古田幹雄

４次元の形

我々の住む宇宙は時間までいれると４次元である。少なくともそのように見えている。宇宙全体をその誕生から終焉までを「宇宙の外」から見ると４次元の広がりをもつ。ではそもそも４次元方向への広がった「４次元多様体」には、論理的にどんな可能性があるのだろう。人は、その可能性を分類し、そのどれが現実の宇宙であるかを問うことができるのだろうか。また４次元の時空をある時刻で切ると、３次元のある瞬間の宇宙が見える。では、宇宙のどんな形が、どんな時空の発展を可能にするのだろうか？

数学はこれらの問いまでは届かない。数学の役割は、４次元多様体の分類の試みまでである。後者の問なら次のように定式化するところから始まる。３次元多様体がある４次元の経過を経て別の３次元多様体に変形したとき、どのような変形が可能であるか。

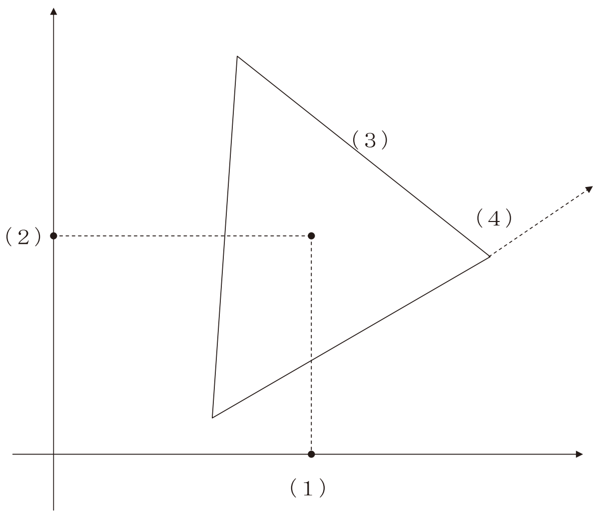
私のこれまでの研究は、このような問題に対するひとつの数学的なアプローチといえる。量子電磁力学のDirac方程式が定義可能な４次元多様体に対しては、かなり強い制約が見出されたことがひとつの成果であり、研究の枠組みは以下のような潮流の中に位置する。

自然界の多くの現象は偏微分方程式によって記述される。しかし、偏微分方程式の解を明示的に書き下すことは多くの場合まず不可能である。ある性質をもつ解の存在を示すだけでも容易ではない。しかし、興味深いことに幾何学的な方法によって、解が存在することを示せることがあり、そのような議論は、偏微分方程式が設定されているシステムの幾何学を深く反映している。

Atiyah-Singerによる指数定理は線形方程式に対してそのような方法を提供する。また逆に、指数定理を用いて、多様体の幾何学の深い性質を導くことが知られている。これは前世期半ばの大域解析学のひとつの頂点であった。なお前世期初頭すでに、関数解析学が線形偏微分方程式論のある側面を無限次元の線形代数として抽出していた。指数定理は、幾何学に現れる線形偏微分方程式のある族が、トポロジーと不可分に結びついていることを示している。関数解析学は、非線形偏微分方程式に対しても、無限次元多様体の幾何学としての理解の枠組みを提供していたが、さらに、幾何学に現れる非線形偏微分方程式が、トポロジーの枠組みと結びつくことは今から１９８０年代以降次第に明らかになってきた。

４次元トポロジーにあらわれる非線形方程式の代表は、物理学におけるYang-Mills方程式の特殊化として定義されるインタントン方程式とその変種である。それらの方程式の解空間から、Donaldson不変量, Seiberg-Witten不変量と呼ばれる４次元多様体の不変量が定義され、ゲージ理論と呼ばれるこの分野は多くの研究者によってこの３０年近く盛んに研究されてきた。

我々の方法は、直観的には次のようなものである。４次元多様体のある一部分から、エネルギーを注ぎ込み、偏微分方程式にしたがって波動を伝播させる。出口がなければ、それが多様体全体に行き渡ったところで特殊な波形があらわれる。このような現象を調べることにより、４次元多様体の幾何学を調べることができる。偏微分方程式の扱いを無限次元幾何学として考察するのが我々の指導原理であり、この有限次元にない無限次元特有の現象が見出されつつある。



xy平面上の正三角形全体の集合は４次元多様体をなす。
この集合の要素の指定には４個のパラメータが必要である。
（１）正三角形の中心のｘ座標
（２）正三角形の中心のｙ座標
（３）正三角形の一辺の長さ
（４）正三角形の辺の傾く角度