川又雄二郎

高次元代数多様体の幾何学的な構造を、代数・幾何・解析の種々の方法を駆使して研究しています。私が研究を始めたのは30年以上前のことで、当時は「3次元」といえば何が起こっているのか見当もつかない高次元でした。その後の発展によって、3次元はすでに身近な存在となり、4次元さらには一般のn次元も扱えるようになりました。

研究のキーワードになるのが「標準因子」です。標準因子は最大次数の微分形式から得られる余次元1の幾何学的存在ですが、Serreの双対定理やRiemann-Rochの定理などにさまざまに形を変えて現れ、その重要性は計り知れないものです。また、小平次元を使った代数多様体の分類は、代数多様体の幾何学的特性が標準因子から作られる標準環の構造によく反映されていることに基づいています。このところ関心を持っている導来圏の理論では、標準因子はSerre関手として現れ、純粋に圏論的に定義されることになります。

いま取り組んでいる課題は、極小モデル理論の完成という方向とその精密化である導来圏の構造の研究の二つです。研究者になりたてのころに取り組んだ代数的ファイバー空間の構造理論も重要な手法になっています。また、代数多様体単独の代わりに代数多様体とその上の因子の組を考えるという「log幾何学」の考え方も重要なモチーフです。

極小モデル・プログラムは、与えられた代数多様体から出発して、双有理変換を繰り返し施すことにより標準因子のレベルを下げて行き、極小モデルと呼ばれる代数多様体を構成しようというプログラムです。原石の角を切り落として宝石を切り出すようなイメージです。私は、極小モデル理論の基礎となる定理として、Kawamata-Viehwegの消滅定理および固定点自由化定理を証明しました。また、森重文氏による曲線の錐の構造定理を特異点も許した一般の対数的多様体に対して拡張して証明しました。さらに周辺の結果としては、代数的ファイバー空間に付随したHodge束の半正値定理と、その応用としてのsubadjunction定理を証明しました。固定点自由化定理は微分形式の延長理論に発展し、subadjunction定理とともにアバンダンス予想などへの応用が見込まれます。

極小モデル理論は、主目的のひとつであった標準環の有限生成定理がBirkar-Cascini-Hacon-McKernanによって証明され、ひとつの節目を迎えました。しかし、一般的な代数多様体に対する極小モデルの存在はいまだ証明されていません。これはフリップの終結予想が一般的にはまだ証明されていないためです。フリップの終結は、因子の錐の集まり（扇）の有限性と密接に結びついているので、さらに詳しく研究したいと思っています。因子の錐と曲線の錐は互いに双対な錐であり、単独の多様体に対しては同値な存在ですが、フリップの列などで現れる多くの多様体を同時に把握するためには、因子の錐のほうが便利です。双有理同値によって多様体を取り替えたり、境界の因子を変更するという操作を行うと、因子の錐は隣りの錐に「壁越え」をしてつながっていくという性質があり、この現象を解明することが重要です。壁越えは「フロップ」に相当しますが、導来圏で考えると、表側または裏側を「壁廻り」することになります。

極小モデルの存在とともに、残された大問題が「アバンダンス予想」です。この予想は、もともと極小モデルの幾何学的性質に関するものですが、仮にアバンダンス予想が一般化された形で解ければ、極小モデルの存在も従うことがわかっています。そのためには微分形式の延長理論をさらに進化させることが必要になります。

極小モデル理論によって得られる代数多様体の構造論を、さらに精密化したものが導来圏の理論です。極小モデル理論における3つの基本的操作（因子収縮写像、フリップおよび森ファイバー空間）は、代数多様体のモデルを取り替えて、標準因子のレベルを下げていくという操作ですが、これが導来圏の半直交分解に対応しているとする哲学があります。しかし、極小モデル理論では自然に特異点をもった多様体が出てくるため、そのままでは導来圏の議論がうまく進まないことが知られています。したがって、正しい導来圏を特異点を持った一般の多様体やさらには対数的多様体に対して定義し、極小モデル・プログラムと導来圏の半直交分解が対応することを証明することを目標としています。

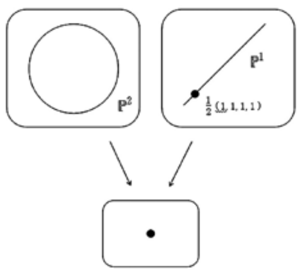

図1.
4次元フロップの例
（Franciaのフロップ）
次元が異なる例外集合が出てくるが、導来圏は同値である。

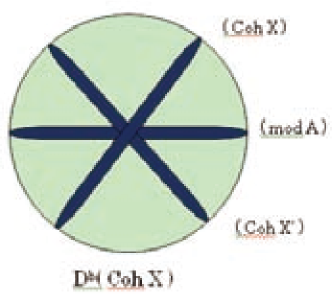

図2. 三角圏のt-構造
導来圏はより多くの対称性を持ち、構造の本質をとらえている。