中学生のための玉原数学教室　　東京大学

玉原国際セミナーハウス

講義 (1)　柏原　崇人　　2019 年 10 月 19 日

「極限と等式・不等式・近似」

1. $1 = 0.99999999999999999\cdots$!?

誰でも知っている「1」という数と，小数点以下に 9 が無限個並んだ「$0.99999\cdots$」という数は，実は等しくなります．どう見ても $0.99999\cdots < 1$ じゃないか，絶対おかしい！と感じられる方もいるでしょう．しかし，このことが正しそうだと思える説明が，複数の方法でできるのです．

$\boxed{\text{方法 1}}$

$$\frac{1}{3} = 0.3333333333\cdots$$

であることはほとんどの人に納得してもらえるでしょう．これの両辺を 3 倍すれば

$$1 = 0.9999999999\cdots$$

となります．一方で,「$\cdots$」の部分がよくわからないまま，それを 3 倍しても「$\cdots$」のままになっていて，なんだかすっきりしない感じがします．

$\boxed{\text{方法 2}}$

$x = 0.99999\cdots$ とおくことにします．

$$\begin{array}{rrcl} & 10x & = & 9.9999999999\cdots \\ -) & x & = & 0.9999999999\cdots \\ \hline & 9x & = & 9 \end{array}$$

より $x = 1$ が導かれます．しかし,「$\cdots$」の部分が正体不明という点はさきほどと同じですし，この方法が通用するなら次のような突飛なことも許されてしまいます．

$y = \cdots 99999$ とおくことにします（とても大きな数！）．

$$\begin{array}{rrcl} & 10y & = & \cdots 9999999990 \\ -) & y & = & \cdots 9999999999 \\ \hline & 9y & = & -9 \end{array}$$

より $y = -1$!? これは明らかにおかしいですが，なぜ x に対する式変形は正しく，y に対する式変形は間違っているのか，合理的な説明を付けることはできるでしょうか？

$\boxed{\text{方法 3}}$

次のような数の列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ を考えます．

$$a_1 = 0.9,\ a_2 = 0.99,\ a_3 = 0.999,\ a_4 = 0.9999, \cdots$$

つまり,「小数点以下第 n 位まで 9 が続く数」を順番に並べ，その数を a_n と名付けました．このとき，

$$a_n = 1 - (0.1)^n$$

となることがわかります．

さて，考えたかったのは「小数点以下無限個 9 が続く数 x」でしたが，これは

「n を限りなく大きくしたとき，a_n が限りなく近づいていく数」のことであると**定義**します．そうすると，$(0.1)^n$ は n を大きくしていけば限りなく 0 に近づいていくので，a_1 は限りなく 1 に近づいていくことから，求める $x = 1$ であると結論付けられます．

最後の方法では無限個続く「$\cdots$」に意味を与えており，これで解決としたいのですが，よくよく考えてみればまだ疑問が出てきます．

- 「限りなく大きくする」とか「限りなく近づいていく」という表現も曖昧ではないか？より厳密にはどういうことか？
- $(0.1)^n$ が 0 に近づくことは自明か？
- $\cdots 99999 = -1$ の話が否定される理由は？

こういった点は当日の講義で説明できればと思います．

さらに，講義時間との兼ね合いになりますが，上記の話と関連して次のようなトピックにも触れたいと考えています．

- ゼノンのパラドックス：アキレスと亀の話
- 一歩で「誤差なし」で 1 メートル進むことは可能か？（等式よりも，不等式や近似の方が有用なことがある）
- 近似の考え方を生かした暗算法