高校生のための現代数学講座　　　　　　　　　　東京大学
「複素数」　　　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　寺杣　友秀　　　　　　　　　　2018 年 7 月 14 日

「複素数の発見」

解けない 2 次方程式　現実的な数学の問題を解くためにわからない量を x とおいて、そういう x があるとして、x の満たすべき式をたてて、そこから先は代数的な操作を用いて x を求めるというのが方程式の考え方である。例えば x が

$$ax + b = 0$$

$(a, b$ は実数、$a \neq 0)$ という式をみたせば、

$$ax = -b, \quad x = \frac{b}{a}$$

となり、代数的な規則だけから x の値がわかる。この形の方程式は未知数 x の一次式が 0 となるという形に書かれるので、1 次方程式といわれる。例えば

4 辺の長さの和が 8 cm 面積が 3 cm^2 となる長方形の縦横の長さを求めよ

という問題であれば、縦の長さを x、横の長さを y として

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

という方程式がたつので、これを解けばよい。$y = 4 - x$ と y について解いて二つ目の式に代入して

$$x(4 - x) = 3, \quad x^2 - 4x + 2 = 0, \quad (x - 2)^2 = 2$$

となるので、

$$x - 2 = \pm\sqrt{2}, \quad 2 \pm \sqrt{2}$$

なので縦の長さは $2 \pm \sqrt{2}$ となり、解ける。このような方程式は x に関する次数が 2 なので 2 次方程式といわれる。2 次方程式では係数が仮に有理数であっても答えが有理数であるとは限らないことはこの例を見てもわかる。

　それでは少し問題を変えて

4 辺の長さの和が 8 cm 面積が 5 cm^2 となる長方形の縦横の長さを求めよ

ならどうだろうか？

$$x(4-x)=5,\quad x^2-4x+5=0,\quad (x-2)^2=-1$$

となるので二乗して -1 となる実数を探さなくてはならないが実数の二乗は常に 0 以上となるので、問題に解はないことになる。従ってこのような長方形は存在しないことになる。

このように 2 次方程式は実数係数であっても実数解をもつとは限らないことが状況を複雑にしている。

虚数、複素数 このような状況を単純化して、$x^2=-a,(a>0)$ のような方程式がいつでも解けるようにしたいという気持ちが虚数を生んだ。方程式を解けるようにするには実数の範囲だけではだめで、$i^2=-1$ となるような想像上の”i” を導入しようというのが虚数の考え方である。加減乗除について閉じていなければ、代数操作に支障をきたすので、$a+bi$ で a,b が実数という形の数を考えなければならない。

複素数という体系を定義するには次のようにすればよい。まず、二つの実数の組 $z=(a,b)$ を考える。z は平面上の点と思ってもよい。このような実数の組を二つ考える。たとえば $z_1=(a_1,b_1), z_2=(a_2,b_2)$ として z_1 と z_2 の和および積を

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (a_1+a_2, b_1+b_2) \\ z_1z_2 &= (a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1) \end{aligned}$$

と定義する。このとき加法、乗法に関する分配法則、交換法則が成り立つことが証明できる。

また実数 r に対して $(r,0)$ を考えれば、$(r_1,0)+(r_2,0)=(r_1+r_2,0), (r_1,0)(r_2,0)=(r_1r_2,0)$ が成り立ち、$(1,0)(a,b)=(a,b)$ がなりたつ。実数の加法と乗法の演算はそのまま $(r,0)$ を対応させることにより、複素数の中の加法と乗法を保つ部分集合と思う事ができる。$z=(a,b)$ を $z=a+bi$ と書きこのようもの（実体は二つの実数の組であることを思い出そう）を複素数とよぶ。この記法を用いれば、$i^2=-1$ という i が本来持っていてほしい性質も満たされている。実数 r は $r+0i$ と思えば複素数の四則演算を保つ部分集合となるので、複素数は実数を拡張した数体系であるといえる。

$z=a+bi$ に対して z の複素共役 $\bar{z}$ を $\bar{z}=a-bi$ とおくと次のような性質がある。

1. 二つの複素数 z_1,z_2 に対して $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}, \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
2. $z=a+bi$ のとき $z\bar{z}=a^2+b^2$ である。従って $z\bar{z}\geq 0$ で等号は $z=0$ のときにのみ成立する。$|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$ と定義し z の絶対値という。

上の性質から $z \neq 0$ であれば、$z\bar{z} = |z|^2 \neq 0$ なので、$w = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ とおくと、$zw = 1$ となる。この w を z の逆元といい、$z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ と書く。すなわち、四則演算に関する通常、数と呼ばれるものの法則が満たされている。

平面と複素数

複素数は二つの実数の組 (a, b) に対して四則演算を定めたものなので、この実数の組を平面上の一点と同一視すると、複素数全体の集合は平面上の点の集合と同一視される。この同一視をもって複素数を平面で表したものを複素平面、あるいは複素数平面という。加法、乗法の演算規則は平面上の図形的意味を用いて考えることができる。

1. z_1 と z_2 の和と実数倍はベクトルとしての和と実数倍
2. i 倍をする操作は反時計まわり 90 度の回転
3. $z = (a, b)$ の w 倍は w と iw を単位とする新しい直交座標を考えたときの座標 (a, b) にあたる点
4. z の絶対値は z と原点との距離

問題 1. *3* つ目の性質により、w の長さが 1 であれば w 倍は回転をする操作を表わす。これを用いて、

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$$

が成り立つことを示せ。

2 次方程式と 3 項間漸化式

数列 $a_1, a_2 \ldots,$ が漸化式

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$$

で決まるときこの漸化式を 3 項間（線型）漸化式といわれる。3 項間漸化式として有名なものにフィボナッチ数列

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

がある。この漸化式に対して定まる 2 次方程式

$$x^2 - px - q = 0 \tag{1}$$

は特性方程式といわれる。例えばフィボナッチ数列の特性方程式は $x^2 - x - 1 = 0$ である。いま特性方程式が重複解がないとする。すなわち $p^2 + 4q \neq 0$ とする。このとき特性方程式の解を α, β とすると、漸化式 (1) は次のように書き換えられる。

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$
$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

従って

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta^n(a_2 - \alpha a_1)$$
$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha^n(a_2 - \beta a_1)$$

がなりたち、上の式から下の式の両辺をひくことにより、この数列の一般項は

$$a_{n+1} = \frac{1}{\beta - \alpha}\Big(\beta^n(b - \alpha a) - \alpha^n(b - \beta a)\Big)$$

で与えられることになる。もともとの漸化式が実数を係数とする漸化式であっても特性方程式の解は虚数となることもあり、一般項を書こうとするときに複素数が必要となることもある。

問題 2. $\rho = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ とする。$a_1 = 1, a_2 = 3$ とする。$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して、a_{n+2} を

$$a_{n+2} = -\rho a_{n+1} - a_n$$

によって定めるとき、a_n はどのような数列になるか？

　この数列の初めの数項を書いてみると、

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = -3\rho - 1 = -\dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{2}, a_4 = 4\rho = 2 + 2\sqrt{5}, a_5 = -\rho - 3 = -\dfrac{7 + \sqrt{5}}{2},$
$a_6 = 1, a_7 = 3, a_8 = -3\rho - 1 = -\dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{2}, a_9 = 4\rho = 2 + 2\sqrt{5}, a_{10} = -\rho - 3 = -\dfrac{7 + \sqrt{5}}{2},$
$\ldots$

となっている。この数列が周期 5 で同じものの繰り返しとなっているのはなぜだろうか？

　代数方程式が解けるようにするには複素数までで十分　$x^2 = -a, (a > 0)$ を解くと $x = \pm\sqrt{a}i$ となるので実係数の 2 次方程式はすべて解けることになる。それでは $x^2 = i$ が解けるようにとなるためには複素数からさらに増やさなくてはならないのか？というのが自然に問題になる。この場合は $x = a + bi$ とおいて

$$i = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

となるので $a^2 = b^2, ab = \frac{1}{2}$ となるので、$(a, b) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ が解となるので $x = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ となり、あっけなく解けてしまう。

複素数の四則を用いて、複素数を係数とする多項式も通常の実係数多項式と同様に定義でき、これに対しても加法、乗法が定義される。一般に複素数 $a_1, \ldots, a_n$ を係数とする n 次方程式

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{2}$$

の解をすべて得るのに、複素数だけで十分なのか、あるいはもっと新種の数を新たに考えなくてはならないのか？これについては次の定理がある。

定理 1 (代数学の基本定理)**.** (2) の形の方程式は複素数の範囲で（重複度もこめて）n 個の解をもつ。

上の定理を用いれば、(2) の形の方程式の解 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を用いて $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ を

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$$

と因数分解することもできる。全部一次式に分解できてしまうところがきわめて便利である。