

代数多様体の爆発 Blow-up

2024 / 11 / 23

東大数理 公開講座 石井志保子

今日の主題

「爆発は役に立つ」



プログラム

1. 代数多様体とは何か

2. 代数多様体の特異点

3. 代数多様体を爆発させる

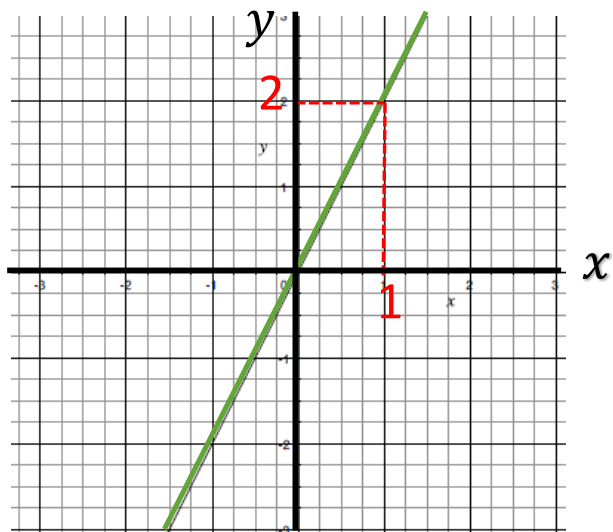
4. 広中の特異点解消定理

5. 未解決問題

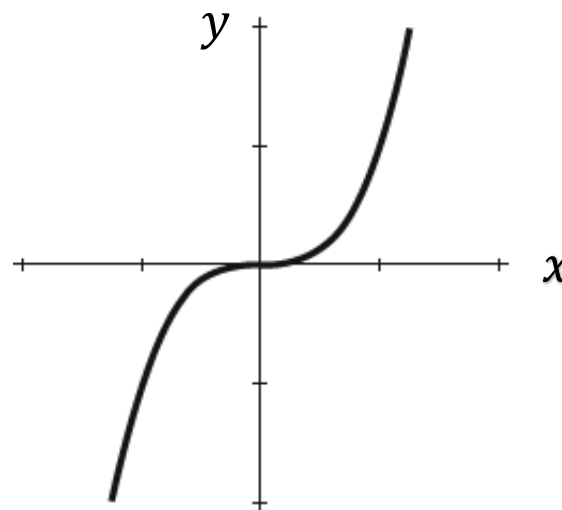
1.代数多様体とは何か？

- 実は、皆様は中学生の頃にすでに代数多様体を勉強しています

$y = 2x$ のグラフ



$y = x^3$ のグラフ

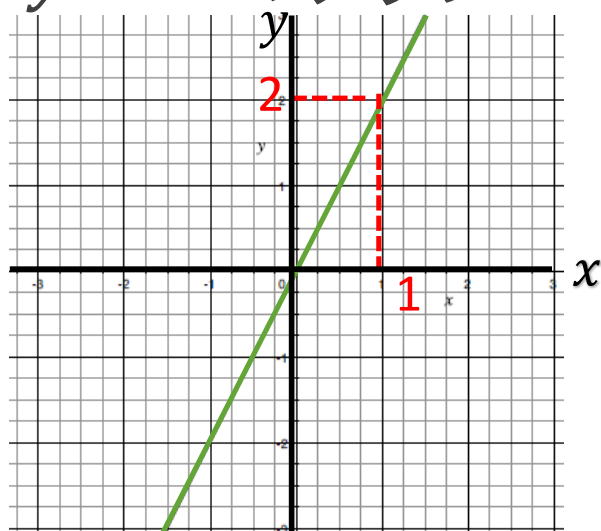


これらはいずれも代数多様体の例



これらはいずれも代数多様体の例

$y = 2x$ のグラフ



グラフとはなにか？

xy 平面の点 $P = (x, y)$

その座標 x, y が

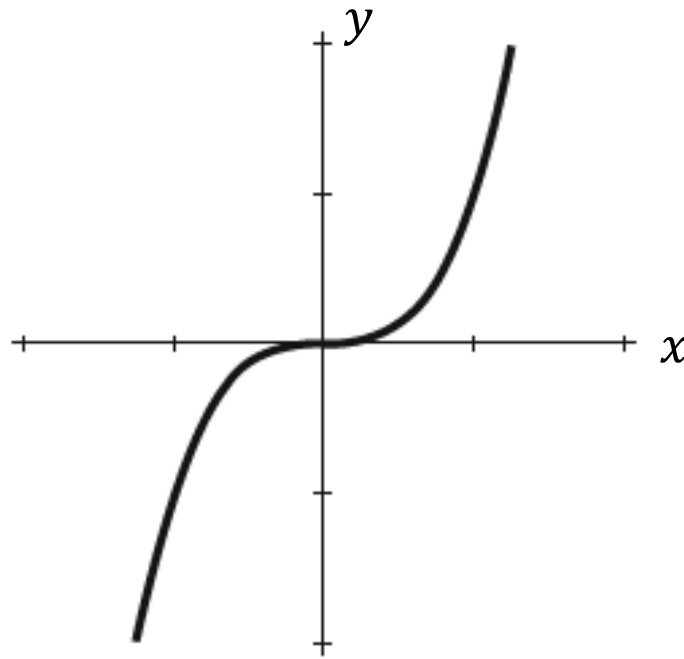
$y = 2x$ という関係を満たす

点 (x, y) 全体

$$\text{「} y = 2x \text{ のグラフ」} = \{(x, y) \mid y = 2x\}$$

$$y = x^3 \text{ のグラフ} = \{(x, y) \mid y = x^3\}$$

$y = x^3$ のグラフ



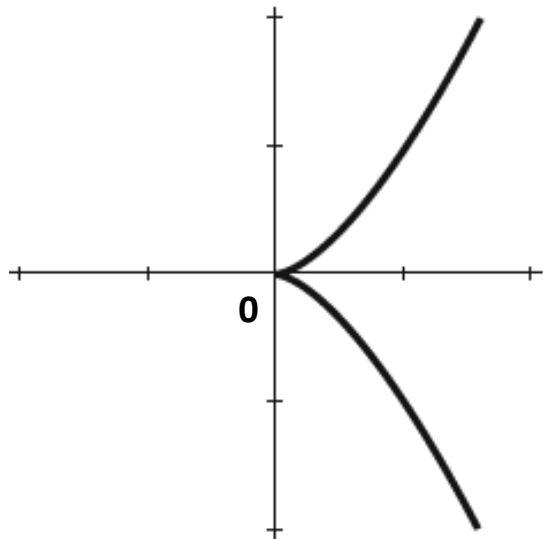
$$= \{(x, y) \mid x^3 - y = 0\}$$

$$X = \{(x, y) | f(x, y) = 0\}$$

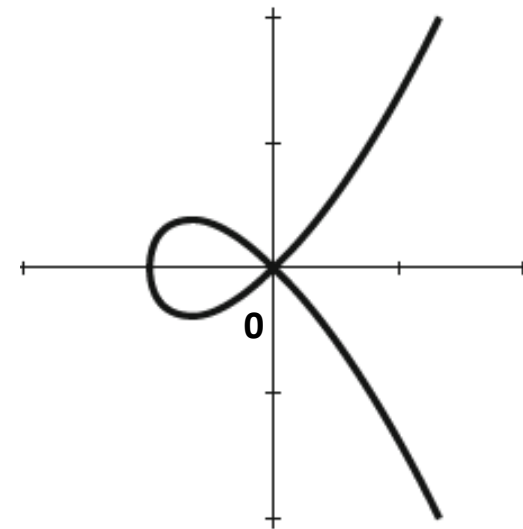
このような形で表わされる
「点集合」を平面上の
代数多様体と呼ぶ

↑ 多項式

例1 $X_1 = \{(x, y) | y^2 - x^3 = 0\}$



例2 $X_2 = \{(x, y) | y^2 - x^2 - x^3 = 0\}$



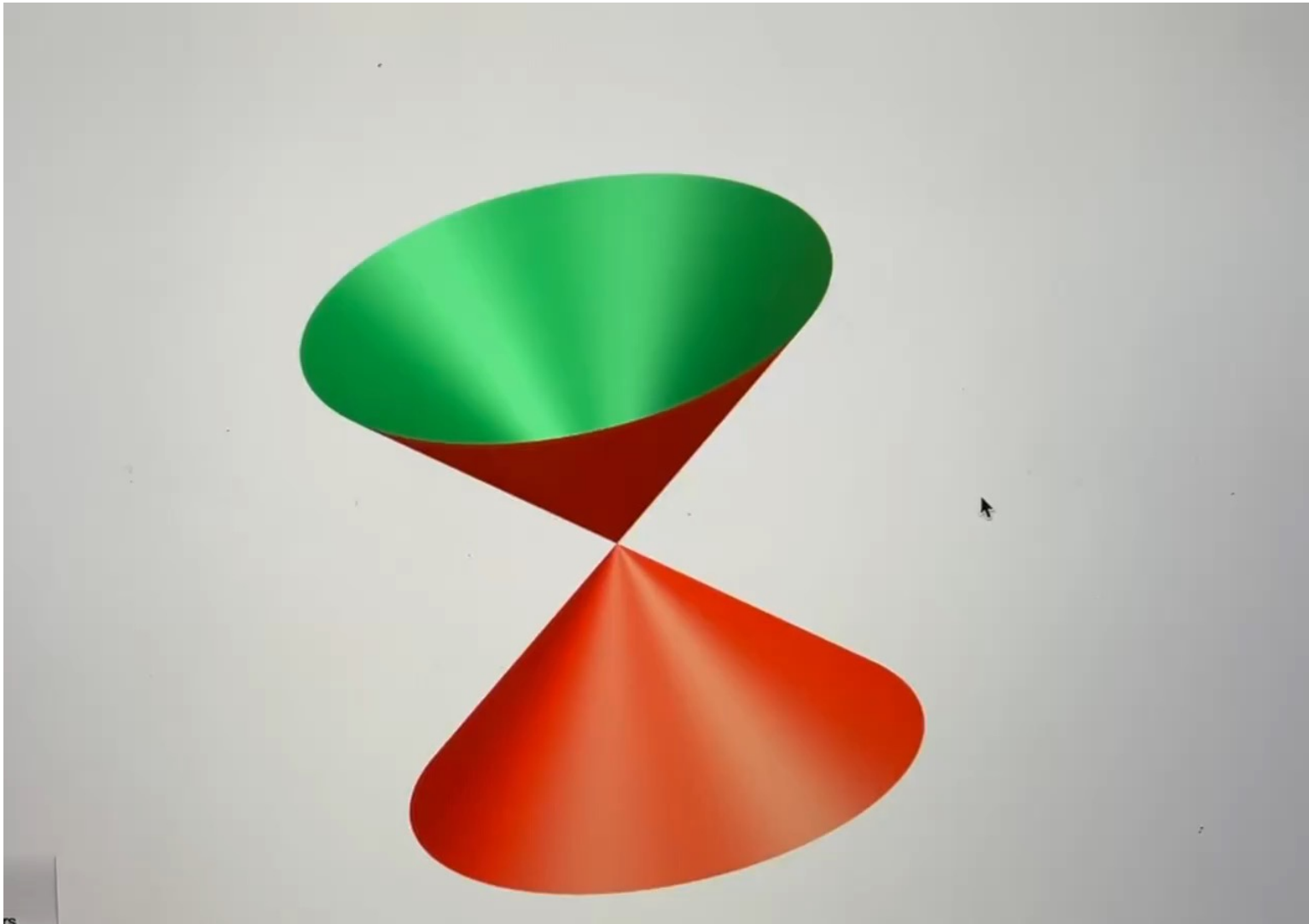
■ これまでの代数多様体は、 xy 平面上の曲線

■ xyz 空間の代数多様体の例を見よう

■ $Y_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$

■ どのような形をしているか見てみましょう



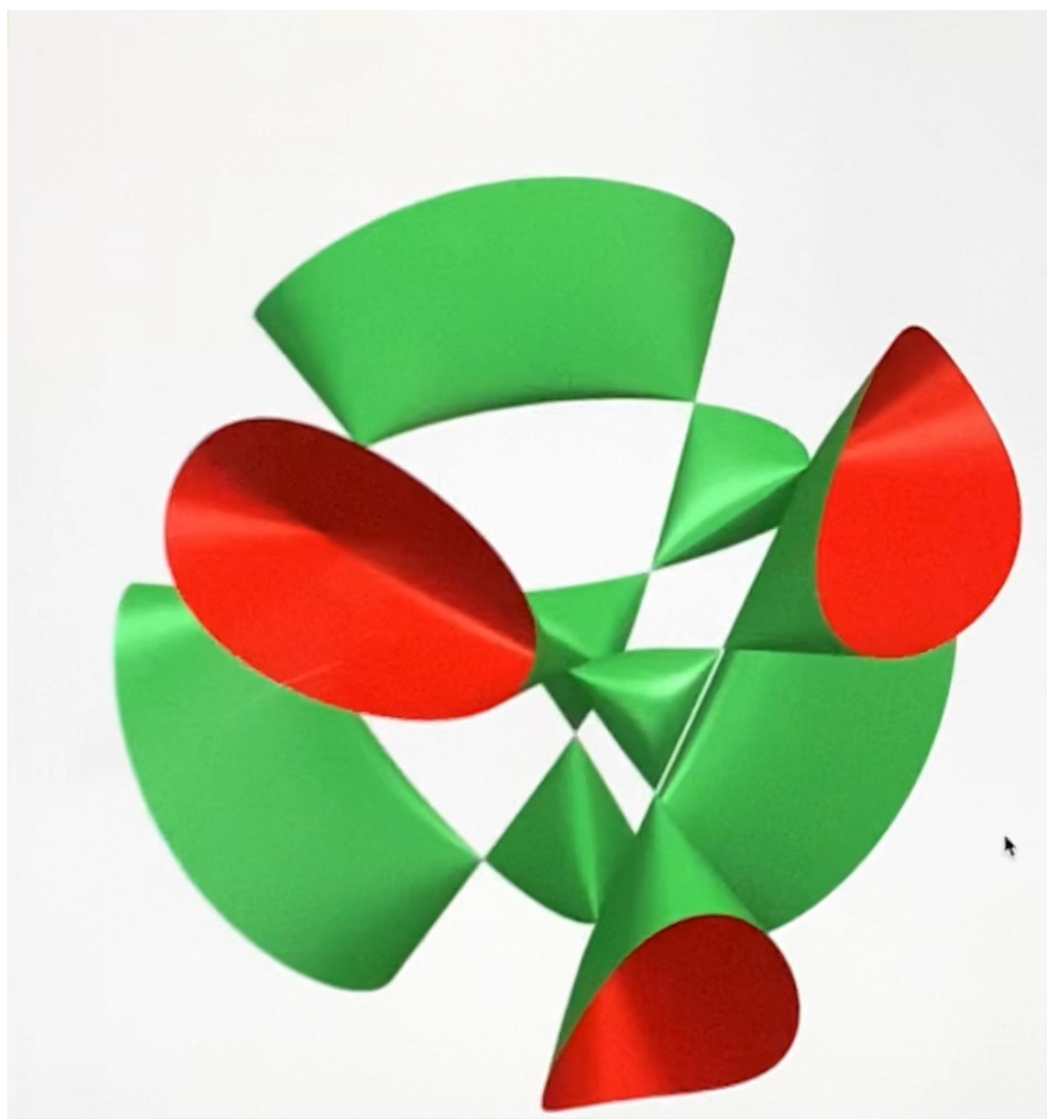


もう少し複雑な2次元の代数多様体(代数曲面)

$$Y_2 = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{array}{l} (x^2 + y^2 + z^2 - 1.69)^2 \\ - 3.87(1 - z - \sqrt{2}x)(1 - z + \sqrt{2}x)(1 + z + \sqrt{2}y)(1 + z - \sqrt{2}y) = 0 \end{array} \right\}$$

Kummer曲面と呼ばれる
(クンマー)

4次の多項式



2. 代数多様体の特異点



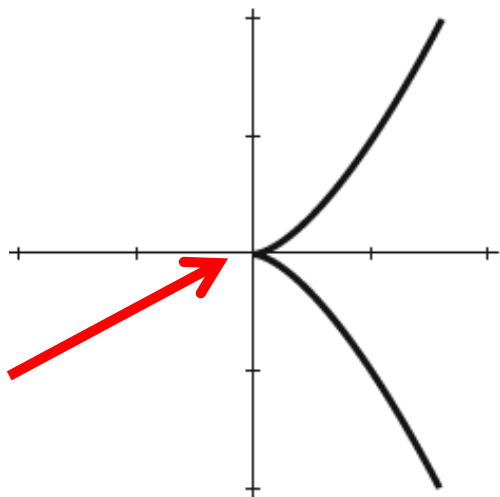
2. 代数多様体の特異点

直観的には『なめらかでない点』＝特異点

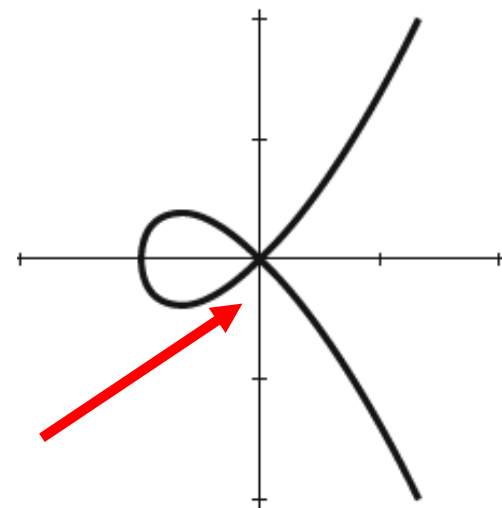
『なめらかな点』＝非特異点

$$X_1 = \{(x, y) \mid y^2 - x^3 = 0\}$$

$$X_2 = \{(x, y) \mid y^2 - x^2 - x^3 = 0\}$$

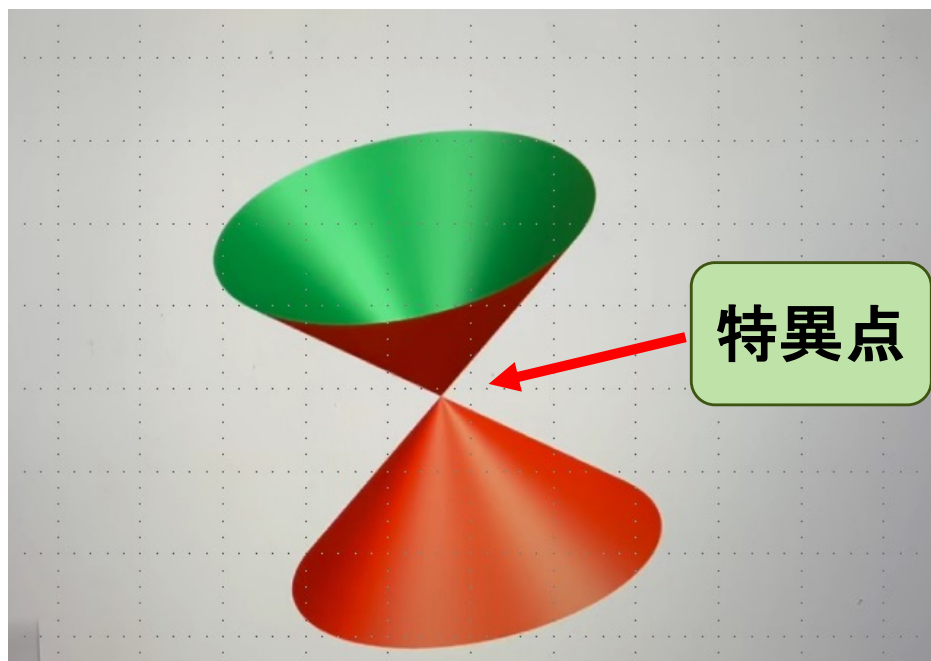


特異点

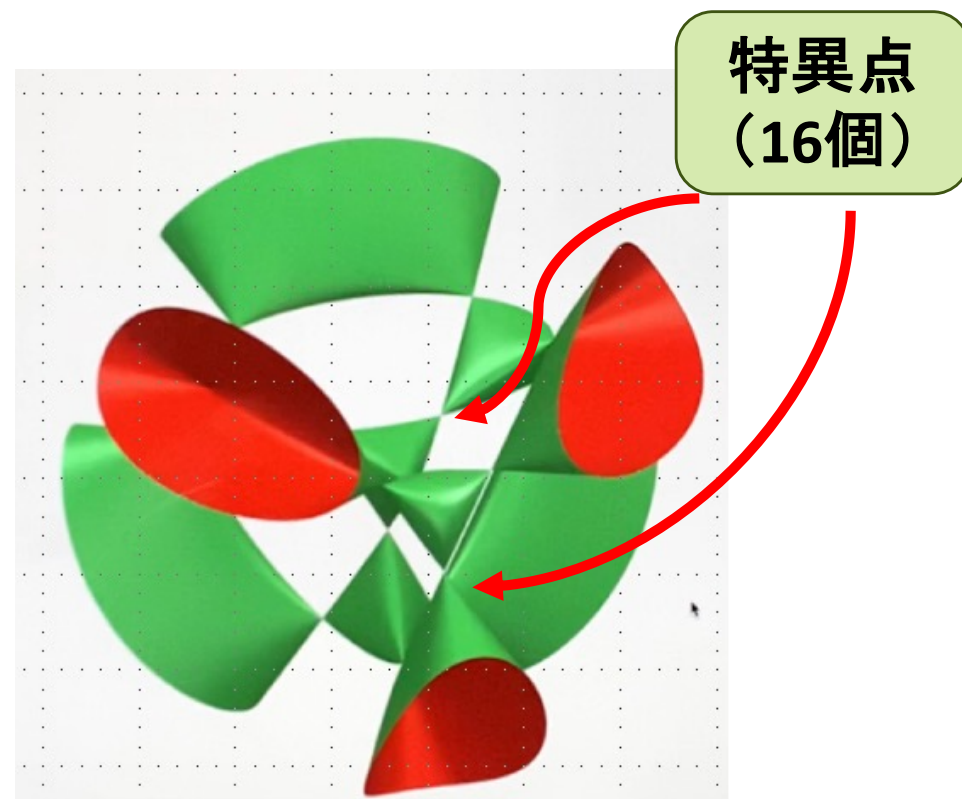


特異点

$$Y_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$



Y_2 : Kummer曲面



- 数学的に厳密な定義が必要
- なぜ必要か？
- 高い次元の代数多様体はなめらかかどうか視覚的に確かめられない

■定義1■ X : 平面曲線 (1次元代数多様体)

$P = (x, y) \in X$ が特異点

$\Leftrightarrow P$ での X の接線が2つ以上ある

■定義2■ X : 空間曲面 (2次元代数多様体)

$P = (x, y, z) \in X$ が特異点

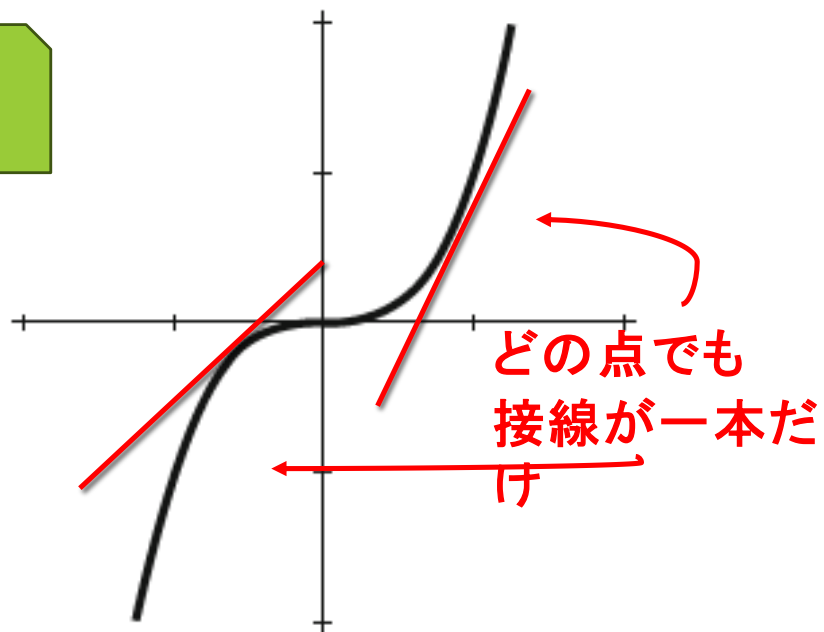
$\Leftrightarrow P$ での X の接平面が2つ以上ある

■定義3■ X : n 次元 代数多様体

$P = (X_1, \dots, X_{n+1}) \in X$ が特異点

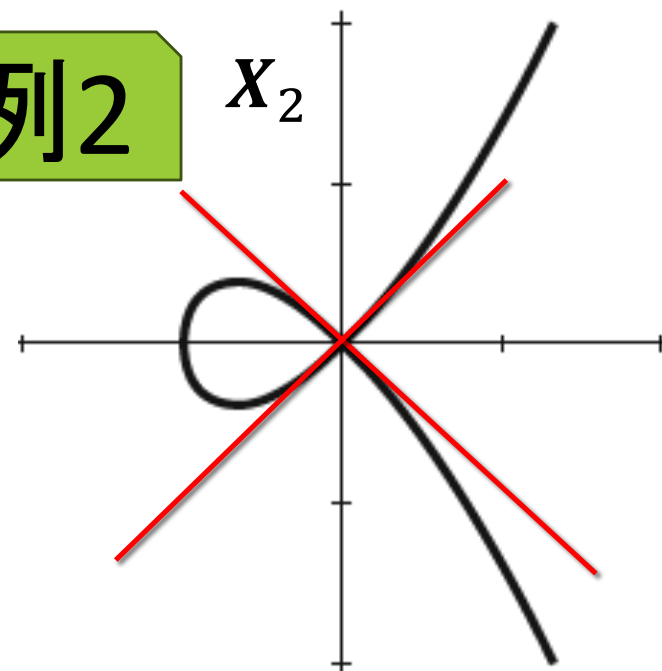
$\Leftrightarrow P$ での X の接 n 次元空間が2つ以上ある

例1



ここに見える
どの点も 非特異点

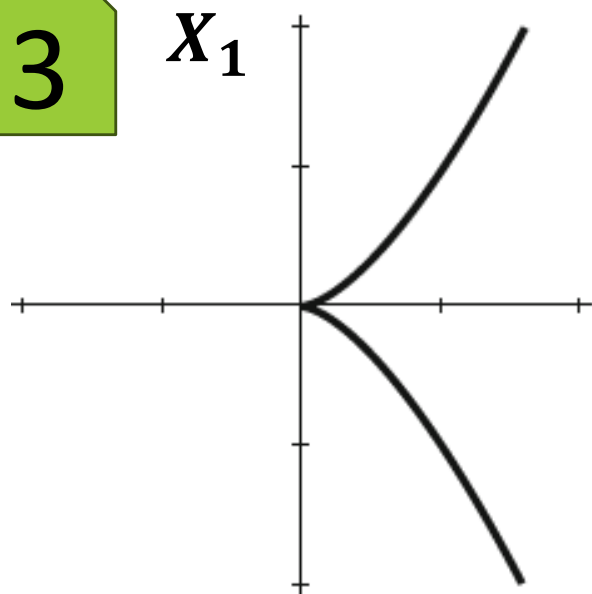
例2



原点では接線が2本

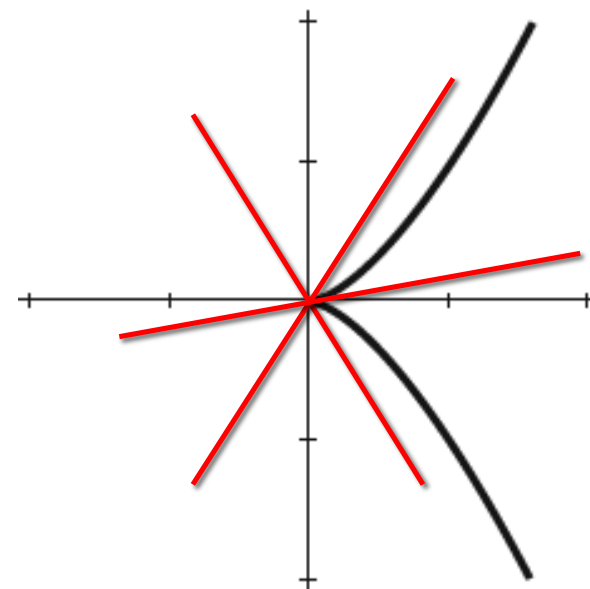
原点 0 は x_2 の
特異点

例3



■ 実は原点 0 を通るすべての直線が x_1 の原点での接線

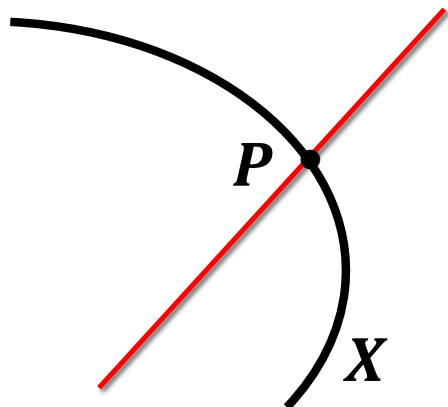
- 接線は1本だけ？
- では 非特異？
- でもなめらかでないよ



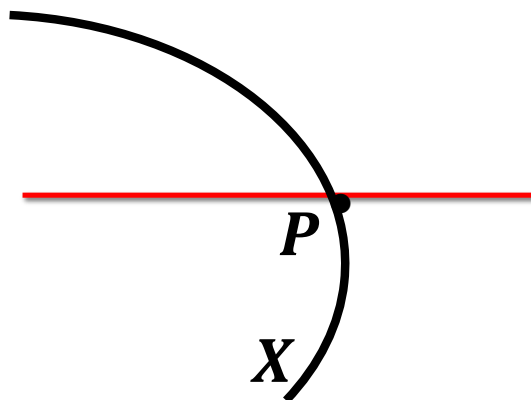
なぜ？

接線とは、そもそも何だったか？

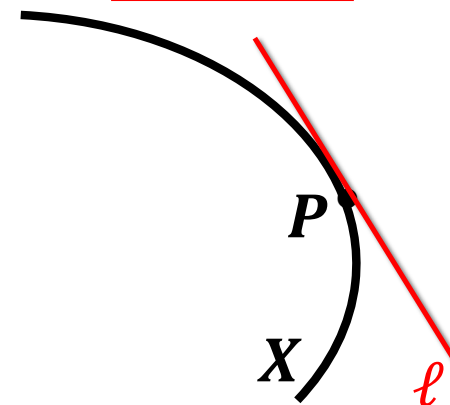
■ 接線でない



■ 接線でない

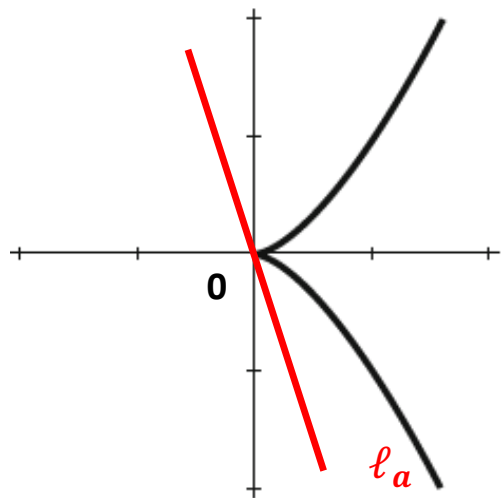


■ 接線だ



“X と直線の交わりが重複”

ℓ の式をXの式に代入 → 重根



$$X_1 = \{(x, y) \mid y^2 - x^3 = 0\}$$

$$\ell_a = \{(x, y) \mid y + ax = 0\}, \ell_\infty = \{(x, y) \mid x = 0\}$$

(これらが 0 を通る直線のすべて)

$y = -ax$ を $y^2 - x^3 = 0$ に代入

$$a^2 x^2 - x^3 = 0$$

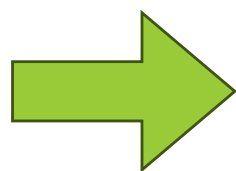
$$\parallel$$

$$x^2(a^2 - x) \rightarrow x = 0 \text{ は 重根}$$

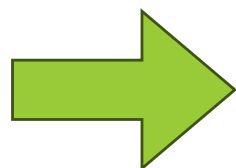
任意の ℓ_a は原点での接線

ℓ_∞ についても同様にできる

■ といふわけで、原点を通る直線はすべて X_1 の『接線』だ



原点を通る X_1 の接線は2個以上ある



原点は X_1 の特異点

■ これで X_1 , X_2 の原点が特異点であることがわかった

■ 曲線上に点は無限個ある

■ では、特異点はどこにあるのか？

$$X = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$$

$P = (a, b)$ を X 上の点とする

■ P が X の特異点 $\leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}(a, b) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}(a, b) = 0$

$f(x, y)$ を x の関数
(y は定数) と思って微分

$f(x, y)$ を y の関数
(x は定数) と思って微分

例

$$X_2 = \{(x, y) \mid f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3 = 0\}$$

は原点が特異点だった 原点以外に特異点はあるか？

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x - 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -2a - 3a^2 = -a(2 + 3a) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 & \text{又は} \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2b = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0$$

したがって $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ となる (a, b) は $(0, 0)$ か $(-\frac{2}{3}, 0)$ のみ

● $(0, 0)$ は $f(0, 0) = 0$ なので、 X_2 の点

● $(-\frac{2}{3}, 0)$ は $f(-\frac{2}{3}, 0) \neq 0$ なので X_2 の点ではない

「 X_2 の特異点
は原点のみ！」

演習問題

$f = 2x^3 + 3x^2y^2 + y^4$ とするとき

$X = \{(x, y) | f(x, y) = 0\}$ の特異点を探そう

X が $f(x, y) = 0$ で定義されているとき

X 上の点 $P = (a, b)$ が特異点 $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$

なぜ？

$x' = x - a, y' = y - b$ と座標変換すると P の $x'y'$ 座標は $(0, 0)$

$f(x, y) = f(x' + a, y' + b) = F(x', y')$ とおくと

$F(x', y') = F_0 + F_1 + F_{\geq 2}$ と表すと

定数項

x', y' の1次式

x', y' の2次以上の式

$F_0 = 0$ ($F(0, 0) = 0$ より)

$F_1 = cx' + dy'$ とおく

【 I 】

$F_1 \not\equiv 0$ (c, d の少なくとも1つが $\neq 0$) のとき

$F_1 = 0$ が X の P での唯一の接線
したがって P は X の非特異点

【 II 】

$F_1 \equiv 0$ ($c = d = 0$) のとき

P を通る任意の直線が X の P での接線
したがって P は X の特異点

〔 I の証明 〕

実際 $d \neq 0$ として $y' = -\frac{c}{d}x'$ を F に代入すると

$$F(x', -\frac{c}{d}x') = \underbrace{F_1(x', -\frac{c}{d}x')}_{\parallel 0} + \underset{\substack{\uparrow \\ x' \text{ の2次以上の式}}}{F_{\geq 2}(x', -\frac{c}{d}x')}$$

したがって $F(x', -\frac{c}{d}x') = 0$ は P で重根をもつ

➡ $F_1(x', y') = 0$ は接線を決める

このとき $F_1 = 0$ は唯一の接線である

実際これ以外の P を通る直線は

$$G(x', y') = ex' + ky' \quad e: k \neq c: d \text{ と表される}$$

$k \neq 0$ として $y' = -\frac{e}{k}x'$ を F に代入すると

$$F(x', -\frac{e}{k}x') = \underbrace{\left(c - \frac{de}{k}\right)}_{\neq 0} x' + (x' \text{ の2次以上の式})$$

よって $x' = 0$ は $F(x', -\frac{e}{k}x') = 0$ の単根
 $G(x', y') = 0$ は P での接線ではない

〔Ⅱの証明〕

P を通る任意の直線 $\ell(x', y') = rx' + sy' = 0$
は $s \neq 0$ として $y' = -\frac{r}{s}x'$ を F に代入

$F\left(x', -\frac{r}{s}x'\right) = x'$ の2次以上の式 $= x'^2(\dots)$
となり $x' = 0$ は重根となる

→ ℓ は P での接線となる

I, II まとめると

$c = d = 0 \iff P \text{ は } X \text{ の特異点}$

ここで $c = \frac{\partial F}{\partial x'}(0, 0)$, $d = \frac{\partial F}{\partial y'}(0, 0)$ が成立する

実際 : $\frac{\partial F}{\partial x'} = c + \underbrace{\frac{\partial F_{\geq 2}}{\partial x'}} \longleftarrow x', y'$ に関する一次以上の式
($x' = y' = 0$ を代入すると 0)

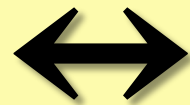
$$\frac{\partial F}{\partial x'}(0, 0) = c$$

同様に $\frac{\partial F}{\partial y'}(0, 0) = d$

注 : $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial F}{\partial x'}(0, 0) = c$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial F}{\partial y'}(0, 0) = d$

X が $f(x, y) = 0$ で定義されているとき,

X 上の点 $P = (a, b)$ が特異点

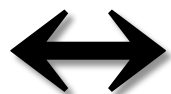


$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

n 次元代数多様体の場合

X が $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$ で定義されているとき

X 上の点 $P = (a_1, \dots, a_{n+1})$ が特異点



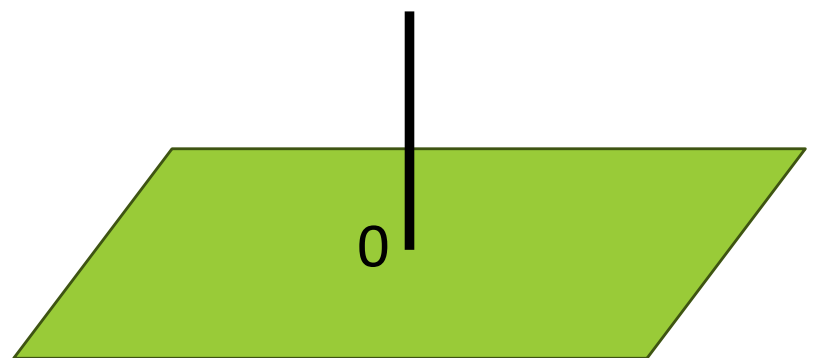
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_{n+1}) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a_1, \dots, a_{n+1}) = 0$$

3.代数多様体を爆発させる



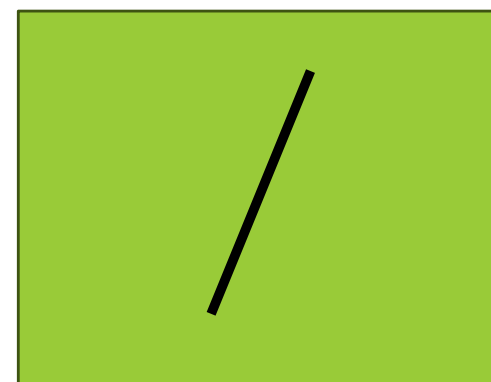
3.代数多様体を爆発させる

- ここでは平面を原点で爆発させる方法を紹介
- 具体的には、 xy 平面の原点を爆発させて直線におき換える



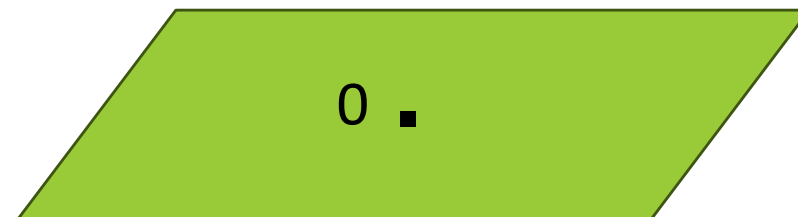
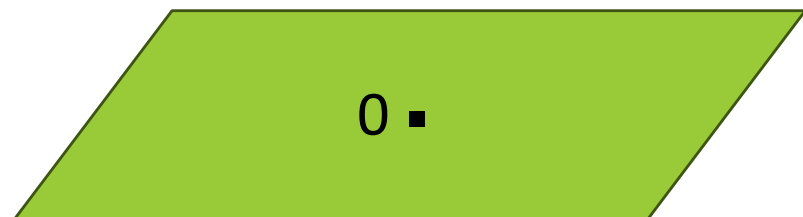
爆発？

No!

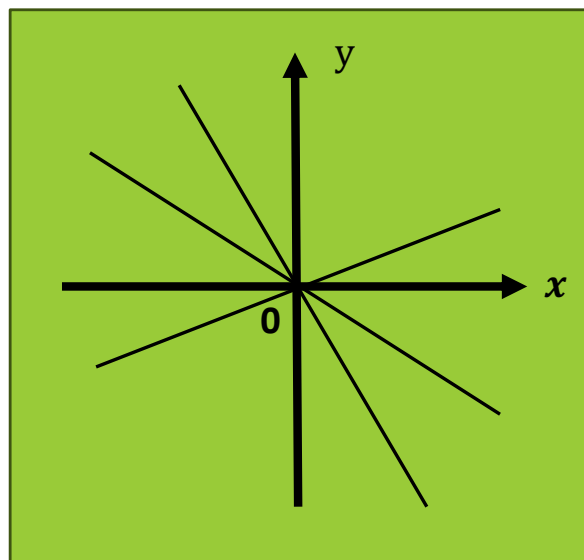


爆発？

Yes!



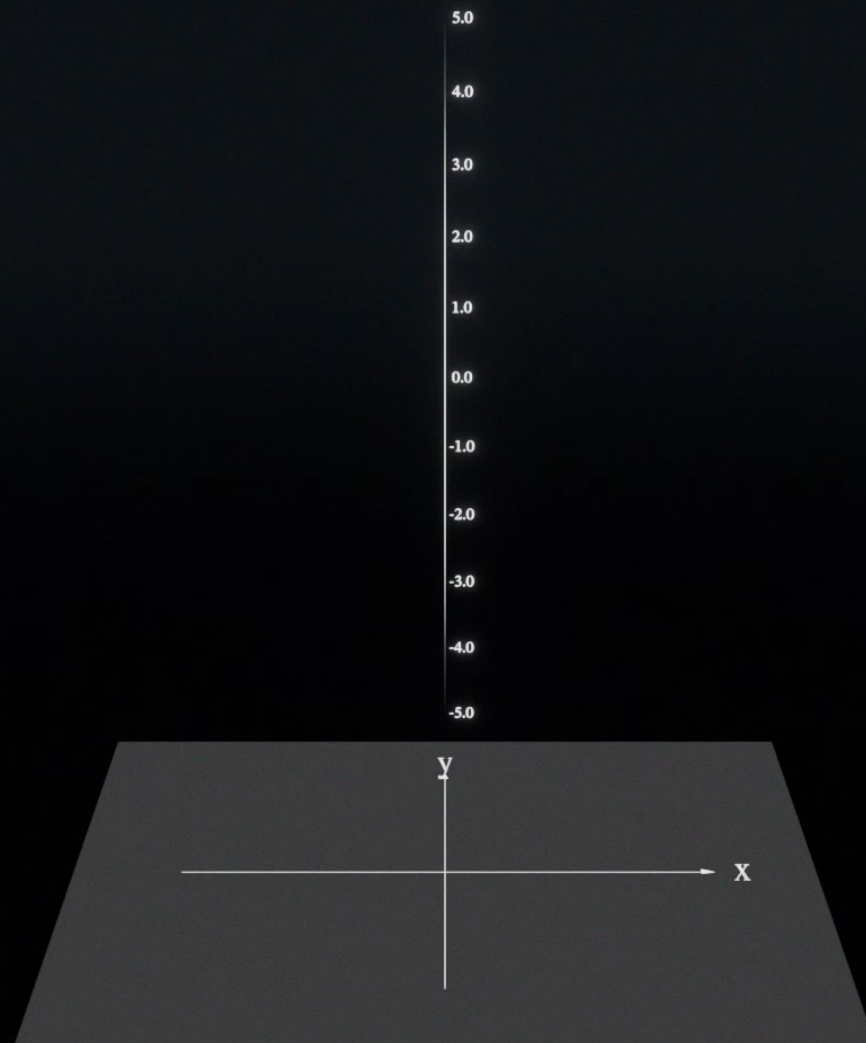
平面上の原点を通る無限個の直線を
ばらばらにしよう

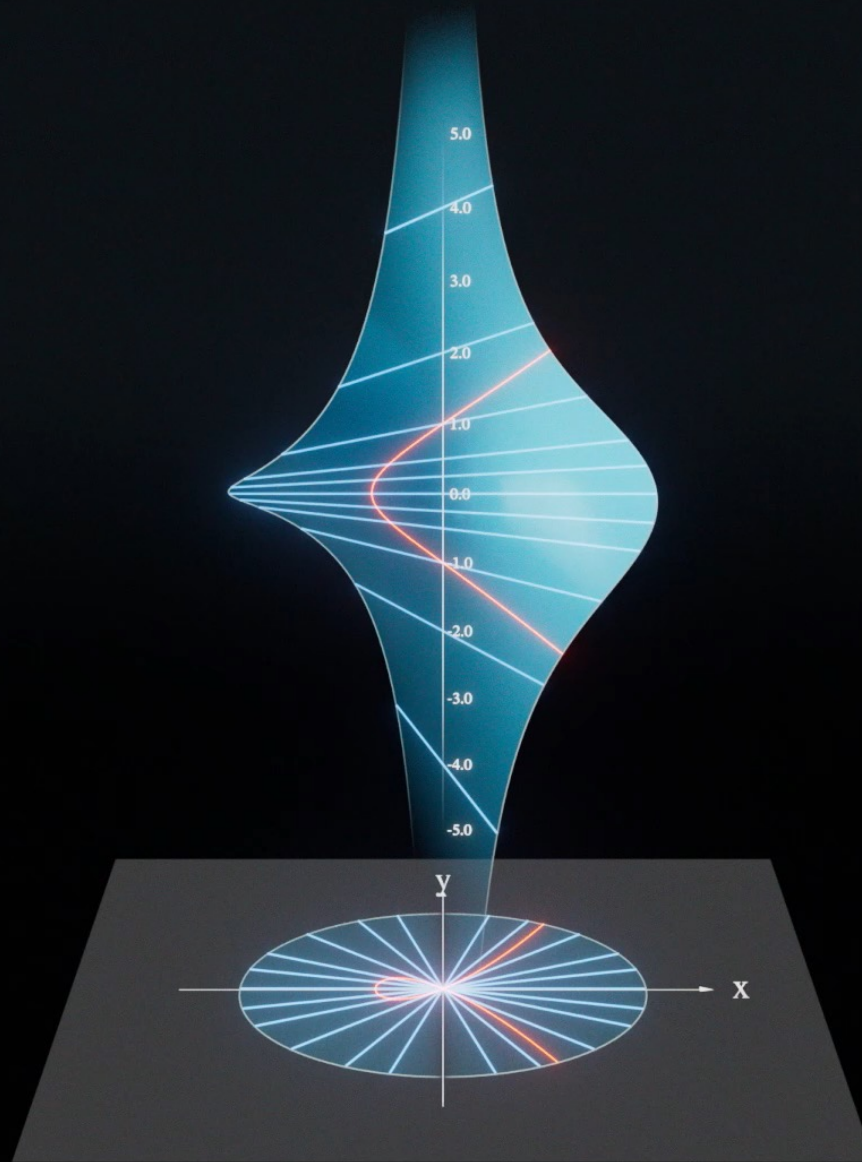


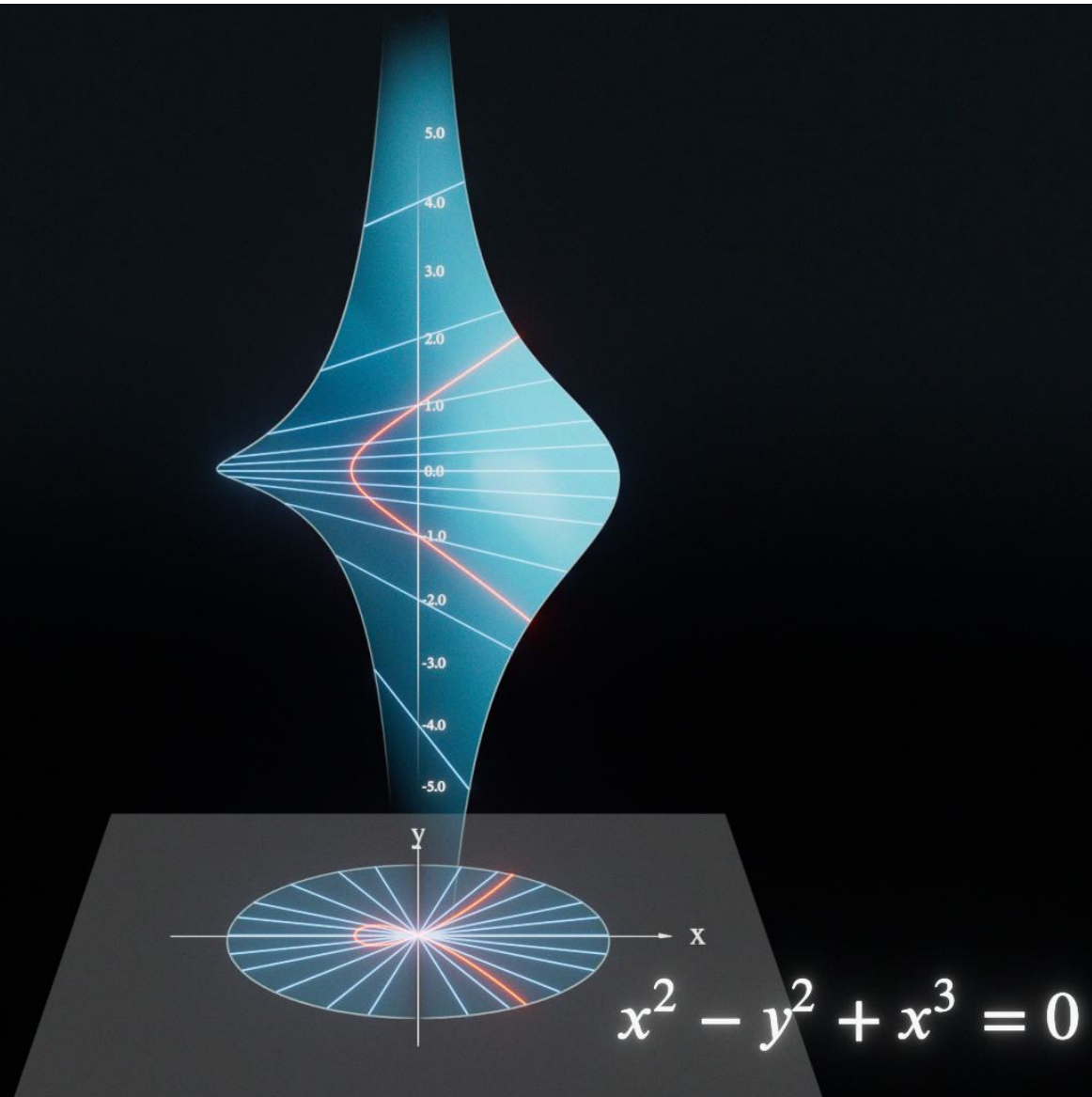
$P \neq (0, 0)$ とすると
 P と原点を通る直線が唯一決まる



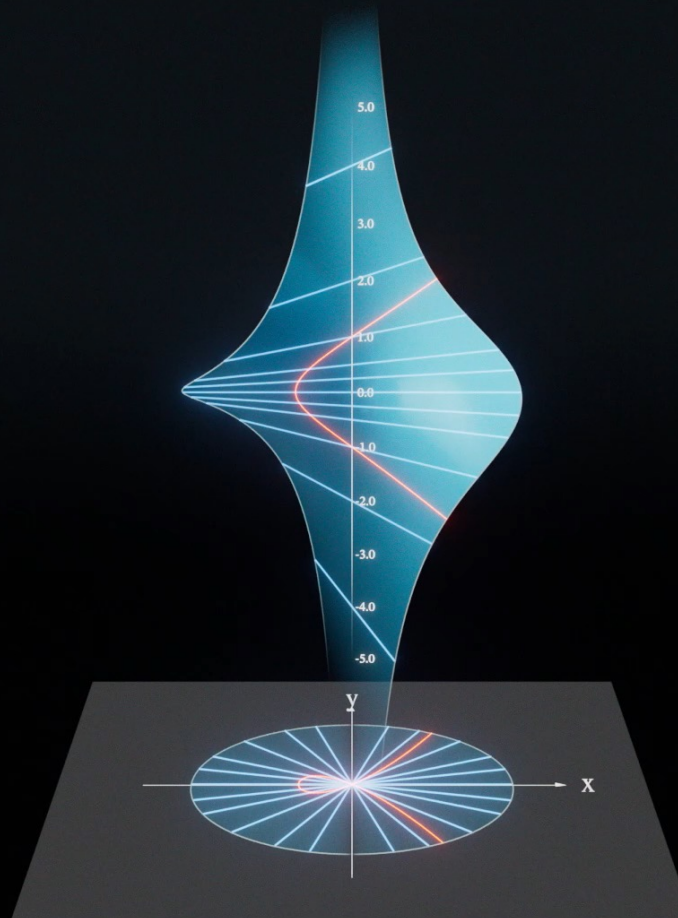
傾きだけで決まる







4. 広中の特異点解消定理



- 下の平面上にある特異点をもつ曲線が爆発後は非特異に変わっている！
- 他の部分は変えずに 特異点だけがなめらかに変わっている！
- このような操作を
特異点の解消 と呼ぶ

- 前世紀から人々(数学者)は、非特異なものが代数多様体の本来の姿だと考えてきた
- 特異点があると その代数多様体の本質的な性質がわかりづらい
- 『特異点を持つ多様体は、非特異なものがつぶれてできたものに違いない』



- 『もとの姿を復元しよう』



特異点の解消問題

- 多くの数学者がこの問題にチャレンジ → でもなかなかできなかった
- 1次元, 2次元の代数多様体の特異点は、爆発を何回かくり返すことにより 非特異なものに変換できることはわかっていた
- (アニメーションの曲線の特異点の場合は 1回の爆発だけでOK)

**定理 任意次元の代数多様体の特異点は
何回かの爆発 により解消できる**

- 1964年 広中平祐先生(ハーバード大学)による

→ **フィールズ賞受賞**

代数多様体の研究が 飛躍的に発展



5. 未解決問題

しかし,
特異点解消問題が解決していないもう一つの世界がある

■ 代数多様体

$$X = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mid f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0\}$$

これらが 標数 0 の体 の数ならば

$1 + \dots + 1 \neq 0$
1を何回足しても0にならないという性質

加減乗除ができる
数の体系

➡ 広中の特異点解消定理より

X の特異点解消が存在する

標数 0

: 我々の良く知っている実数体や複素数体

標数 $p > 0$

: $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{個}} = 0$ となるような数の体系

このような最小の正整数 n が素数ならば

数の体系が矛盾なく存在

p と書く

『正標数の体』又は
『標数 $p > 0$ の体』 と呼ぶ

■ 代数多様体

$$X = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0\}$$



標数 $p > 0$ の体の数

この場合 X の特異点解消問題は未解決

■ この問題の完全解決が待ち望まれている

■ でもなぜ

- ・正標数の体を考えるのか？
- ・役に立つの？

実はとても役に立つ！

■ 例) 暗号理論に正標数の体が用いられている

■ IT機器の通信には暗号が用いられている

- ・メールやネットでの注文など
通信文は暗号化された電気信号で送られる

暗号がないと

- ・プライバシーだだもれ
- ・現在のIT社会はあり得ない

(正標数の体がないと、IT社会はありえない)

正標数の体が歴史に登場したのは200年以上前

- 当時の交通手段は馬や馬車
- 電話もまだ発明されていない
- 正標数の体が将来このように役に立つとは誰も想像していなかった
- でもおもしろいことを追求し続けていた数学者達がいいたからこそ、現在の社会がある
- その時すぐに役に立つもののだけでなく、数百年後に役に立つかもしれないことに夢中になることも大切

面白そうならチャレンジ
してみる価値あるかも

ご清聴ありがとうございました