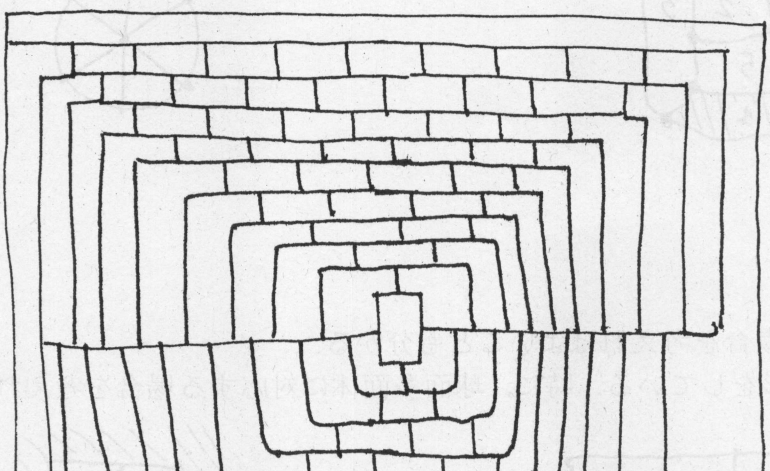
高校生のための現代数学講座　東京大学
「いろいろな幾何学」　玉原国際セミナーハウス
講義(6)　坂井　秀隆　2019年7月20日

「四色問題」

4色問題とは，平面上のどんな地図も，隣接する領域が異なる色になるように塗り分けるのに4色あれば十分であることを示せという問題である．

これには面白いジョークもあって，問題解決の少し前，雑誌「サイエンティフィック・アメリカン」の有名数学コラムにマーティン・ガードナーが載せた記事にそれがある．1975年4月1日号で,「なぜか話題にならなかった6つの衝撃の発見」というタイトルのいたずら記事である．

この1年間に純粋数学の分野で成し遂げられたもっともセンセーショナルな発見といえば，もちろん，悪名高き4色地図定理の反証の発見である．...ニューヨーク州ワッピンガーズ・フォールズ在住のグラフ理論家ウィリアム・マクレガーが昨年11月に作成した110の領域からなる地図は，5色未満では塗り分けることが出来ない．



冗談はさておいて，4 色問題は，長い間未解決だった興味深い問題であるだけではなく，解かれた後にも議論を残したという意味でも重要な問題である．1 度は解かれたと思われていた時期も長かったのだが，流布された証明には穴があることが分かり，最終的には，1976 年にアッペルとハーケンにより，肯定的に解決された．

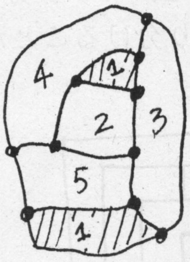
最終的な解決にコンピューターが使われたことでも話題を呼んだ．

今でも，人間の確認できる形での証明はないようで，この講義では 4 色定理の証明は諦めて，5 色定理の証明を見てみよう．

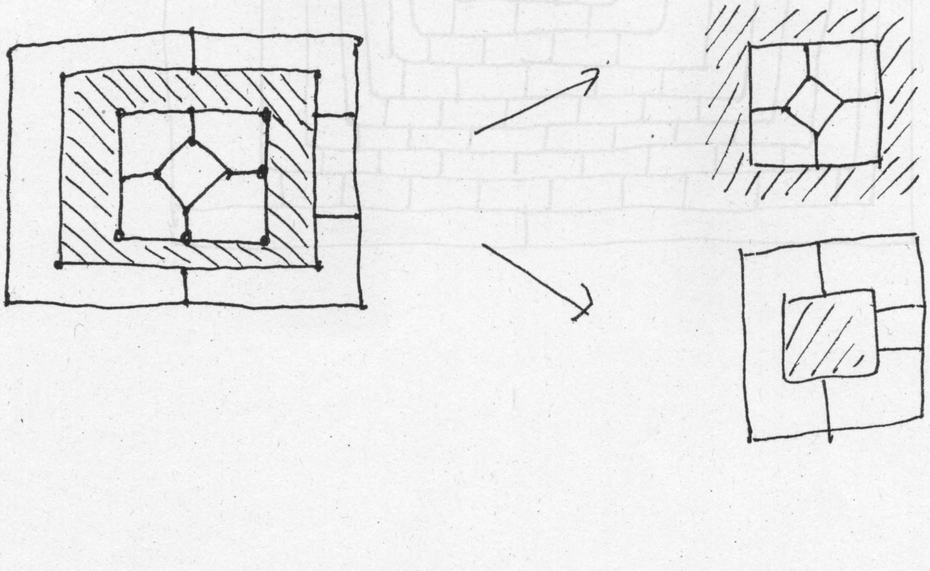
だが，その前に，少しだけ問題に関する注意を見ておく．

注意:
- 2 つの部分に分かれているような国がないことを仮定する．
- 隣接するというのは，境界として線を含んでいる場合のみを指し，点で接している場合には異なる色でなくてもよい．

そうでない解釈をした場合は，4 色定理の反例は簡単に作れる．



また，次の場合を考えればよいことも分かる．
- 各国は多角形をしている．特に，球面多面体に対応する場合を考えればよい．



次の主張がキーポイントなので，それをまず見ておこう．

隣国は 5 つだけ.

どんな地図にも，たかだか隣国を 5 つしか持たない国が少なくとも 1 つある．

これを示すのに，これまで見てきたオイラーの定理を使う．頂点の数を v, 辺の数を e, 面の数を f としよう．面のうち，2 角形の数を f_2, 3 角形の数を $f_3, \ldots$ などとしたとき，

$$f = f_2 + f_3 + \cdots + f_m$$

のようになる．このとき，国境になる辺の数は k 角形の場合 k 個だが，それぞれの辺は 2 つの面に接しているから

$$2e = 2f_2 + 3f_3 + \ldots + mf_m$$

が成り立つ．隣国の数が常に 6 以上なら右辺は $6f_6 + \cdots$ となるので

$$2e \geq 6f$$

が言える．さらに，各頂点からは 3 本以上の辺がでていると思うと

$$2e \geq 3v$$

が分かる．

しかし，これをオイラーの式 $v-e+f = 2$ に代入すると，$2 = v-e+f \leq \frac{1}{3}e-e+\frac{2}{3}e = 0$ となり矛盾する．

6 色定理.

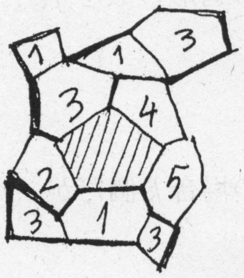
まずは，6 色で十分であることを示そう．これは，上に述べたことからすぐに証明できる．

面の数 f に関する帰納法で示そう．$f \leq 6$ なら当たり前である．面の数 f の問題が $f-1$ の場合に帰着できればよいが，隣国が 5 以下の国があった場合，その国を頂点に置き換えた地図では 6 色で塗り分けられる．頂点を元の国に戻しても，接している国が 5 つ以下なので，6 つ目の色を塗ると塗り分けができることになる．

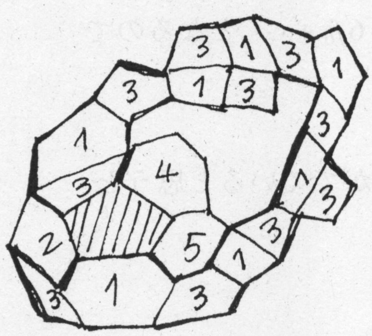
5 色定理.

次に，5 色で十分なことを示したい．この場合は，少し難しいが，ケンプの鎖と呼ばれるアイデアを用いると証明できる．

ケース1



ケース2



問題　4 色定理を分かりやすく証明せよ．

参考文献

[ウィルソン] ロビン・ウィルソン著，茂木健一郎訳『四色問題』（新潮社）