

流体運動の数学研究とその社会的意義

Tsuyoshi Yoneda
University of Tokyo

最近の風力発電開発（流体力学が直結する産業分野）

- (Takeshi Ishihara) 日本の風力エネルギー賦存量は **2005 年の東京電力の年間販売量とほぼ等しい**。さらに経済的社会的な制約条件を考慮した場合でも、東京電力の供給量の 28 % に相当する。
- (Takeshi Ishihara) 我が国でも洋上風力開発は進んでおり、東日本大震災の被災地でそのプロジェクトが進んでいる。**福島県の沖合に世界初の浮体式（海底に固定しない）洋上風力発電基地が実現（福島洋上風力コンソーシアム）**。



Figure: 福島県沖の洋上発電（2013/11/11）：家電 Watch より抜粋

印象：将来的に、洋上風力発電はビジネスとして成り立ちうる産業だ

風力発電自体の研究も進展：風力発電のブレード開発

Ohya と Karasudani は、羽のまわりに拡散型の囲いをつけた新しい風力発電を開発した。拡散型の囲いは入り口付近の風を加速させる効果がある。

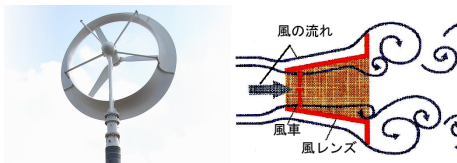


Figure: Photo and picture by Kyushu Univ.

なぜ拡散型の囲いは風を加速させるのか？

- シアにより生成される渦が流体自身の圧力を低下させ、入り口付近の流体粒子がその低圧部分に向かって加速される（天気予報の低気圧と高気圧）。シアのイメージ：電車のすれ違い
- なぜ、シア流自身が渦を安定的に生成するのか？（結局、流体研究の核心は、シアと小スケール渦の非線形相互作用に帰着される） Show the movie “pasokondemiru nagarenokagaku” by Yagawa

数学者の流体研究に対する社会的意義（大きな目標）

渦の生成メカニズム解明と、そこから得られるより大きな揚力（エネルギー獲得）の実現！（ブレード形状の劇的な改良など）

自然に学ぶネイチャーテクノロジー（Gakken, 2011 Sep.）

- File 17 **トンボの羽**：羽の凹凸が渦を発生し、閉じ込め、そして揚力を生み出す Akira Obata（日本文理大学）， Sakajo Crest project
- File 39 **ハチドリの羽**：羽ばたきによって自重をはるかに上回る揚力（メカニズムは謎）羽から垂直な方向に軸を持つ渦が生成される Hiroshi Ryu（千葉大学） Hiroto Tanaka（東工大）

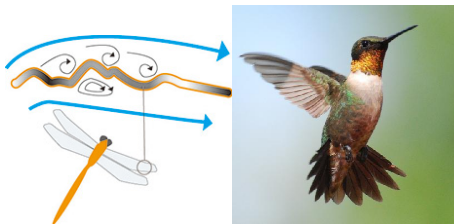


Figure: <http://web-japan.org> and <http://nature-sr.com> より抜粋

今から、シアと小スケール渦の非線形相互作用の研究
(最近の私の研究動向) に注力しよう！

(イメージ : movie: Kelvin-Helmholtz instability!)

方程式を使わずに流体の幾何学的イメージを説明！

- NS 方程式の解の存在・一意性定理 (100 万ドル懸賞問題)

$$(\text{Navier-Stokes equations}) \quad \partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \nu \Delta u, \quad \nabla \cdot u = 0$$

$\nu \geq 0$ を粘性係数という。境界による渦の生成を調べるときは ν を正値にとる。今から、境界に関わらない乱流的運動を調べるので、ゼロとしてよい (オイラー方程式)。 p は圧力 u は速度場

- 最近の私の研究の出発点：
ブレイクスルー：Kiselev-Sverak 2014, Bourgain-Li 2015
- 微分同相写像群：Misiolek 1993, 1996 (後で説明)

よりイメージが湧きやすい方程式へ変換しよう！

η 流体粒子 $\cdot \omega$ 渦度場 $\cdot u$ 速度場 (サイエンス社・SGC ライブラリの本)

$$\begin{cases} u = \nabla \times \Delta^{-1} \omega & (\text{渦度場が速度場を生成: Biot-Savart law}) \\ \partial_t \eta = u \circ \eta & (\text{速度場に沿って流体粒子が移動}) \\ \omega \circ \eta = D\eta \omega_0 & (\text{流体粒子の塊の伸縮が渦度を決定: 2D では粒子凍結}) \end{cases}$$

流体粒子 η のイメージ

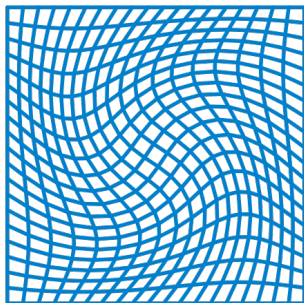


Figure: Picture by Wikipedia

非圧縮性条件 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ により、体積保存（volume-preserving）が成立する。よって、時間発展により、各微小な長方形・平行四辺形の面積は変わらない。

ベクトル場と Biot-Savart law (外積/ (距離の三乗))

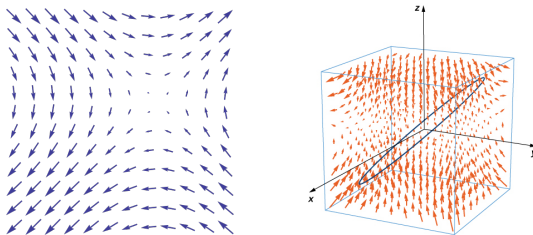


Figure: Picture by Wikipedia and LibreTexts

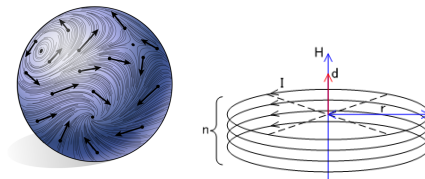
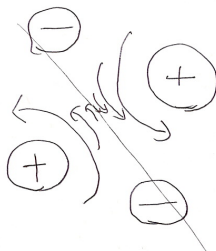
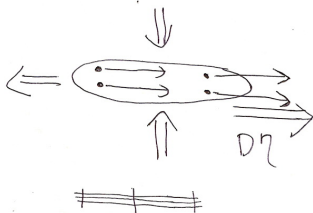
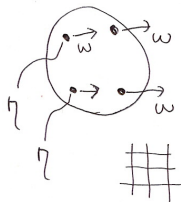
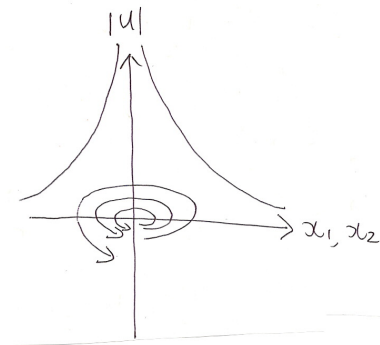
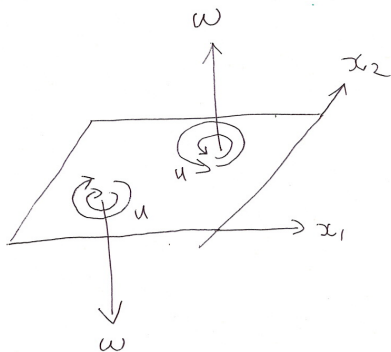
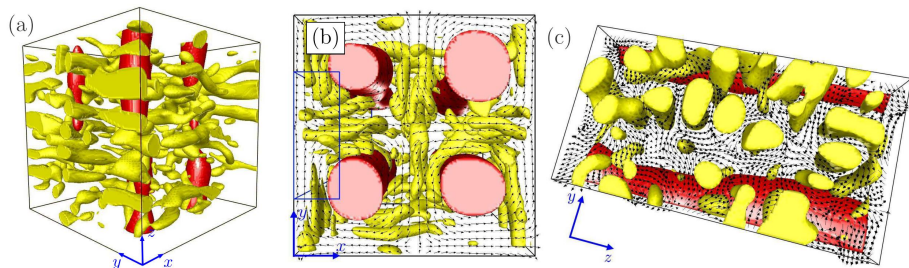


Figure: Pictures by Carnegie Mellon Univ. and saecanet



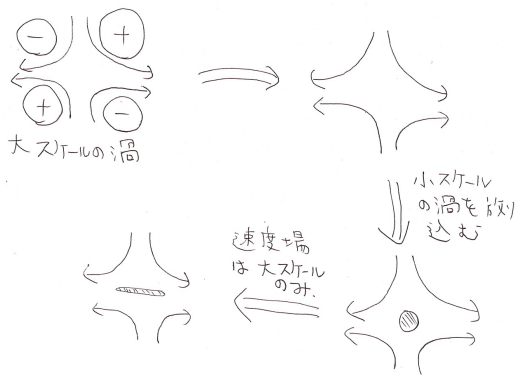
発達乱流：シアによる（ある種の）不安定化

発達乱流の大規模数値計算 Goto-Saito-Kawahara (2017)(show the movie!)



- Protas さんの動画の紹介（2次元乱流の要：palinstrophy を最大化する渦の配置：NS の数値計算だが、Euler 方程式の解とみなせる）
- Zeroth-law（乱流の礎）の数理解理解：Jeong-Y (arXiv)
（専門家でも理解に時間がかかるかなり複雑な手計算!）

線型と非線形の対比



左図：線形近似のプロセス 右図：非線形相互作用のイメージ

線形近似：スケール差を利用。比較すると、大スケールの方が影響力が大きいので、小スケールの速度場をエイヤ！と無視する。

非線形相互作用：無視せずに、行ったり戻ったりを複雑に繰り返す。

非線形相互作用を直接とらえる方法は存在しないのか？
⇒ 微分同相写像群??

木星上のシア流（帯状流・地球では偏西風と呼ぶ）

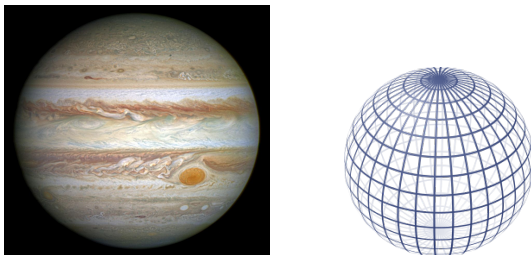


Figure: Photo by NASA and picture by Wikipedia

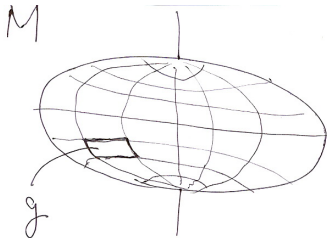
木星上に沢山の帯状流が存在：人類史上(?) 今でも最大の謎（自転に安定化効果があるが、それだけでは説明がつかない） movie!

- 今までは球面が主なモデルであった。しかし、木星は7パーセントも膨らんだ楕円球（無視できない誤差?）。
- 田内大渡氏との共同研究（arXiv:1907.08365）：**微分同相写像群（或いはリー群と表現論）を使った楕円球上の流体研究は皆無！**

多様体 (M, g) 上のオイラー方程式を導出する

$$M = M_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = a^2(1 - z^2)\} \quad \text{球面か楕円球面}$$

- $a > 1$ 楕円球面 (北極南極付近が平らになっている), $a = 1$ 球面



リーマン計量 g (微小な長方形・平行四辺形の敷き詰め方の情報):

g によって曲面上のまっすぐな直線、曲線が定義できる。ただ、その直線、曲線自体が g に依存するわけではない！流体粒子 η が g を変形。

- 例：アメリカとカナダの国境線はまっすぐではない！
- 例：東京ーアメリカ間の飛行機の航路は地図上では曲がっているが、飛行機にとってはまっすぐだ。

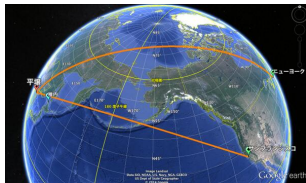
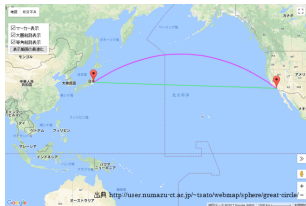
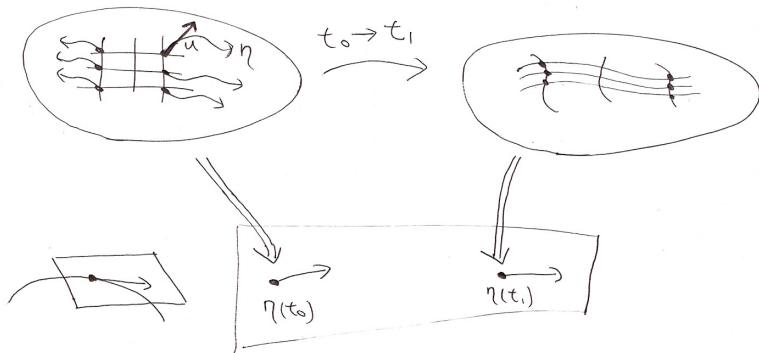


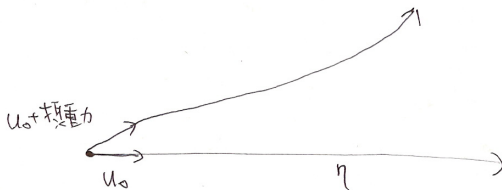
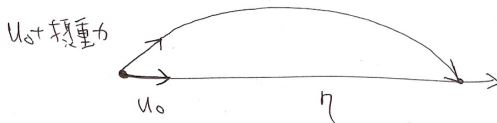
Figure: Pictures by Picture Hotdogger (地図の印刷会社), Adobe Stock, user.numazu-ct.ac.jp and Google Earth

洞察の場の転換！(η を無限次元多様体上の点とみなす)



- (復習) ベクトル場 u の方向・強さに沿って流体粒子 η が動く。
- 曲面上の接ベクトル場を使って弱リーマン計量を定義
- 各接ベクトルの内積を取り、楕円球面上で積分をとる。その内積・積分から新しい「計量」が定義できる。
- そして新たな多様体（無限次元）上の直線、曲線が定義される。

最小作用の原理 : Variational formula: Hamilton's principle



無限次元多様体上の二点の最短距離を実現する直線こそが、
先ほど紹介したオイラー方程式である!! (解析力学の応用) 曲率をみる!
上図: 交点 (共役点) が存在する。下図: 交点が存在しない。球面を例に。

主定理と NS のミレニアム懸賞問題との比較

- 共役点の存在：流体粒子が戻るので安定的（乱流化を抑え得る効果）
- 共役点の非存在：流体粒子が戻らず、不安定的（乱流化への序章）

主定理 (Tauchi-Y 2019) arXiv:1907.08365

- 楕円球面上の（ほとんど）すべての帯状流（Euler 方程式の定常解）に対して、**共役点が存在する!**
- 平坦な場合 $\mathbb{T}^2$: **共役点が存在しない** (Misiolek 1993)
- 球の場合: 洞察を進展中 (リー群と表現論を使う!)

Show the movies again!

ポイント：有限時間で生成される非線形相互作用をとらえている!!

（微分同相群の手法で NS 未解決問題が解けるとは思えないが、、）前述の Navier-Stokes 方程式（外力なし）の未解決問題も、結局は非線形相互作用の解明に帰着される：

初期時刻	初期に近い時刻	中間時刻	中間から無限
	線型が優勢	非線形が優勢!	粘性散逸

Thank you!

Dziekuje!

Dekuju!

Xie Xie!

Komapsumnida!

Tesekkur ederim!

Merci beaucoup!

Danke!

Grazie!

Tack!

Buiocas!

Shukran!

Gracias!

Chokrann!

Cam on!

Spasibo!