高校生のための現代数学講座
「いろいろな幾何学」　　　　　　　　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (5)　入江　慶　　　　　　　　　　　　　　　　　2019 年 7 月 20 日

オイラー数

はじめに

「正多面体」の講義では、正多面体の頂点の個数 v, 辺の個数 e, 面の個数 f の間に

$$v - e + f = 2 \qquad (1)$$

という関係が成り立っていることを観察した。この講義では、この関係が、より一般の状況で成り立つことを説明する。一般化の設定として、ここでは球面の（凸）多角形[1]への分割を考察する。

球面凸多角形

3 次元空間内の単位球面を考え、S とおく。S の中心を原点 $(0,0,0)$ とする xyz 座標系をとると

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

と表すことができる。原点を通る平面と S との共通部分として得られる図形を大円という。大円は S を二つの部分に分けるが、その半分（大円を含む）を半球面という。半球面 H に対して、H の境界となる大円を ∂H とかく。

座標で書くと、ある $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ を用いて

$$\{(x,y,z) \in S \mid ax + by + cz = 0\}$$

と表すことができる図形が大円であり、

$$\{(x,y,z) \in S \mid ax + by + cz \geq 0\}$$

と表すことができる図形が半球面である。

また、端点を二つもつ大円の一部、つまり

$$\{(\cos\theta, \sin\theta, 0) \mid 0 \leq \theta \leq \theta_0\} \qquad (0 < \theta_0 < 2\pi)$$

[1] 一般に、球面の上の図形であって有限個の大円（の一部）で囲まれるものを球面多角形という。これは多少おおらかな言い方で、例えば「囲まれる」という条件の正確な意味を明らかにする必要があるが、そこに深入りするのは今回の目的から外れるので、ここでは簡単に定義できるクラスである球面凸多角形だけを考える。

と合同な S 上の図形を線分ということにする。

有限個（ただし 2 個以上）の相異なる半球面の共通部分として表すことのできる S 上の図形で、面積が正のものを球面凸多角形という。定義より、球面凸多角形 P は相異なる半球面 $H_1, \ldots, H_n$ を用いて

$$P = H_1 \cap \cdots \cap H_n \tag{2}$$

とかけるが、このような n の最小値を $e(P)$ とかく。$n = e(P)$ のとき、(2) を満たす $\{H_1, \ldots, H_n\}$ は一意に決まる。線分 $P \cap \partial H_1, \ldots, P \cap \partial H_n$ を P の辺といい、P の二つ以上の辺に含まれる点を P の頂点ということにする。

オイラーの定理

S 上の球面凸多角形 $P_1, \ldots, P_f$ が次の条件を満たすとき、S は $P_1, \ldots, P_f$ に分割されているということにする：

- S のどの点も、ある P_i に含まれる。
- $\{1, \ldots, f\}$ の相異なる二つの元 i と j について、$P_i \cap P_j$ は有限個の点と有限個の線分からなる。ここで各点は P_i の頂点かつ P_j の頂点であり各線分は P_i の辺かつ P_j の辺である。

ある P_i の頂点となる点をこの分割の頂点、ある P_i の辺となる線分をこの分割の辺ということにする。

定理 1. 球面 S が凸多角形 $P_1, \ldots, P_f$ に分割されているとする。この分割の頂点の個数を v, 辺の個数を e とおくと $v - e + f = 2$ が成り立つ。

定理 1 は、オイラーの定理 (Leonhard Euler, 1707– 1783) とよばれている事実の一つの定式化である。この定理と、正多面体に対する式 (1) の関係を説明する。原点 $O = (0, 0, 0)$ は正多面体の内部に含まれるとして一般性を失わない。多面体の表面上の点 p に、O を端点とし p を通る半直線と S との交点を対応させることで、多面体の表面上の点と S 上の点との間に一対一対応がつく。この時、多面体の各面に球面凸多角形が対応していて、それらにより球面 S は分割される。また、その分割における面、辺、頂点の個数は元の多面体の面、辺、頂点の個数と等しい。したがって、正多面体に対する関係式 (1) は定理 1 の特別な場合とみなすことができる[2]。

球面多角形の面積

平面幾何においては、n 角形の内角の和は、常に $(n-2)\pi$ であった。球面多角形においては、n 角形の内角の和は $(n-2)\pi$ より大きく、その「ずれ」から、n 角形の面積を求めることができる。

[2]この議論のポイントは、多面体の表面上の点と球面上の点との間に一対一対応がつくということであり、正多面体であるということは本質的ではない。

定理 2. 単位球面 S 上の任意の凸 n 角形 P に対して、P の内角の和を $A(P)$, P の面積を $|P|$ とおくと $A(P) = (n-2)\pi + |P|$ が成り立つ。

定理 2 は Girard の定理と呼ばれることがあるが (Albert Girard, 1595–1632) それより前に Thomas Harriot (1560 –1621) により証明されていたようである。

定理 2 を証明してみよう。まず $n = 2$ の場合は、二つの内角は一致し（その値を θ とおく）面積は $4\pi \times \frac{\theta}{2\pi} = 2\theta$ となるので成立している。

次に $n = 3$ の場合を考える。T を球面三角形とし、半球面 H_1, H_2, H_3 を用いて $T = H_1 \cap H_2 \cap H_3$ と表す。$1 \le i < j \le 3$ に対して $D_{ij} := H_i \cap H_j$ とおき $D := D_{12} \cup D_{13} \cup D_{23}$ とおくと

$$|D| = |D_{12}| + |D_{13}| + |D_{23}| - 2|T| \tag{3}$$

が成り立つ（$|\cdot|$ は面積を表す）。一方で $n = 2$ の時に定理が成り立つことから

$$|D_{12}| + |D_{13}| + |D_{23}| = 2A(T) \tag{4}$$

であり、D と $S \setminus D$（D の補集合、つまり D に含まれない S 上の点を全て集めてできる図形）は原点について「ほぼ」対称[3]なので

$$|D| = 2\pi. \tag{5}$$

(4), (5) を (3) に代入すれば $A(T) = \pi + |T|$ を得る。

一般の $n \ge 4$ の場合、n 角形 P を $n-2$ 個の三角形 $T_1, \ldots, T_{n-2}$ に分割すると

$$A(P) = \sum_{i=1}^{n-2} A(T_i) = \sum_{i=1}^{n-2} (\pi + |T_i|) = (n-2)\pi + |P|$$

となって証明が完了する。 □

定理 1 の証明

定理 2 から定理 1 が導かれることを見てみよう。S が凸多角形 $P_1, \ldots, P_f$ に分割されているとし、分割に現れる頂点の個数を v, 辺の個数を e とおく。各 $1 \le i \le f$ について、P_i の辺の数を e_i, P_i の内角の和を A_i とおくと

$$\sum_{i=1}^{f} e_i = 2e, \qquad \sum_{i=1}^{f} A_i = (2\pi)v.$$

一方、各 P_i に定理 2 を適用して和をとると

$$4\pi = \sum_{i=1}^{f} |P_i| = \sum_{i=1}^{f} (A_i - (e_i - 2)\pi) = \sum_{i=1}^{f} A_i - \pi \sum_{i=1}^{f} e_i + 2\pi f = 2\pi(v - e + f)$$

[3]正確には、$\partial H_1 \cup \partial H_2 \cup \partial H_3$ に含まれない S 上の点 p について $p \in D \iff -p \in S \setminus D$

となるので $v - e + f = 2$ を得る。 □

オイラー数とは

定理 1 は、単位球面（つまり、方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ で定義される図形）の多角形分割についてのものである。しかし、頂点、辺、面の個数は組み合わせ的なデータなので、単位球面を多少（あるいは、大きく）歪めた図形の上に対しても何らかの形で定理 1 にあたることが成り立つと考えるのは自然であろう。

実際、適当な仮定を満たす曲面（3 次元座標空間内の図形で、局所的には 2 変数関数のグラフとなるもの）に対して、その多角形分割を考えることができ、そのとき頂点、辺、面の個数を v, e, f とおくと $v - e + f$ の値は分割の仕方によらず曲面だけで決まることが知られている。この値を、その曲面のオイラー数という。

定理 1 により、球面のオイラー数は 2 である。一方、例えば浮き輪の表面のオイラー数は 0 である。オイラー数は、曲面の（より一般に、様々な空間概念の）「形」を区別する最も基本的な指標である。