寺杣友秀

周期写像とモチーフに関連する代数幾何の研究

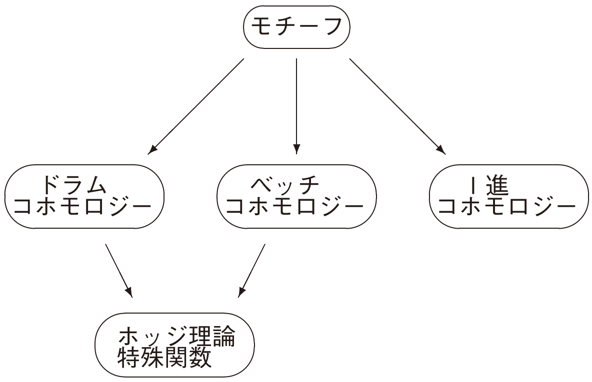
超幾何関数やテータ関数などの一連の特殊関数を現代的な取り扱うための標準的な手法として、これらを代数多様体の周期写像として捉える方法がある。代数多様体の性質と関数論的性質の関係に注目し、相互の言語に翻訳することにより、代数幾何的な写像や対応を関数論的視点から発見する事、関数論的関係式を代数幾何的に理解し、より視覚的に捉え、物事を単純化する事が可能となり、それらの一般化、類似物の発見に役立てることができる。またそれまであまり関係が明確でなかったものの類似性を発見することができる。これまでテータ関数、超幾何関数、多重対数関数、多重ゼータ値、基本群の周期積分に関する研究をこのような視点から行ってきた。

それらの研究成果の具体例と現在進行している研究について述べよう。まず超幾何関数を代数多様体の周期写像と考えることにより物事が見やすくなるような物の例として超幾何関数の行列式に関する等式がある。この等式は曲線の対称積と高次元多様体の間の代数的対応という幾何的対応物の存在を介して見つけられた。これから青本・ゲルファント超幾何関数を積分表示するときの微分形式のシューア基底や位相的サイクルのよいとり方が見つけられた。もう一つ超幾何関数と関連する幾何学的対象物の例として、青本・ゲルファント超幾何関数とフェルマー多様体の完全交叉があげられる。ゲルファントの超幾何関数に関する双対定理の代数幾何的証明、つまりこの双対定理が代数的対応に起因するかどうかを問う問題が考えられる。実際にその代数的対応が構成され、その構成の発展として、完全交叉に関するホッジ構造の取り扱いに関する一般的な原理が得られ、大域的トレリの問題に応用された。

次にテータ関数の等式などへの代数的対応の応用について述べよう。テータ関数、テータ定数は周期が既知であるアーベル多様体に対して射影埋め込みや、モジュライ空間の射影埋め込みに用いられる。このモジュライ空間はIII型領域であるが、その他の型の領域でもIII型領域に埋め込める場合が多くある。その例としてドゥリーニュ・モストウ・寺田の分類に現れるモジュライ空間、さらにその特殊なものとしてアルコック・カールソン・トレドによる３次の巡回群の作用する３次元３次超曲面のモジュライ空間などがある。３次超曲面の場合はクレメンス・グリフィスによって見つけられた偶発曲線がドゥリーニュ・モストウ型の曲線と代数的対応で結びついていることがわかる。これを用いて逆周期写像をテータ関数により表すことができる。テータ関数に関する最近の話題としては、トマエの公式やそれを応用した算術幾何平均を幾何学的に取り扱う研究をしている。

上記にのべた幾何学的対象物は本質的に非特異・コンパクトな代数多様体に関連するものだが、開多様体のコホモロジーと関連する混合ホッジ構造の周期写像に由来する特殊関数として多重対数関数などがあり、その特殊値として多重ゼータ値などがある。とくに多重ゼータ値に関してはさまざまな等式が存在するが、これまでに知られているものはすべて代数幾何的解釈からくるものに限られている。そのなかでも興味深い関係式として２重シャッフル関係式があるが、そこに本質的に現れる正規化調和シャッフル関係式についても幾何学的起源をもつことが知られている。これは、調和シャッフル関係式のｌ進表現的な類似物の存在を示唆している。これらの研究は今後の課題である。

現在は混合モチーフの枠組みで、基本群の相対完備化の構成に取り組んでいる。これらに関してはハイン、松本、パールシュタイン氏らと共同研究を行っている。



モチーフと特殊関数