高校生のための現代数学講座 東京大学
「複素数」 玉原国際セミナーハウス
講義 (3) 坂井 秀隆 2018 年 7 月 14 日

「物理学と複素数」

この講義では，大学２年生で扱う内容を見る．全てを理解するにはこの講義だけでは足りない．きちんとしたことはさらなる学習の後に期待しておこう．来週，1 次分数変換などの複素数の変換が出てくるが，それがとても “使える” ということを感じ取ってもらえればと思う．

複素数と 2 つの実数の組.

• 複素数と２つの実数の組は対応していて，これは，平面の点と思える．

$$z = x + yi \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x, y)$$

• 複素数は平面の点と見なせるが，さらに積も定義されている．

$$\begin{array}{rcl} z_1 = x_1 + y_1 i, \quad z_2 = x_2 + y_2 i & \Longrightarrow & z_1 z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)i \\ (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2) & \Longrightarrow & (x_1x_2 - y_1y_2, \quad x_1y_2 + y_1x_2) \end{array}$$

複素数の四則で定められる複素数の変換やその拡張が物理学で有効に使われるのでそれを見たい．

複素数の変換.

それでは，複素数の変換を具体的に見てみよう．

問題 1. z が複素数平面で，中心 1，半径 1 の円周を描くとき

$$w = z^2$$

はどのような図形を描くか？

円周を $\boxed{z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta}$ と表そう．すると

$$w = (1+\cos\theta)^2 - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\,(1+\cos\theta)$$

となる．

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
z	2	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ $+\frac{1}{2}i$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ $+\frac{\sqrt{2}}{2}i$	$\frac{3}{2}$ $+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	1 $+i$	$\frac{1}{2}$ $+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $+\frac{\sqrt{2}}{2}i$	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $+\frac{1}{2}i$	0
w		$\frac{3}{2}+\sqrt{3}$ $+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$						$\frac{3}{2}-\sqrt{3}$ $+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$	

これは，**心臓形** (cardioid) と呼ばれる図形になっている．

問題 2. $z = x + yi$ が複素数平面で，実軸に平行な直線を動くとき

$$w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

はどのような図形を描くか？また，虚軸に平行な直線を動くときはどうか？

注意： 実は，$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3\cdot 2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$ のような極限で表せることが知られている．つまり，これは z に関する多項式にはなっていないのだが，多項式で近似できる関数になっている．

問題 3. z が複素数平面で，原点を中心とした同心円を描くとき

$$w = z + \frac{1}{z}$$

はどのような図形を描くか？

これはジューコフスキー変換と呼ばれる変換である．

物理学への応用 *

このような複素数の変換が，物理学の問題に応用できるので，その具体的な例を見てみよう．

問題 4. 一様な電場に，無限に長い円柱導体を置いたときの電場はどうなるだろうか？ただし，円柱は電場の方向に垂直に伸びているとする．

まずは，導体が置かれていない場合の電場を各点における電位を与えることで見てみよう．ただし，後で，導体のある場合の問題に変換したいので，ここでは座標を $u, v\ (w = u + vi)$ で書いておこう．この場合，$V = -v$ とすると，虚軸の正の方向に強さが 1 の電場を表すことになる．

この電場に，長さ 1 の薄い導体を実軸上においても電場は乱されない．実軸は等電位面だからである．ここで，断面において単位円で表される導体がある場合を考えるために，先ほどのジューコフスキー変換を使おう．

“実は” $w = u + vi = z + \frac{1}{z}$，$z = x + yi$ とおいたときの $V = -v$ が問題の電位を与えているのである．

$$w = z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{1}{x + yi} = \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2} x + \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2} yi$$

より，

$$V = -v = \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} y \quad \left(= -\left(r - \frac{1}{r} \right) \sin\theta \right)$$

である．このとき，$x^2 + y^2 = 1$, つまり $r = 1$ のとき，$V = 0$ であることはすぐ分かる．

問題 5. 断面が円形をした熱伝導率が一定の筒状の熱伝導体を考える．ただし，筒は無限に長くどの断面でも同じ現象が起きているものとし，1 つの断面内で考える．このとき，筒の上半分の円周の温度を 0 度に保ち，下半分を 1 度に保ったときの筒の内部の温度分布を求めよ．

この場合も，まず簡単な場合の温度分布を見て，それを変換することを考えよう．今は，$v = 0$ で温度 $T = 0$，$v = 1$ で温度 $T = 1$ となるときを考える．このとき，$T = v$ とすればよい．では，今度はどのような変換を考えればいいだろうか？

まず，指数写像 $s + ti = e^{\pi w}$，$w = u + vi$ を考えよう．これは，$0 < v < 1$ という領域を $0 < t$ という領域に対応させている．逆の対応も見ておきたい．

$$s + ti = e^{\pi w} = e^{\pi u}(\cos \pi v + i \sin \pi v)$$

であるから，逆に

$$u = \frac{1}{\pi} \log(s^2 + t^2), \qquad v = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{t}{s}$$

と書ける．ここで，arctan は tan 関数の逆関数である．

次に，半径 1 の円板を $t > 0$ という領域に移したい．これは来週出てくる 1 次分数変換の一種で

$$s + ti = \frac{1 - z}{1 + z} i$$

という変換を考えればよい．

$$s + ti = \frac{1 - z}{1 + z} i = \frac{1 - x - yi}{1 + x + yi} i = \frac{2y + (1 - x^2 - y^2)i}{(1 + x)^2 + y^2}$$

であるから，合成して

$$T = v = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{t}{s} = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1 - x^2 - y^2}{2y}$$

と書ける．

(補足) 物理学へ応用できるわけ.

このような計算で，物理的な物事の様子が分かってしまうことは，次のような理屈で説明される.

1. 電気，熱現象，あるいは流体力学などの問題が，**ラプラス方程式**と呼ばれる微分方程式とその解の境界での振る舞いで決定される.

2. ここで見たような，複素数を使って構成された 2 次元の変換が，ラプラス方程式の解をラプラス方程式の解に移す.

ラプラス方程式とは，未知関数 f に対する

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

のように書かれる方程式である．また，ここで見た複素数を使って構成された変換は，等角写像と呼ばれるものになっている．つまり，変換によって曲線は曲線に移されるが，2 つの曲線の交る角度が，変換される前と後で変わらないという性質を持っている．等角写像はラプラス方程式の解をラプラス方程式の解に移す.

問題 6. 問題 1〜3 で見た変換が，等角写像になっていることを，具体的な曲線（直線）とその変換後の曲線を調べることで見てみよう.

参考文献

[殿塚河村] 殿塚勲，河村哲也著『理工系の複素関数論』（東京大学出版会）