野口潤次郎

複素解析学と複素幾何学

　複素数は、今は高校で習います。まずは実数と呼ばれる数の体系がありその全体は $\mathbf{R}$ と表記され、四則演算（＋、－、×、÷）と大小（例えば $0<1$ など）があります。しかし、2次以上の方程式や、電磁気の性質などを数式で表現しようとするとそれだけでは不十分な数の体系であることが、すぐに分かります。そこで、二乗して「-1」になる虚数単位と呼ばれる数 i を用いて $z=x+iy$（x と y は実数）と表記される数が導入されました。これは、複素数と呼ばれその全体は $\mathbf{C}$ と表記されます。この数の体系は、たいへん上手くできていています。例えば、未知変数を X として、

$$X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

という任意の n 次方程式を係数 a_i を複素数としてとると、その根は全て複素数の中で解けることが分かります。実数だけですと $X^2+1=0$ は実数の範囲では解けません。実数の体系から複素数の体系へ拡大することで、大小の性質はなくなりますが、四則演算は保たれ、さらに良い性質を持つことになります。この複素数の体系を基にして解析学や幾何学を展開する数学分野を「複素解析学」、「複素幾何学」と言います。私の主な研究分野は、この両方または、境界分野に属します。

　以下「数」と言えば複素数のこととします。さて複素変数 z の次のような多項式（代数的関数）の列を考えます。

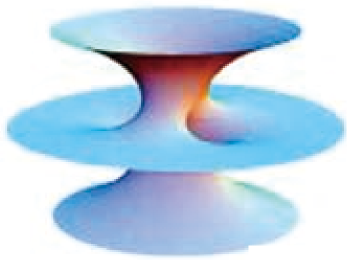
$$f_n(z)=1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^n}{n!},\quad n=1,2,3,\ldots$$

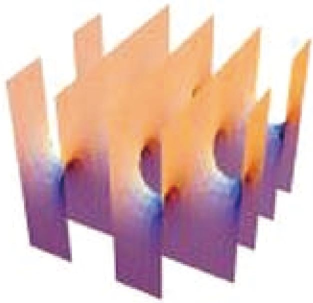
各 n について $f_n(z)=0$ は、n 個の根を持ちますが、極限操作をして

$$f(z)=1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

を考えると方程式 $f(z)=0$ は、根を全く持たなくなります。一方、任意の0でない数 a に対しては、方程式 $f(z)=a$ は、無限個の根を持つことになります。例えば、$f(z)=1$ の根は、$z=2n\pi i$（n は任意の整数）となる。このように代数的な関数が持ち得なかった性質を $f(z)$ は持つことになり、このような関数を超越的関数と呼びます。実際、$f(z)=e^z$ と書かれます。

　関数は、複素数の全体 $\mathbf{C}$ から $\mathbf{C}$ への写像（対応）$f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ を決めます。更に、一般に局所的には有限個の複素数で表される座標を持つ宇宙を考えこれを複素多様体 M となづけ、その中への写像（対応）$f:\mathbf{C}\to M$ を考えることができます。一般にこの f は、超越的でその振る舞いを捉えるのは、たいへん難いものです。しかし M は、宇宙ですので宇宙情報を持っています。この宇宙情報のことを数学者は「幾何構造」あるいは「幾何学不変量」と呼んでいます。興味深いのは M の宇宙情報と部分空間 $D\subset M$ との交点についての情報で超越的な f の振る舞いを捉えられる場合があり、この理論を「値分布理論」と呼びます。





　これは、宇宙 M の曲がり具合（曲率）に大いに関係し、負極率の場合は、極端な場合には f は、定値写像になってしまいます。このようなを M は、小林双曲的多様体であると言います。この概念は新しく、小林昭七氏が1960年代に定義を与えたものです。1980年代後半頃から、この分野と有理数の近似理論であるディオファントス理論の間に理論的類似性があることが判明してきました。イロハ予想は、そのような中から生まれてきた予想で、これは、初めに述べた多項式方程式の係数 a_i を有理数からとり、根も有理数で探す問題と深い関係があり、いわば問題がお里帰りしたような様子があります。値分布理論の研究は進展中で、世界の各所に研究グループがありますが、日本の研究グループは世界の中でも注目されています。