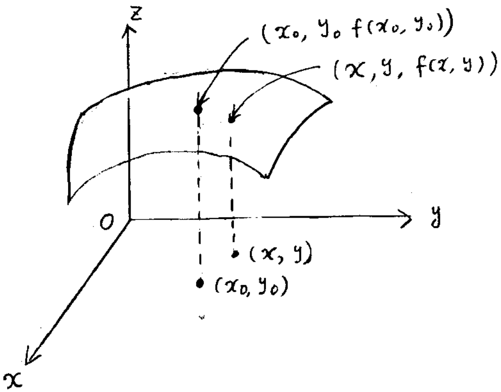
空間へのアプローチ

連続性をつかまえた数学者たち

中根美知代（日本大学・理工学研究所）



今回取りあげる話題

関数 $z = f(x,y)$ のグラフは (x,y,z) 空間で曲面を描く．
この曲面が点 (x_0, y_0) において，切れ目なくつながっている（連続である）ことが，

「任意の正の数 ε に対して，適当な正の数 δ がとれて，
$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ となるような
任意の (x,y) に対して，
$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$ とできる.」$\cdots$(*1)

と定義されるにいたる過程を検討する．

I.「曲線がつながっている」という幾何学的な概念を，不等式のことばで把握する過程（Cauchy の成果・Dirichlet, Weierstrass らによる受容と整備）
- 曲線の形状を，関数でとらえる．(Euler から Cauchy へ)
- 曲線がつながっている状態を,「限りなく近づく」という概念でとらえる．
- 「限りなく近づく」を不等式の言葉で表現する．(ε-δ 論法)

 → Cauchy の記述から読み取れる関数の連続性の定義：「任意の正数 ε に対して，適当な正数 δ がとれて，$|x - x_0| < \delta$ のとき，$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ とできる.」$\cdots$ (*2)
- Cauchy の成果は，極限概念が不等式の言葉で書けることを示し，微積分学を極限に基礎づけて展開したことである．
- Cauchy の成果をドイツへ移入するにあたって，重要な役割を果たしたのは，Dirichlet である．
- 微分学を不等式の言葉のみで展開したのは，Weierstrass の 1861 年の講義である．

II. 不等式の言葉を 1 次元から 2 次元に拡張する過程：
定義を 2 変数に一般化したことで，2 変数関数の連続性を捉えたといえるのか？
- Cauchy による 2 変数関数の連続性の定義は，
定義 (*2) を自然に 2 変数に拡張したもの（= (定義 (*1)）と考えられる．
- 一方，Cauchy による多変数関数の極限の考察からは,「第一の変数の各値に対して，第二の変数が連続，第二の変数の各値に対して，第一の変数が連続であるとき，2 変数関数として連続」$\cdots$(*3) と定義していたと判断できる．

 → この二つの定義は異なる状況を意味している．

定義 (*1) は，定義域となる 2 次元平面上で，どのようにして (x_0, y_0) に近づいても，関数の極限値は等しくなることを意味している．＝グラフがなす曲面がつながっている．
定義 (*3) では，(x_0, y_0) への近づき方を限定したうえで，それらの極限値が等しいとしている．他の近づき方をした時，極限値が異なるかもしれない．＝グラフがなす曲面がつながっているとは限らない．

$\cdots$ Cauchy がこのような違いに気づいていたとは思えない．
- Dirichlet, Wierstrass の理解も，Cauchy とほぼ同じ状況だった $\cdots$ 定義 (*1) と定義 (*3) の識別がついていない状態．

III. 2 次元への拡張の問題点に気づいた数学者たち：2 変数関数の連続性の正しい理解へ
- Heine による，連続性の定義が混乱していることの指摘．
- Thomae による，問題点の提示．

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2 \neq 0)$$

に類似した関数の，原点での挙動を考察.
○ Schwarz による，２変数関数の連続性の定義.

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2\neq 0),\ \ f(0,0)=0$$

を例示し，この関数は $(0,0)$ で連続でないとする．定義 (*1) と (*3) を区別したうえで，定義 (*1) を２変数関数の連続性の定義として採用する.

まとめ：この過程で重要だった出来事は何か？
(1) 「つながっている」ことを不等式の言葉で捉え，形式的に一般化した.
(2) 一般化した結果と，それに対する数学者たちの理解が食い違っていた.
　→ このことを克服するには具体例の検討が不可欠

付記：数学史の研究とは
(例)「なぜ，Thomae や Schwarz はこのような関数に気づいたのだろうか」を検討する $\cdots$ 彼らがその当時考えていた問題は何か？ 彼らの受けていた教育はどうだったのか？時には数学の枠をはみ出した考察も必要.

「連続性をつかまえた数学者たち」と関連する著作

Leonhard Euler (1707-1783)
　1748 年刊行『無限解析』(Introductio in analysin infinitorum)：連続曲線の定義
Augustin Louis Cauchy (1789-1857)
　1821 年刊行『解析学教程』(*Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, I^re^ partie : analyse algébrique*):極限・無限小・連続関数の定義
　1823 年刊行『微分積分学概要』(*Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur la calcul infinitésimal*)：導関数・定積分・多変数関数の微分
　1829 年刊行『微分学講義』(*Leçons sur le calcul différentiel*) :多変数関数の微分
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)
　1854 年講義 『1 変数および多変数の定積分講義』(Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen)：1 変数および 2 変数関数の連続性の定義
Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)
　1861 年講義『微分学』(*Differetialrechnung*) :微分学を ε-δ 論法で一貫して展開する.
　1886 年講義『関数の理論より』(*Ausgewahlte Kapitel aus der Funktionenlehre*)：
　　2 変数関数の連続性の定義を (*1) で与える.
Heinrich Eduard Heine (1821- 1881)
　1869 年論文『三角級数について』("Über trigonometrische Reihe")：
　　2 変数関数の連続性の定義への問題提起
Carl Johannes Thomae (1840-1921)
　1870 年刊行 『一変数複素関数およびテータ関数の概要』*Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Varänderlichen*：
　　2 変数関数の連続性の定義にかかわる混乱を具体例を挙げて指摘.
Hermann Amandus Schwarz (1843 - 1921)
　1872 年論文 " 偏微分方程式の積分について "
　("Zur Integration der partiallen Differentailgleichung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$)：
　2 変数関数の定義 (*1) と (*3) を区別したうえで，(*1) を採用.