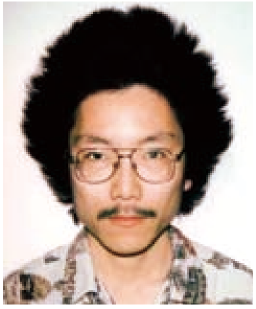


小澤登高

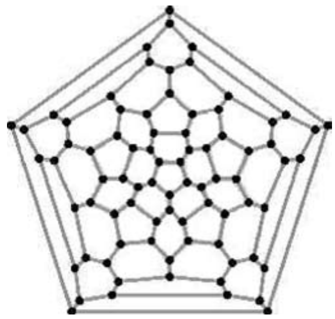
作用素環と離散群の研究

私は作用素環と離散群の関わりを研究している。（離散）群とは、任意の対象の対称性を記述するための数学言語である。例えば、ある結晶が与えられたとき、その結晶構造を変えない変換（回転操作、鏡映操作、反転操作など）全体を考えたものが群である。人間には線形的な構造の方が理解しやすいので、群の各要素を適当な（線形）空間上の作用素とみなして取り扱うことにする。さらに、そうした作用素全体が生成する代数系を考え、適当な位相で完備化すれば作用素環と呼ばれる対象ができる。位相の存在により、群論のような代数的な問題に対しても解析的なテクニックを使えるところが作用素環論の特徴である。作用素環の研究はそもそもは、John von Neumann が量子力学の数学的取り扱いを目指して始めたものであったが、現在では数理物理だけでなく、幾何学、群論、エルゴード理論などに幅広い応用がある。私の研究は双方向的で、幾何学、群論、エルゴード理論の作用素環論への応用と、その逆を同時に扱っている。

von Neumann

私の最近の研究テーマは、群の解析的な意味での有限近似、及び、離散群とその確率空間への作用から構成される作用素環（II_1 因子環）の分類問題、の二つである。理想的な有限近似が可能な群を従順群と呼ぶが、応用上、従順でない群も扱わなければならないことが多い。そこで私は従順性を大幅に弱めた条件である完全性（exactness）について研究をしている。特に群の完全性の便利な特徴づけを得て、それまで別々に行われていた先行研究を統合し、どのような群が完全であるかを調べた。すべての群は完全であるという予想が当時あったが、この研究の結果、よく知られている群のほとんどが実際に完全であること、しかし世の中には完全でない群も存在することが判明した。完全性は作用素環論における群の取り扱いにおいて重要なほか、幾何学における重要予想である強Novikov予想を導くことが知られている。また、II_1 因子環の分類問題に幾何学的アイディアを導入することにより、これまでにないまったく新しい現象を発見した。この新理論にはエルゴード理論における軌道同値問題への応用もある。

群に関する解析学は我々の日常生活にも関与している。非常に高い連結性を持ちながらも、辺の数が少ない有限グラフのことをエクスパンダーと呼ぶ。（右図は８０個の頂点からなる平面エクスパンダーである。どのような１０個の頂点を取り除いても、一番大きい連結成分は４０個以上の頂点からなる、などといった性質を持ち、強靭なネットワークであると言える。）エクスパンダーは、作用素環論を含む「純粋」数学において重要なだけでなく、理論計算機科学、ネットワーク理論、誤り訂正符号理論などの「応用」数学に対する応用も豊富である。いくらでも大きなサイズのエクスパンダーが存在すること自体は古くから知られていたが、初めて具体的に構成したのはGregory Margulis（１９７３）である。その構成には群の解析学（表現論）における深甚な定理が使われている。



エクスパンダー

Margulis の手法（あるいはその改良）によればエクスパンダーを作るにはKazhdan の性質（T）を持つ群が必要である。この分野では最近Yehuda Shalom によるブレイクスルーがあり、想像以上に多くの群がKazhdan の性質（T）を持つことが示された。私はShalom が提出した問題を解決し、彼の結果を改良することに成功した。すなわち、性質（T）に付随する定数の評価を得られる別証明を得た。これはエクスパンダーの連結性がどれくらい高いかを評価するのにも使われる。