高校生のための現代数学講座　東京大学
「いろいろな幾何学」　玉原国際セミナーハウス
講義 (2)　小木曽　啓示　2019 年 7 月 13 日

「ほんの少し双有理代数幾何学 — 円と直線はほとんど同じ」

この講演では、代数幾何学と呼ばれる分野のごくさわりの部分についてお話したいと思います。代数幾何学は、直線、円、放物線、双曲線など、皆さんにもなじみのある図形の概念を拡張した、代数多様体と呼ばれる図形を扱う数学の分野です。

数学にはノーベル賞はありませんが、フィールズ賞という賞があります。数学におけるノーベル賞ともいわれ、数学において最も権威のある賞です。これまでにフィールズ賞を受賞した日本人数学者は、小平邦彦先生、広中平祐先生、森重文先生の３人ですが、いずれも代数幾何学の業績による受賞です。この意味で、代数幾何学は日本人とゆかりの深い数学の分野でもあります。

講演では、皆さんになじみのある、座標平面上の放物線と直線の交点を考えることから始め、複素射影平面（空間）の概念を導入したいと思います。全世界の代数幾何学研究者の大半は、複素射影空間を母体とする空間の中の図形（代数多様体）を研究しています。この意味で、複素射影平面（空間）は、代数幾何学においては最も基本的かつ重要な対象です。講演では、皆さんになじみのある直線、円、放物線、双曲線が、母体となる空間を複素射影平面にまで拡張して考えたとき、どんな図形に見えるかについても説明したいと思います。

代数幾何学

多項式の共通零点集合の幾何学

ICM　国際数学者会議

フィールズ賞　3人の日本人受賞者

小平邦彦 (1915－1997)

1954年 (アムステルダム)

Hodge多様体＝射影代数多様体

広中平祐 (1931－　)

1970年 (ニース)

特異点解消定理

森重文 (1951－　)

1990年 (京都)

ハーツホーン予想と3次元極小モデル理論

いずれも代数幾何学の業績

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y$ 実数$\}$ 座標平面

$C : y = x^2$ 放物線

$L : y = 2ax + b$ 直線 (傾き $2a$, y切片 b)

交点 = ?

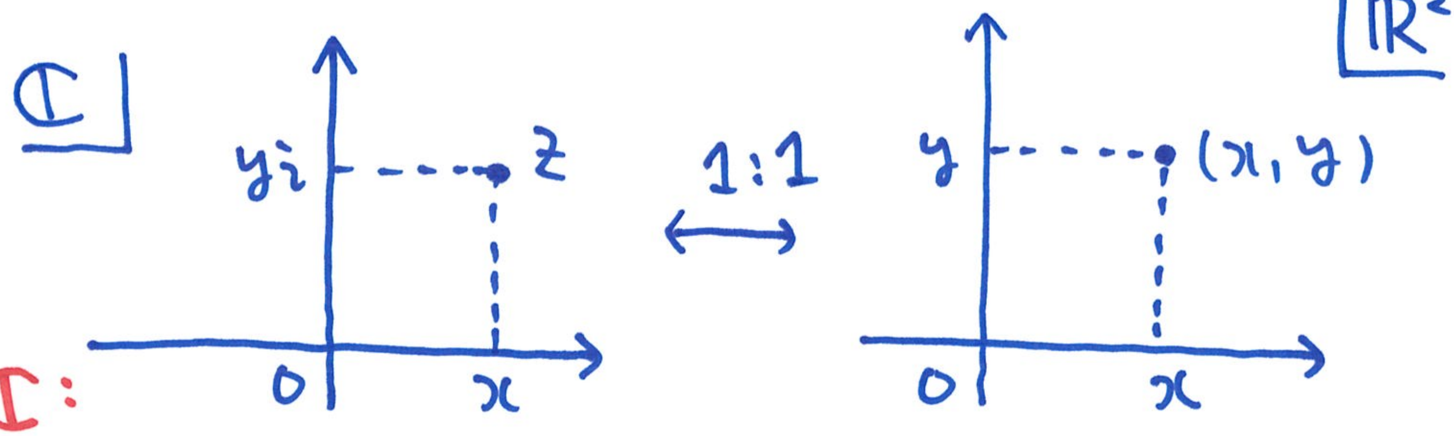
交点のx座標 : $x^2 - 2ax - b = 0$ の解

$D = 4(a^2 + b)$

D	交点数	交点
$D > 0$	2点	$\begin{cases} (a+\sqrt{a^2+b}, (a+\sqrt{a^2+b})^2) \\ (a-\sqrt{a^2+b}, (a-\sqrt{a^2+b})^2) \end{cases}$
$D = 0$	1点	(a, a^2)
$D < 0$	0点 (なし)	

数の範囲を $\mathbb{C}^2=\{(z,w)\mid z,w\text{は複素数}\}$

$z=x+yi$　$i=\sqrt{-1}$　x,y 実数



$\mathbb{C}$:

$\begin{cases} \text{2つの実パラメータ } x,y : \text{実2次元} \\ \text{1つの複素パラメータ } z : \text{複素1次元} \end{cases}$

$D<0$ のとき:

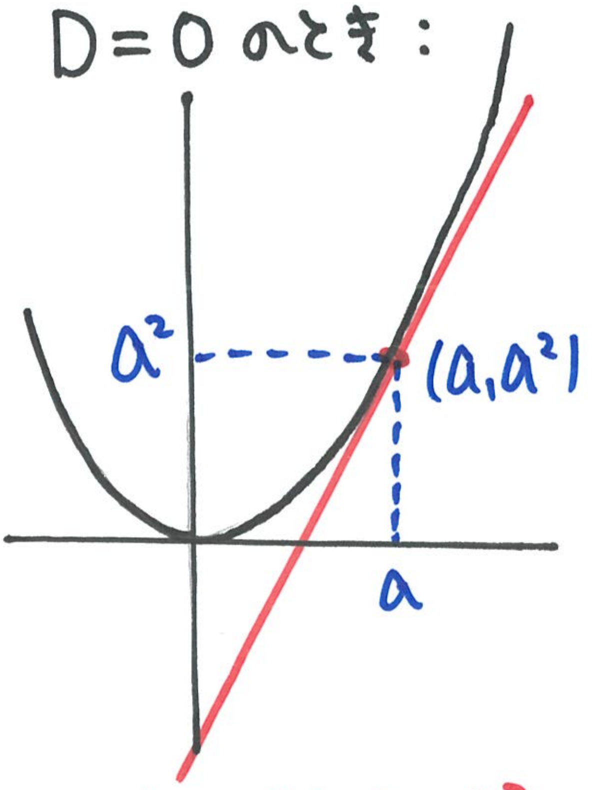
$\mathbb{C}^2$ では
$$\begin{cases} \left(a+\sqrt{|a^2+b|}\,i,\ \left(a+\sqrt{|a^2+b|}\,i\right)^2\right) \\ \left(a-\sqrt{|a^2+b|}\,i,\ \left(a-\sqrt{|a^2+b|}\,i\right)^2\right) \end{cases}$$

の 2交点

$D=0$ のとき:

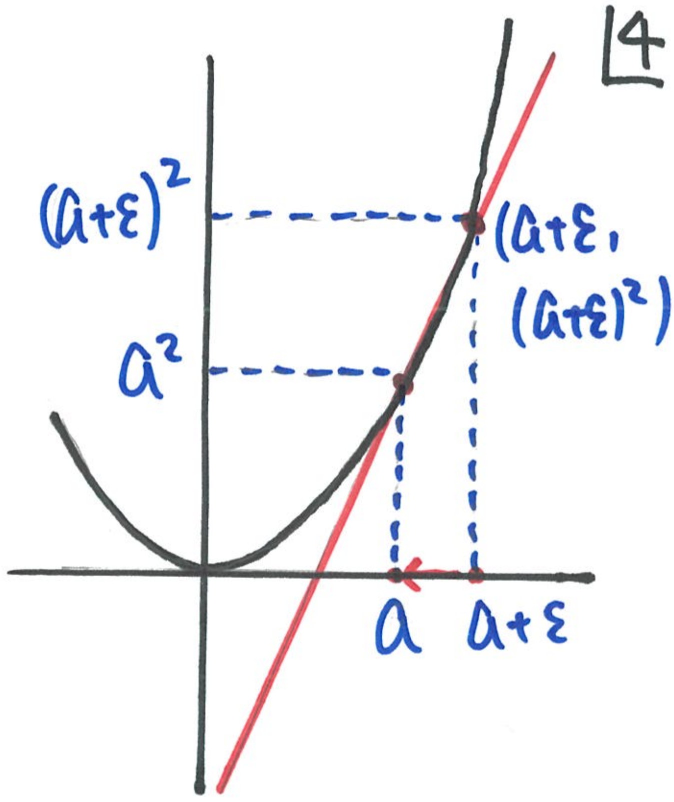
$\mathbb{C}^2$ でも　交点は (a, a^2) 1点のまま

$D=0$ のとき：



$y = 2ax - a^2$
$= 2a(x-a) + a^2$

$\overset{\longleftarrow}{\varepsilon \to 0}$



$y = (2a+\varepsilon)(x-a) + a^2$

ほんの少し傾きを変えると2交点

この2点が重なって1点：重複度2の交点

一般：

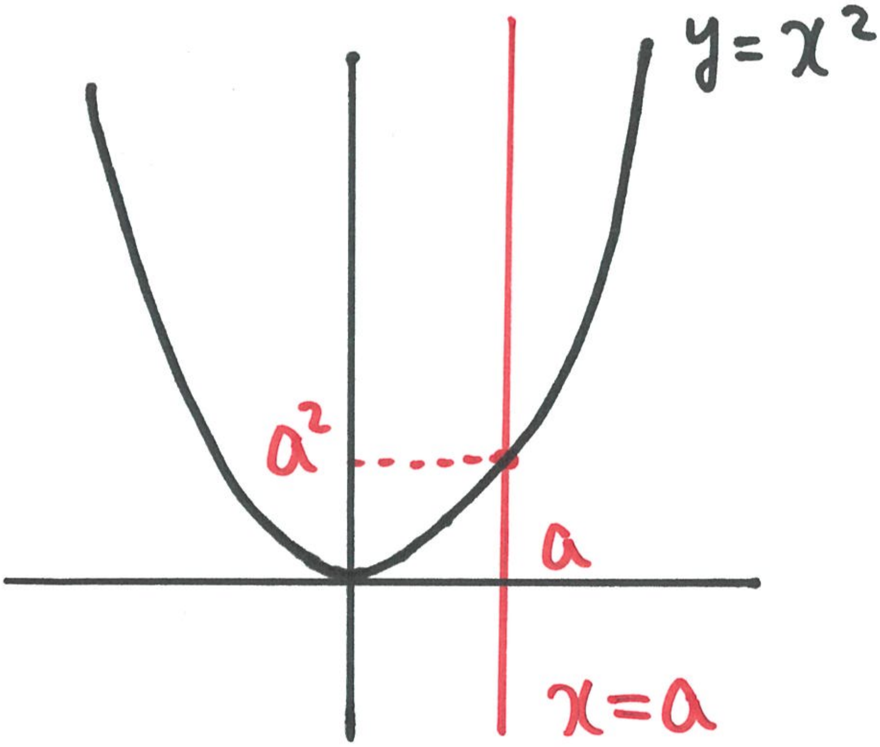
<u>定理（代数学の基本定理）</u>

複素数を係数とするn次方程式は重複度を込めてちょうどn個の複素数解をもつ。

（多項式を扱うとき $\mathbb{C}$ が $\mathbb{R}$ よりすぐれている点）

複素数に拡張して，重複度も考えると

"放物線"と"直線"の交点はいつも2つ？



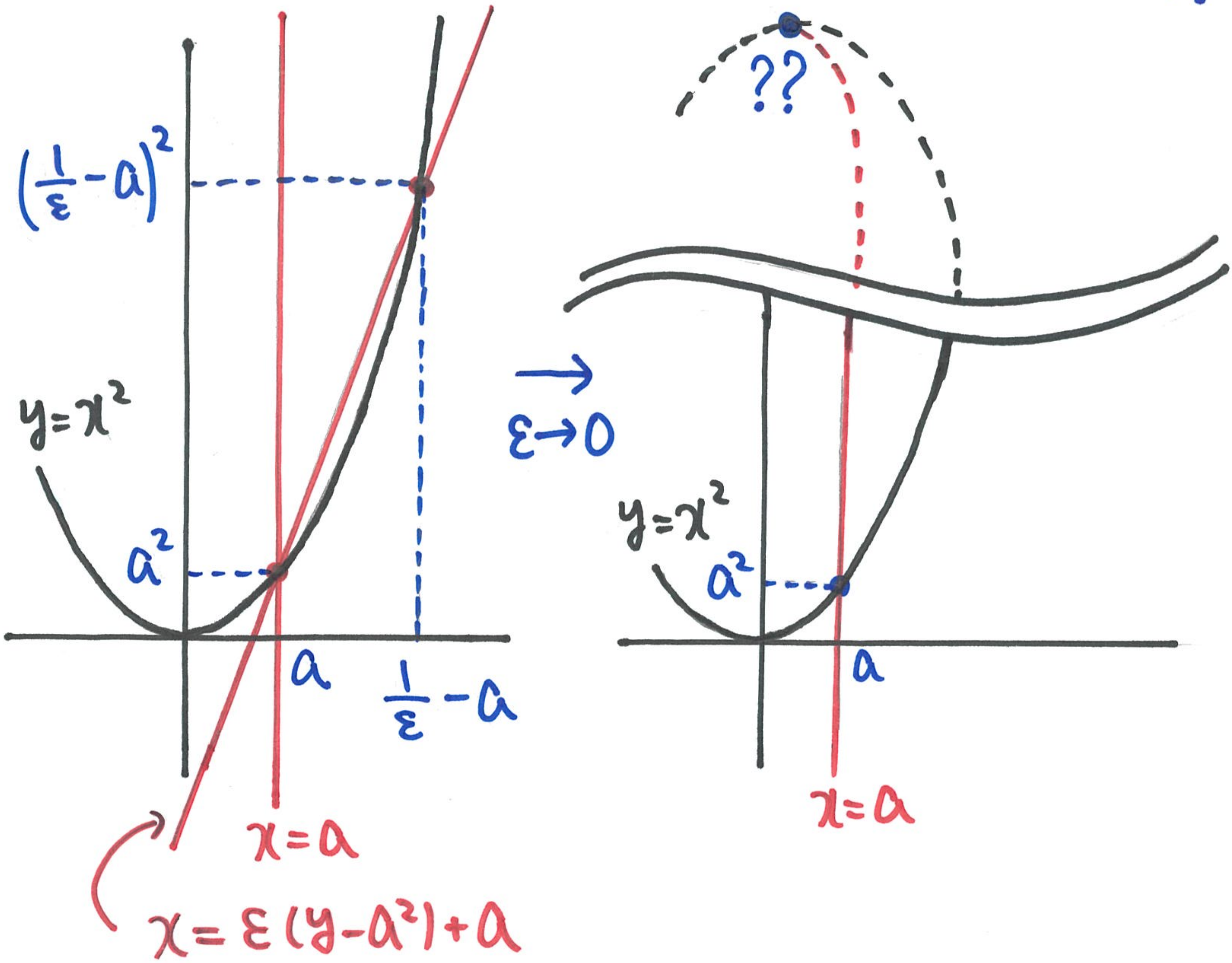
$$\begin{cases} y = x^2 & (\text{放物線}) \\ x = a & (\text{直線}) \end{cases}$$

$\mathbb{C}^2$に拡張しても 交点は (a, a^2) 1点

重複度 = 2 には見えない ‥‥

(重複度 = 1 にみえる。)

無限の彼方にもう1つ交点??



無限の彼方は数学か?

現代的考え方:無限の彼方を内包する空間(集合)を作ってしまえばよい。

⇝ 射影平面, 射影空間
[現代代数幾何学の母体となる空間]

定義［射影平面と射影空間］

少くとも1つは0でない3つの数の比

$[a:b:c]$ 全体からなる集合を

射影平面という。

$[a:b:c] = [a':b':c']$

$\Leftrightarrow (a,b,c) = k(a',b',c')$ $k \neq 0$ と書ける。

・数 a, b, c の範囲を実数に限定したのが

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \left\{ [a:b:c] \;\middle|\; \begin{array}{l} a,b,c \text{ は実数} \\ a \neq 0 \text{ 又は } b \neq 0 \text{ 又は } c \neq 0 \end{array} \right\}$$

実射影平面

・数 a, b, c の範囲を複素数まで広げたのが

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \left\{ [a:b:c] \;\middle|\; \begin{array}{l} a,b,c \text{ は複素数} \\ a \neq 0 \text{ 又は } b \neq 0 \text{ 又は } c \neq 0 \end{array} \right\}$$

複素射影平面

より一般に：

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \left\{ [\underbrace{a_0 : a_1 : \cdots : a_n}_{(n+1)\text{コの比}}] \;\middle|\; \begin{array}{l} a_j \text{ は複素数で} \\ \text{少くとも1つは } \neq 0 \end{array} \right\}$$

n次元複素射影空間

観察

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) &= \{[a:b:c] \mid c \neq 0\} \amalg \{[a:b:0]\} \\
&= \{[p:q:1]\} \amalg \{[a:b:0]\}
\end{aligned}
$$

$[p:q:1] \leftrightarrow (p,q)$ $\qquad$ $[a:b:0] \leftrightarrow [a:b]$

$$
= \underbrace{\mathbb{R}^2}_{} \amalg \mathbb{P}^1(\mathbb{R})
$$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ $\overset{(*)}{=}$ ($\mathbb{R}^2$からみた無限の彼方全体)

(*)に思える理由：

平面$\mathbb{R}^2$の点 $\longrightarrow$ $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$の点

$$
(kp, kq) \longleftrightarrow [kp : kq : 1] = \left[p : q : \tfrac{1}{k}\right] \xrightarrow{|k| \to \infty} [p : q : 0]
$$

∴ $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$において $[p:q:0] = \lim_{|k|\to\infty} (kp, kq)$

同じ理由で

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) &= \{[p:q:1]\} \amalg \{[a:b:0]\} \\
&= \mathbb{C}^2 \amalg \mathbb{P}^1(\mathbb{C})
\end{aligned}
$$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$：$\mathbb{C}^2$からみた無限の彼方

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \amalg \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に拡張したときの $C : y = x^2$ と $L_a : x = a$ の交点

$[X:Y:Z]$ が $y = x^2$ 上の点

$Z \neq 0$ の部分： $[X:Y:Z] = \left[\frac{X}{Z} : \frac{Y}{Z} : 1\right]$

$$\frac{Y}{Z} = \left(\frac{X}{Z}\right)^2$$

$\rightarrow \hat{C} : YZ = X^2$ ： C を $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ に拡張した図形の式

$$\hat{C} = C \amalg \{[0:1:0]\}$$

同様に：

$[X:Y:Z]$ が $x = a$ 上の点

$Z \neq 0$ の部分 $\frac{X}{Z} = a$

$\rightarrow \hat{L}_a : X = aZ$ ： L_a を $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ に拡張した図形の式

$$\hat{L}_a = L_a \amalg \{[0:1:0]\}$$

∴ 期待通り

無限の彼方の点

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ では 2点 $[a : a^2 : 1]$ と $[0:1:0]$ の 2点で交わる。

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \{ \underbrace{[X:Y:Z]}_{\text{斉次座標}} \mid X \neq 0 \text{ 又は } Y \neq 0 \text{ 又は } Z \neq 0 \}$

$F(X,Y,Z)$: 斉次 d 次多項式 $(d \geqq 1)$

例 $Z^2 - XY$: 斉次2次　$Y + 2Z$ 斉次1次

$Z - XY$ は非斉次

$(\underbrace{F(X,Y,Z)}_{\text{斉次 } d \text{ 次}} = 0) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を

d次(複素)射影曲線 という.

因数分解できないとき : 既約 という.

定理(ベズーの定理)

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$内のどの2つの曲線も必ず交わる。
また異なる m次既約曲線と n次既約曲線は重複度を込めてちょうど mn点で交わる。□

問 $y = ax$, $y = ax + 1$ を $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$に拡張した図形の交点を求めよ。

* 講演では,更に,"直線","放物線","円","双曲線" が $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$内ではどんな図形に拡張されているか説明したい。