト

小学校時代

（奈良県）

数学（算数）との出会い

九九の面白さを発見！

「１の位に規則性がある？！」

中高生時代

（兵庫県）

物理との出会い

「世の中の仕組みを数式で理解
できるってすごい！」

理物学科へ

理 科 二 類 へ 入 学

・理科一類は女の子が少なそう…

・色んなことを理解するには
物理を知る必要がありそう

物 理 学 科 へ 進 学

趣味ときどき仕事

普段の生活

気づいたら頭の片隅で
研究のことを考えている
（半分趣味？）

リアル趣味

楽器演奏
アルゼンチンタンゴ

この講演のキーワード ＝ 対称性

- 『対称性』と聞いて何を思い浮かべますか？
- デザインの対称性

タージ・マハル

アラベスク模様

この講演のキーワード ＝ 対称性

- 『対称性』と聞いて何を思い浮かべますか？
- 旋律の対称性

J.S. Bach
インベンション第一番

この講演のキーワード ＝ 対称性

- 『対称性』と聞いて何を思い浮かべますか？
- 結晶構造の対称性

体心立方格子　　面心立方格子　　六方最密充填構造

この講演のキーワード = 対称性

- 『対称性』と聞いて何を思い浮かべますか？
- 数式の対称性

$$x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2$$

$$\begin{aligned} &x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} \\ &- x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{11}x_{23}x_{32} \end{aligned}$$

この講演のキーワード = 対称性

- 物理法則にもさまざまな対称性が潜んでいる
- 特に、不変性や保存量といった概念と関係がある

ニュートンのゆりかご

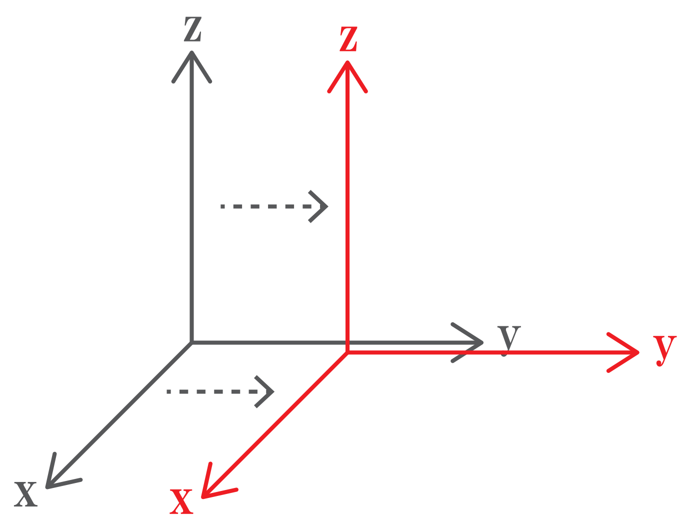
ジャイロスコープ

対称性と物理法則

対称性と保存則

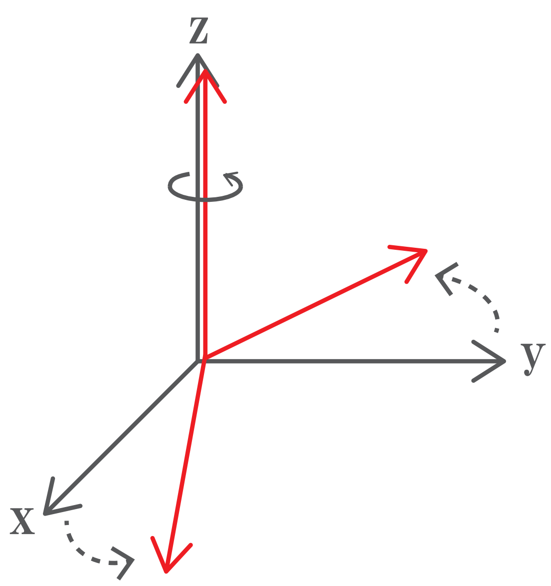
- 並進対称性

  ⇒ 運動量保存則



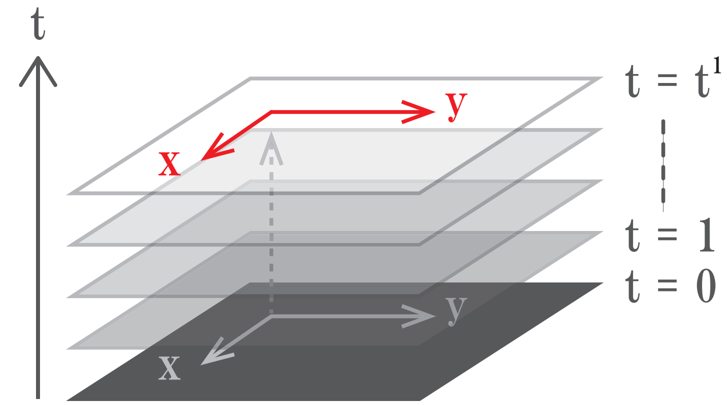
- 回転対称性

  ⇒ 角運動量保存則



- 時間並進対称性

  ⇒ エネルギー保存則



ニュートンの運動方程式

- 二次元直交座標系での運動方程式

ポテンシャルエネルギー

$$M\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad M\ddot{y} = F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

質量 × 加速度 = 力

変数分離された美しい形

- 二次元極座標系での運動方程式

$$M\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{\partial V}{\partial r}, \qquad M\left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

座標系によって運動方程式の形が異なる

ラグランジュの運動方程式

- 二次元直交座標系での運動方程式

ラグランジアン

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

- ラグランジアン

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = \underbrace{\frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}_{\text{運動エネルギー}} - \underbrace{V(\boldsymbol{x})}_{\text{ポテンシャルエネルギー}}$$

$$\Rightarrow M\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad M\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

ニュートンの運動方程式！

ラグランジュの運動方程式

- 二次元極座標系での運動方程式

変数 x, y を r, θ に変えただけ！

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

- ラグランジアン

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = \frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(\boldsymbol{x})$$

運動エネルギー　ポテンシャルエネルギー

$$\Rightarrow M\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad M\left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

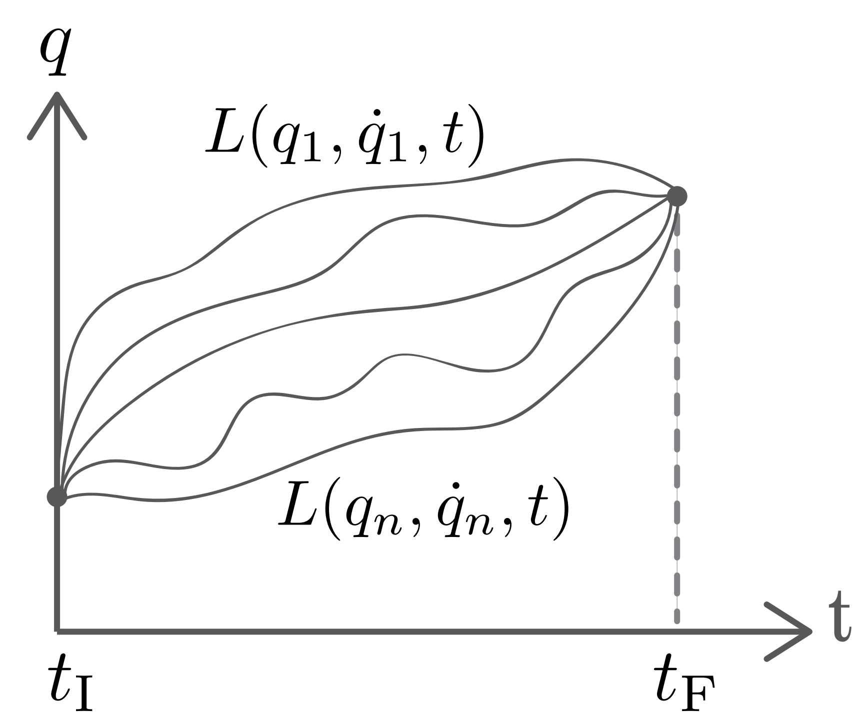
ニュートンの運動方程式！

最小作用の原理

- 指定された始状態から終状態への無数の道筋のうち、実際に実現されるものは「作用積分」を最小にするもの

作用積分

$$S = \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$$



$$\begin{aligned}
\delta S[q] &= \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \left\{ L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) \right\} dt \\
&= \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \right\} dt \\
&= \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \left\{ \boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)} \right\} \delta q\, dt + \underline{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t=t_\mathrm{I}}^{t=t_\mathrm{F}}} = 0
\end{aligned}$$

：停留条件

$= 0$：ラグランジュの運動方程式！　$= 0$（始状態・終状態は固定）

ネーターの定理

- 物理系のもつ対称性と保存則を結びつける定理

微小変換 $q_i \to q_i' = q_i + \delta q_i$, $t \to t' = t + \delta t$ に対して

作用積分が不変

$$\delta S[\boldsymbol{q}] = \int_{t_\mathrm{I}'}^{t_\mathrm{F}'} L(\boldsymbol{q}'(t'), \dot{\boldsymbol{q}}'(t'), t')dt' - \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)dt$$

$$= \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \underline{\frac{d}{dt}\left\{\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\dot{\boldsymbol{q}}\right)\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\delta\boldsymbol{q}\right\}}\, dt = 0$$

$= 0$ 時間変化しない量（保存量）

ネーターの定理

- 微小並進

$$
\begin{aligned}
&x(t) \longrightarrow x'(t) = x(t) + \epsilon \quad && (\delta x(t) = \epsilon) \\
&y(t) \longrightarrow y'(t) = y(t) + \epsilon \quad && (\delta y(t) = \epsilon) \\
&t \longrightarrow t' = t && (\delta t = 0)
\end{aligned}
$$

- ネーターの定理

$$
L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\boldsymbol{x})
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{const.} \Rightarrow M\dot{x} = \text{const.}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \text{const.} \Rightarrow M\dot{y} = \text{const.}
$$

運動量保存則 ← 並進対称性

ネーターの定理

- 微小時間並進

$$x(t) \longrightarrow x'(t) = x(t) \qquad (\delta x(t) = 0)$$
$$y(t) \longrightarrow y'(t) = y(t) \qquad (\delta y(t) = 0)$$
$$t \longrightarrow t' = t + \epsilon \qquad (\delta t = \epsilon)$$

- ネーターの定理

$$\boxed{L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\boldsymbol{x})}$$

$$L - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} \right) = \mathrm{const.} \Rightarrow \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(\boldsymbol{x})$$

エネルギー保存則 ← 時間並進対称性

無限個の保存量

- 対称性のあるところに保存則あり
- 時間変化について不変な量（保存量）が無限個あるとどうなるのか？

可積分系

- 運動を記述する微分方程式が解ける
- 例：KdV方程式（浅い水面を伝わる波の方程式）

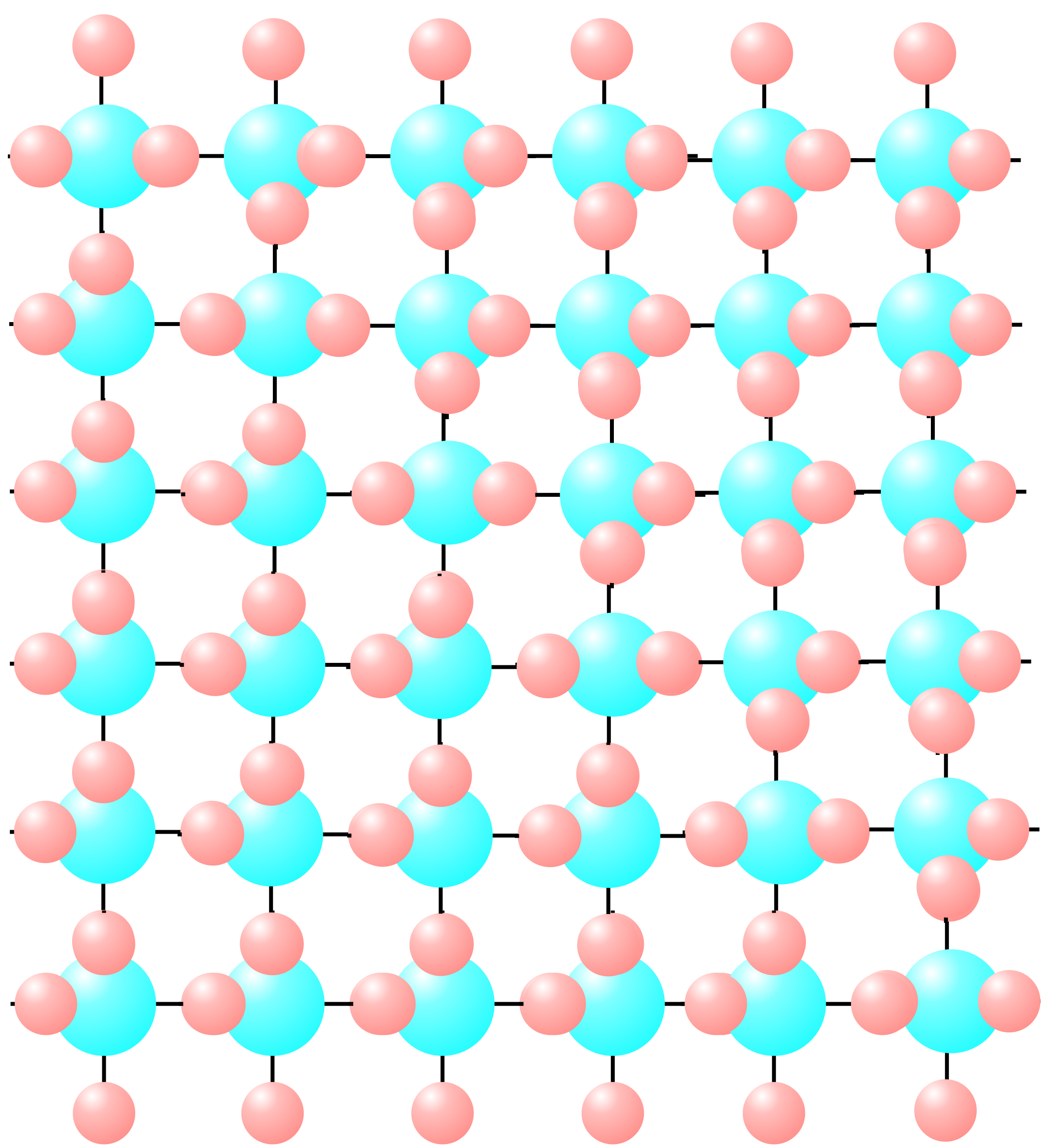
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + au(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + b\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0$$

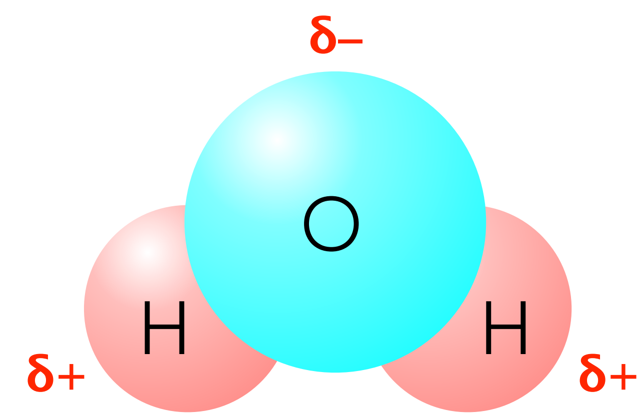
孤立波解が存在

二つの孤立波形が衝突前後で不変

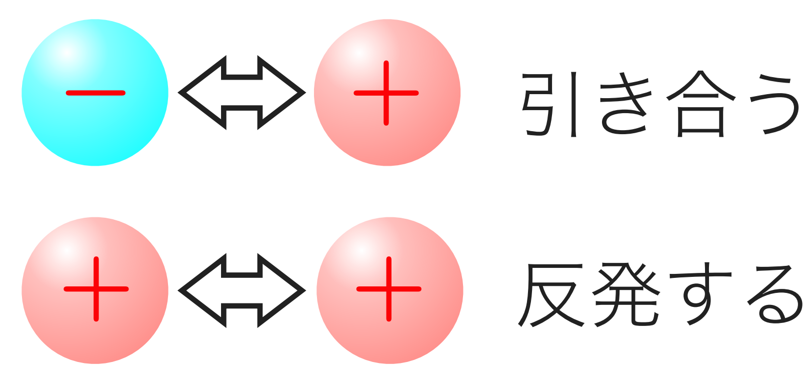
可積分系

- 安定な結晶構造が求まる
- 例：氷の結晶



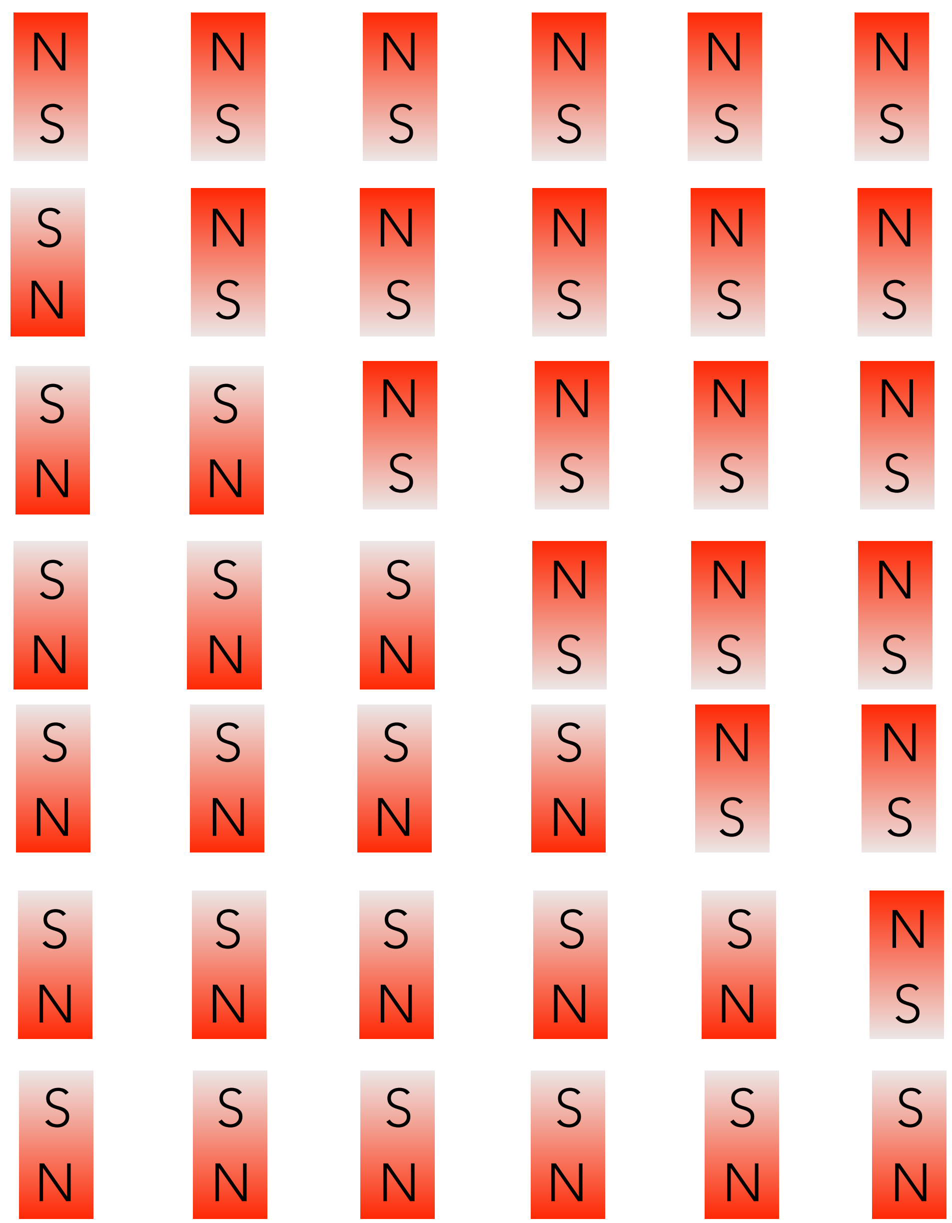


水分子の分極

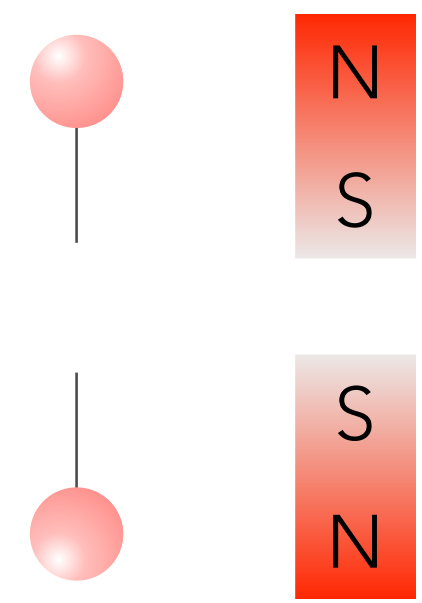


可積分系

- 電荷 δ_+, δ_- を磁石のN, S極に読み替えられる

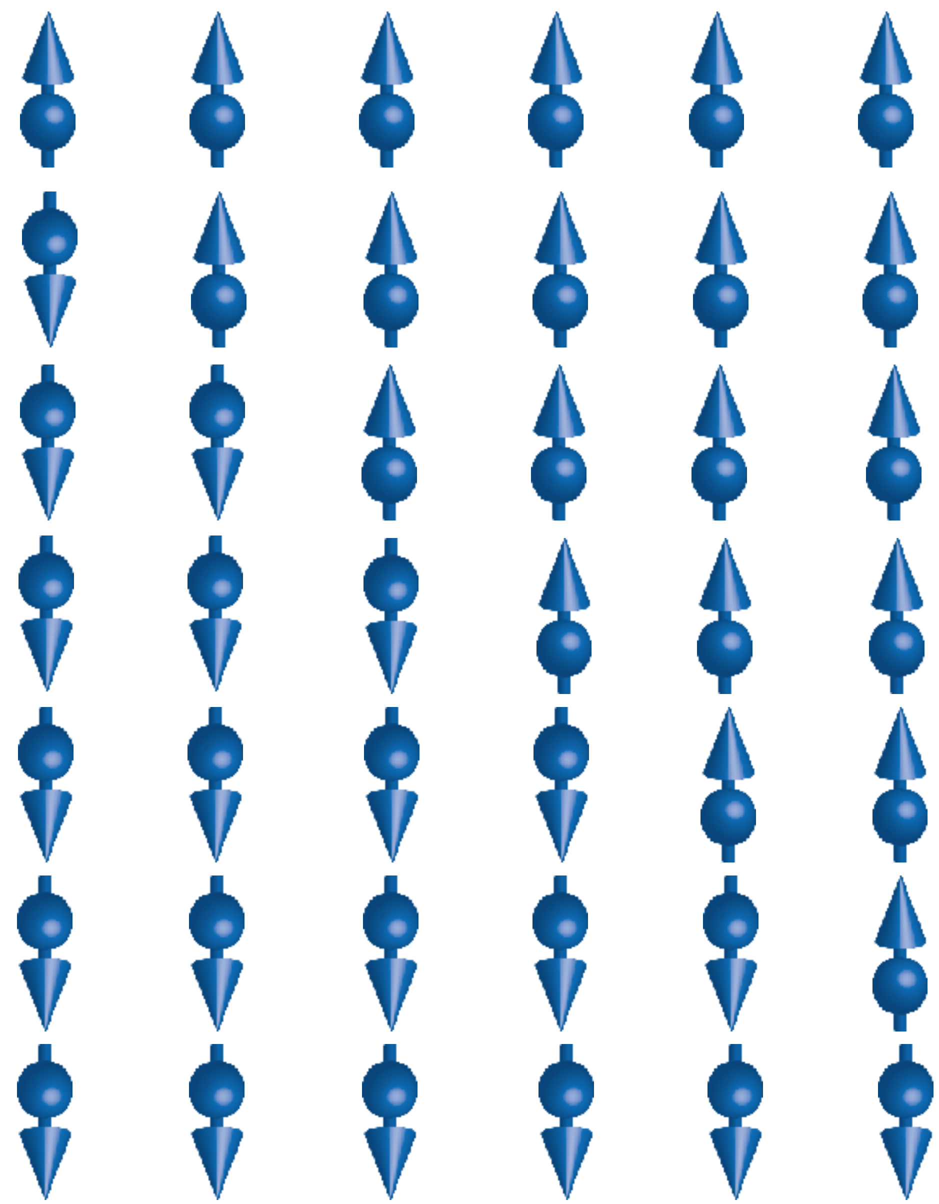


赤丸のある方向 ＝ N極



"スピン"

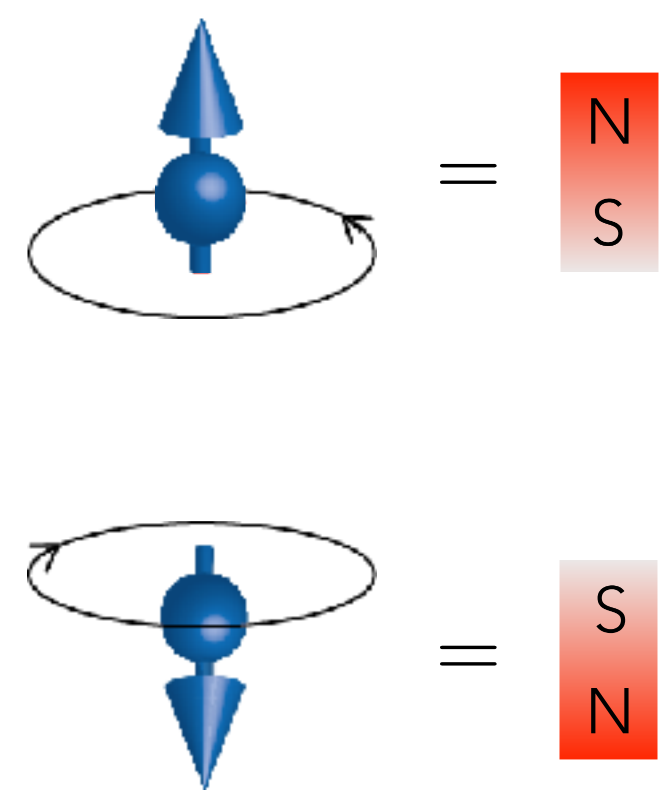
- 電荷 δ_+, δ_- を磁石のN, S極に読み替えられる
- 電子 = 小さな磁石！



電子の自転が

右回り

左回り



古典力学（~19世紀）

- ニュートンの運動方程式

$$M\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = F(\boldsymbol{x})$$

- マクスウェルの方程式

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

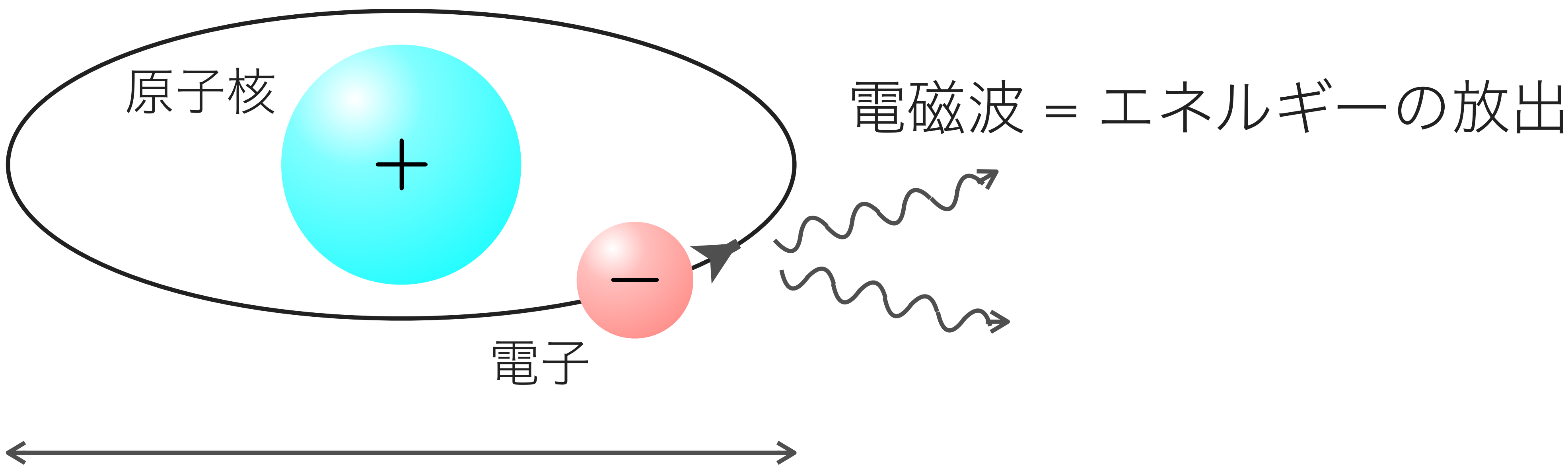
$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{j}$$

ミクロな世界の不思議

古典力学の破綻

- 水素原子



$r \sim 10^{-10}\mathrm{m}$

荷電粒子（電子）の運動によりエネルギーが放出

$\Rightarrow$ 半径が縮まる

$\Rightarrow$ 原子が崩壊（運動が始まってから約10^{-11}秒後！）

粒子性と波動性

- 二重スリットに電子を通過させる

粒子性しかもたないと…

直進して
スリットを通過した粒子が
スクリーン上にドットを作る

粒子性と波動性

- 二重スリットに電子を通過させる

実際の実験では

干渉縞ができる

波の性質

粒子性と波動性

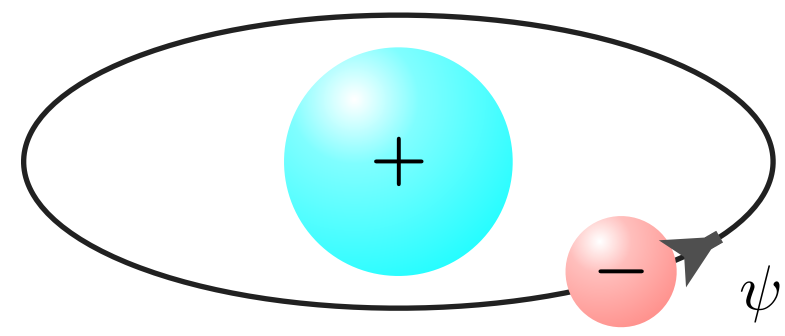
- 波の式

$$\psi(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

- 定常波

$$\psi(x,t) = \psi(x+L,t)$$

$$\Rightarrow\ k = \frac{2\pi}{L}n \quad (\ n\text{ は整数})$$



$\psi(x,t)$
$= \psi(x+L,t)$

一周回ると
波の形がぴったり重なる

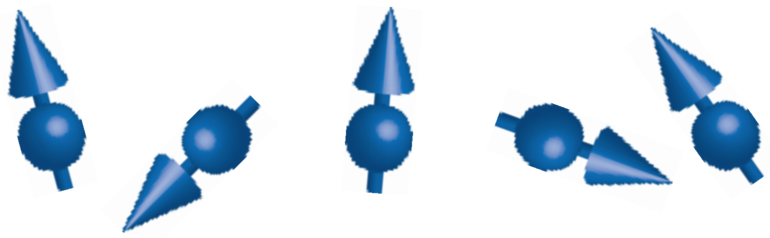
波数 k がとびとびの値を取るとき、原子は安定に存在

"量子化"

スピンの量子化

- 電子ビームに磁場をかける

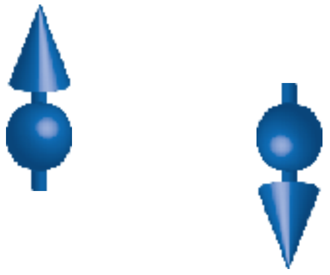
スピンはランダムな方向に向いているので、
連続的な分布が見えるはず



スピンの量子化

- 実際は、スクリーン上の二箇所にだけビーム痕ができる

スピンは真上か真下、どちらかに向いている

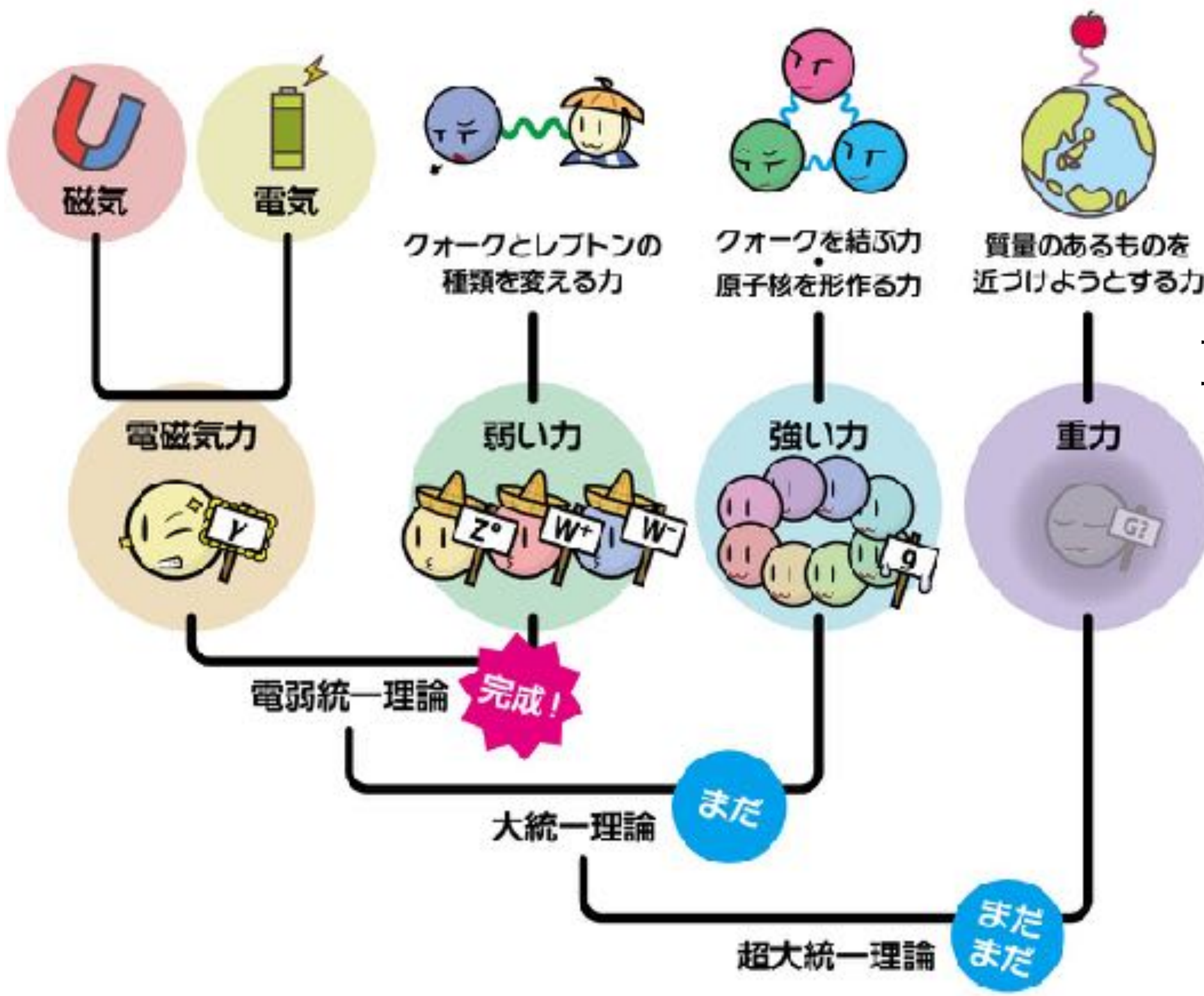


"スピンの量子化"

ミクロとマクロをつなげる

物理学者が目指すもの

- 素粒子から宇宙までを統一的に記述する理論が知りたい！



素粒子が従う理論 = 量子論

重力を記述する理論 = 一般相対論

量子論と一般相対論両方を
包含する理論はまだない

⇒ なぜ？

参考資料：HIGGSTAN（ひっぐすたん）https://higgstan.com

"力"とは

- 私たちが住む世界を支配している力：4つの力

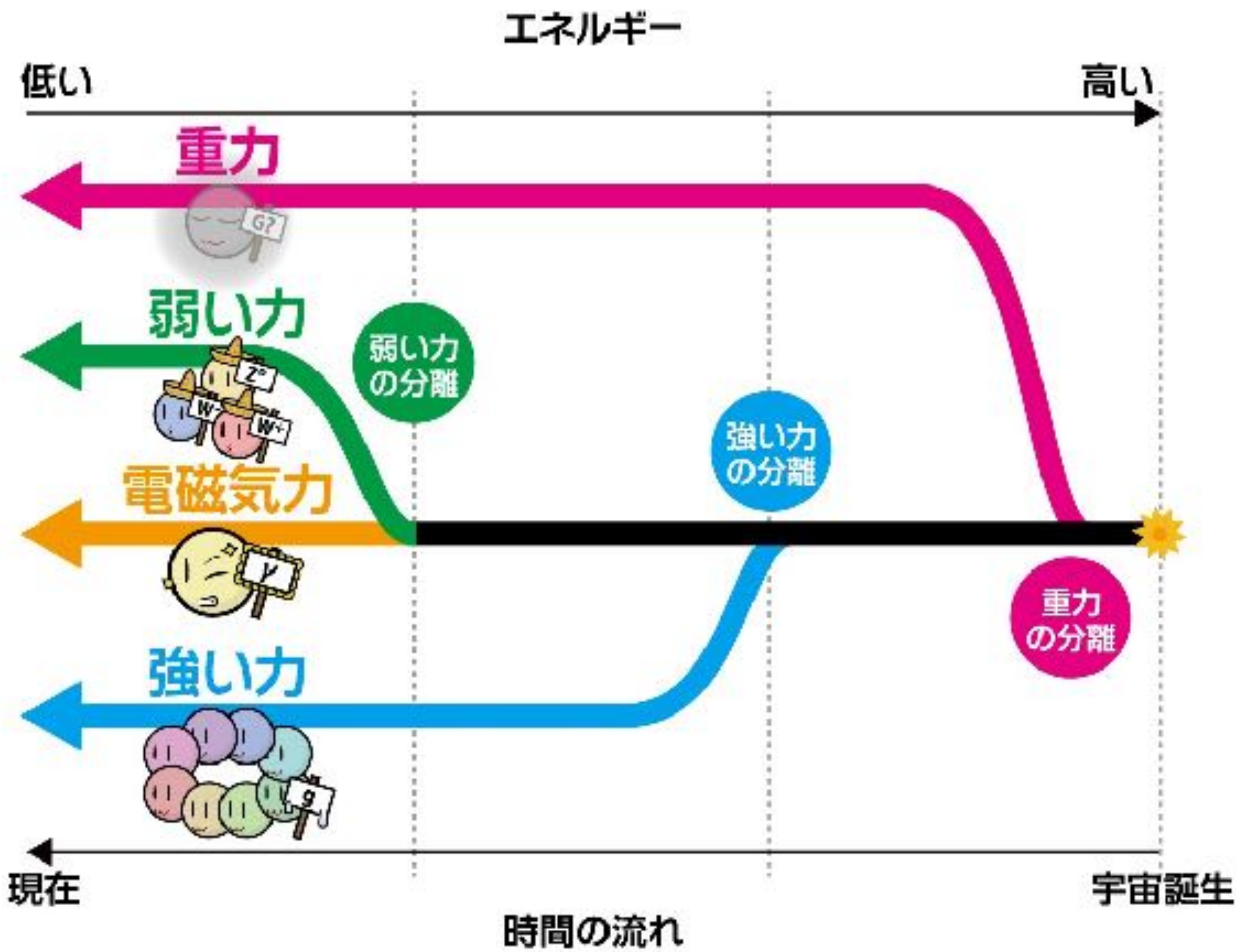
強い力 > 電磁気力 > 弱い力 » 重力

重力だけが飛び抜けて低エネルギー

参考資料：HIGGSTAN（ひっぐすたん）https://higgstan.com

宇宙の歴史と力の起源

- 4つの力はもとは一つの力だった
- 重力が一番初めに分離

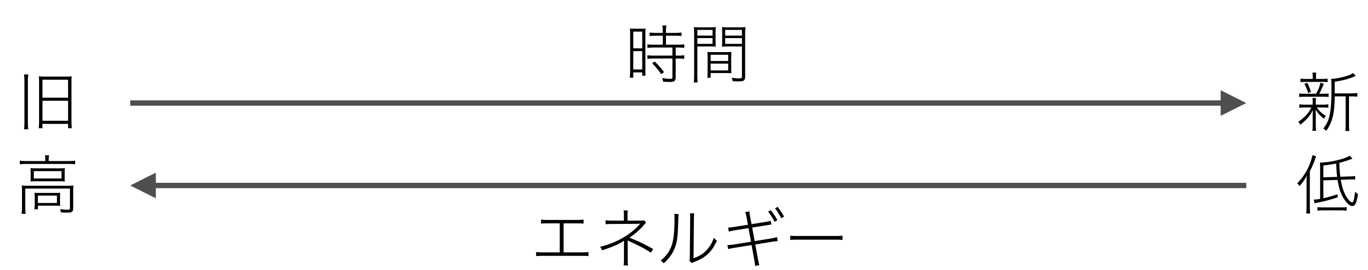


高エネルギーの状態を
作り出せば
力の起源がわかるはず！

参考資料：HIGGSTAN（ひっぐすたん）https://higgstan.com

宇宙の歴史と力の起源

- 宇宙の歴史から力の起源を知ることができる
- 宇宙初期高エネルギー状態 ⇒ 加速器実験（LHCなど）



超大統一理論へ向けて…

- 量子重力理論と他の3つの力との関係が見つかる！

"AdS/CFT対応"

- AdSとは？

量子重力理論が住む空間

三角はすべて同じ大きさ

四角もすべて同じ大きさ

超大統一理論へ向けて…

- 量子重力理論と他の3つの力との関係が見つかる！

”AdS/CFT対応”

- CFTとは？

重力以外の三つの力をまとめて記述する理論

等角写像のもとで不変

AdS / CFT 対応

- AdS空間中の量子重力理論とその境界上のCFTが等価！

4次元CFT ⇔ 5次元AdS

次元が1つ下がる ≈ ホログラフィー

ホログラムを二つの別角度から見たもの

2次元ホログラムに3次元の情報が埋め込まれている

AdS / CFT 対応

- AdS空間中の量子重力理論とその境界上のCFTが等価！

積み重なったディスク各々が
各時刻での宇宙の状態を表す

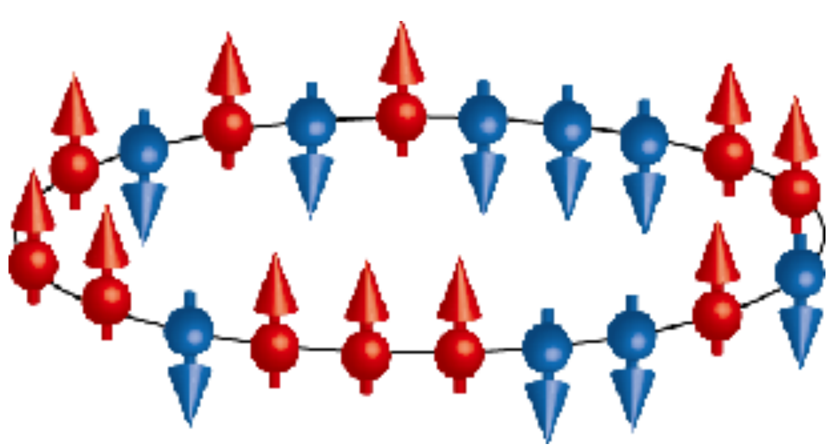
境界上の理論（CFT）は
AdS空間における重力理論の
ホログラフィーになっている

スピン鎖ふたたび

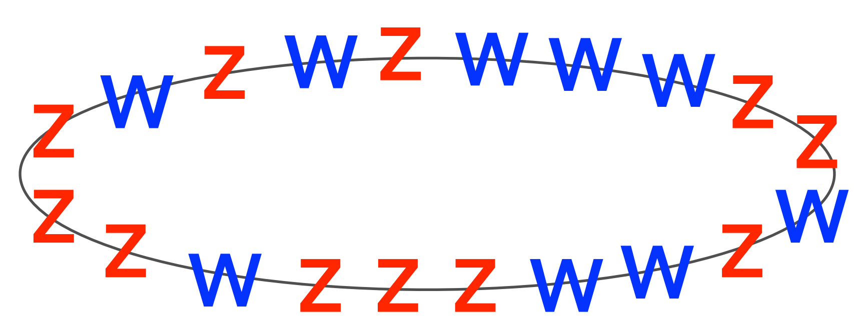
- AdS空間中の量子重力理論とその境界上のCFTが等価！
- AdS空間中の量子重力理論 = スピン鎖！

  （特殊な場合）

- スピン鎖ではいろんな量が厳密に計算できる！
- スピン鎖が超大統一理論への道を切り拓く（かも！？）



=



w, z：スカラー場

まとめ

- 対称性あるところに保存量あり！
- ミクロな世界では値がとびとび！
- 宇宙のモデルにスピン鎖現る！

まとめ

- 対称性あるところに保存量あり！
- ミクロな世界では値がとびとび！
- 宇宙のモデルにスピン鎖現る！

ご清聴ありがとうございました