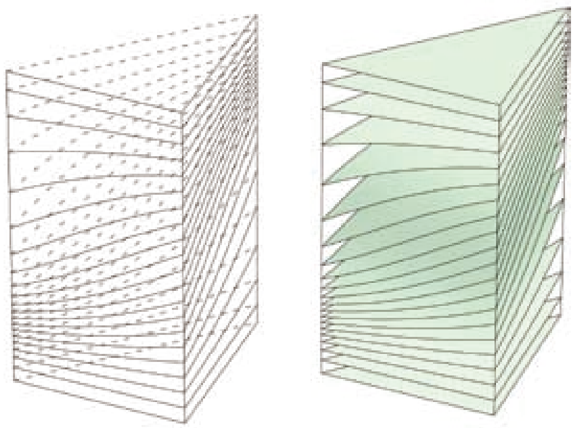
坪井　俊

多様体の微分同相群

多様体の定式化は20世紀前半におこなわれた。現在、多くの数学研究が多様体あるいはその上の構造を扱っている。多様体の微分同相群は、多様体自体の対称性を記述する群である。現在は多様体の微分同相群の群としての性質を研究している。

微分同相群

多様体MのC^∞級微分同相全体Diff(M)を考えると、MからM自身へのC^∞級写像全体の空間の開集合として位相空間となる。Diff(M)の上の曲線は、アイソトピーと呼ばれる。Diff(M)の恒等写像の弧状連結成分$\mathrm{Diff}(M)_0$は、微分同相群の正規部分群をなし、特に面白い研究対象である。微分同相群Diff(M)の研究は、$\mathrm{Diff}(M)_0$の研究と写像類群$\pi_0(\mathrm{Diff}(M))$の研究をあわせておこなうべきものである。葉層構造の理論との関連で、コンパクト連結多様体に対して、$\mathrm{Diff}(M)_0$が単純群であることがHerman-Mather-Thurstonにより30年以上前に示されている。すなわち、この群の正規部分群は、それ自身と、単位群の２つである。

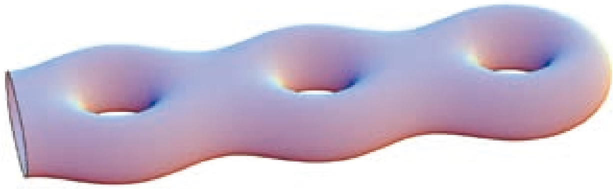


このような葉層構造は葉層積構造と呼ばれる

一様完全性、一様単純性

微分同相群$\mathrm{Diff}(M)_0$が単純であることは、実は$\mathrm{Diff}(M)_0$が完全であること、すなわち、アーベル化が単位群であることから示される。すなわち、$\mathrm{Diff}(M)_0$の元は、交換子の積に書かれる。これは、幾何的には、境界を１つ持つ向き付けられた種数gの曲面$\Sigma_{g,1}$に対して、$\partial\Sigma_{g,1}\times M$に与えられた$M$方向に横断的な葉層構造が、$\Sigma_{g,1}\times M$の$M$方向に横断的な葉層構造に拡張することをいっている。gは、積に現れる交換子の個数であるが、$\mathrm{Diff}(M)_0$の元を表すために必要な交換子の個数の最小値を交換子長と呼ぶ。最近、多くの多様体に対して、$\mathrm{Diff}(M)_0$の元の交換子長は有界であること（一様単純性）を示したが、現在は、それが示されていない場合について研究を進めている。$\mathrm{Diff}(M)_0$については、完全性から単純性が導かれるのであるが、それは$\mathrm{Diff}(M)_0$の単位元ではない元f, hをとると、fはhまたはh^{-1}の共役の積に書かれることをいっている。$\mathrm{Diff}(M)_0$の一様単純性から、共役の積の個数も有界となること（一様単純性）がわかる。

一方、無限単純群で、一様有界であるが、一様単純でないものも多く存在し、これらについても研究を進めている。

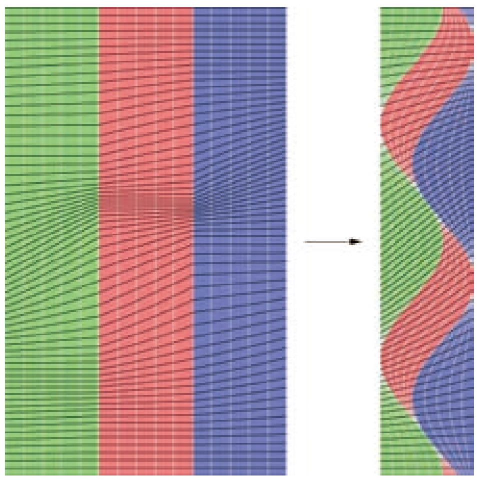


$\partial\Sigma_{3,1}$は、$\pi_1(\Sigma_{3,1})$で３つの交換子の積となる

正則性

実は、微分同相群Diff(M)の群としての性質は、微分同相の微分可能性に依存している。微分可能性C^0級、C^1級などでは、Diff(M)から定義される空間$B\overline{\mathrm{Diff}}(M)$の高次元のホモロジー群が消えているが、$C^2$級を超えると、$M$の次元より少し大きな次元のホモロジー群が著しく非自明になることが、葉層構造の特性類を用いて示されている。

一方、現在の非常に面白い問題は、実解析的な微分同相群$\mathrm{Diff}^\omega(M)_0$の性質である。この群については、円周作用がある多くの場合に、完全性が証明されるが、ほとんどの多様体については、これからの研究課題である。



実解析的アイソトピーの分解