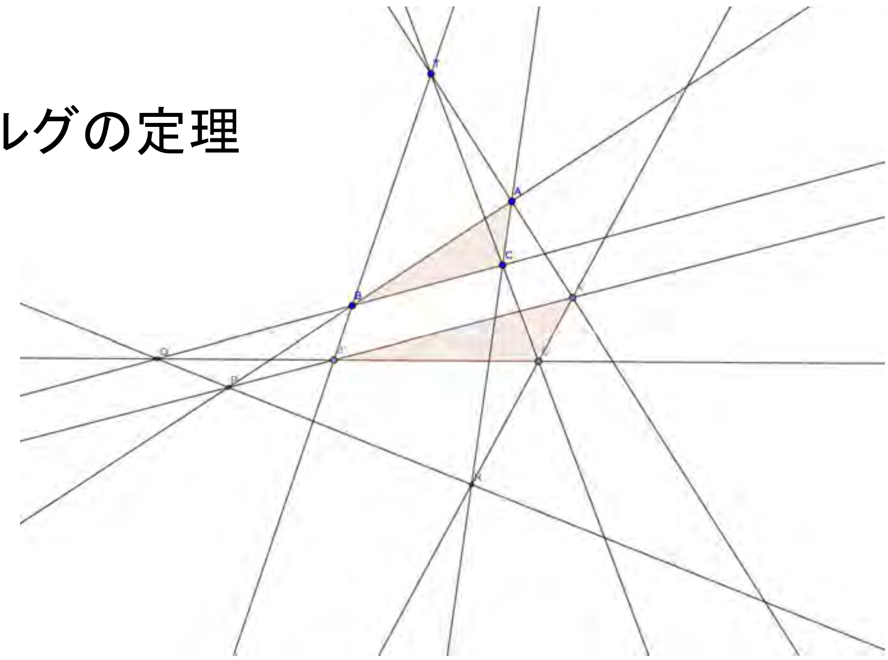
図形のからくり

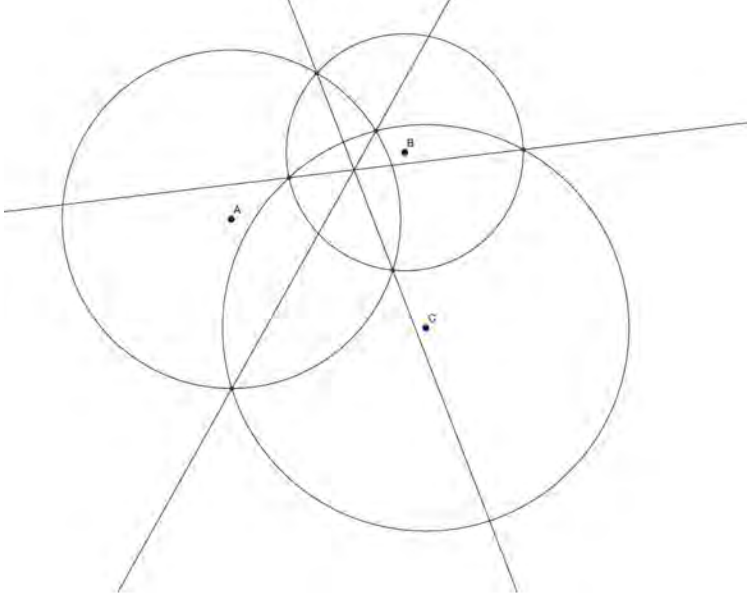
― ぴったりはまる図形～なんでそうなるのだろう ―

坪 井　俊
東京大学大学院数理科学研究科
2016年11月26日

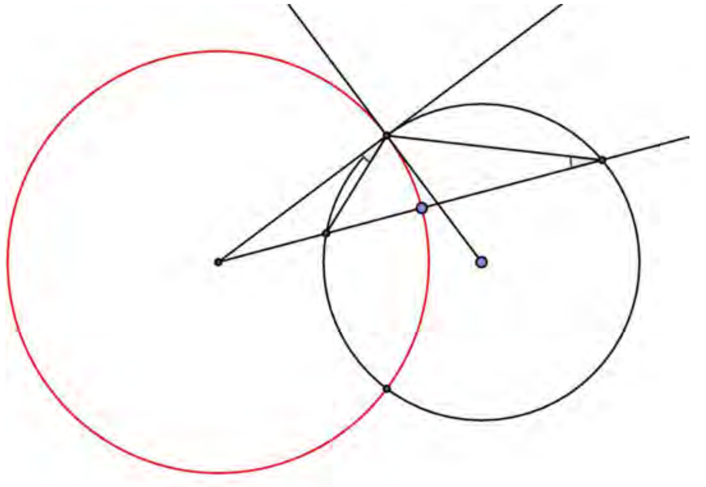
デザルグの定理

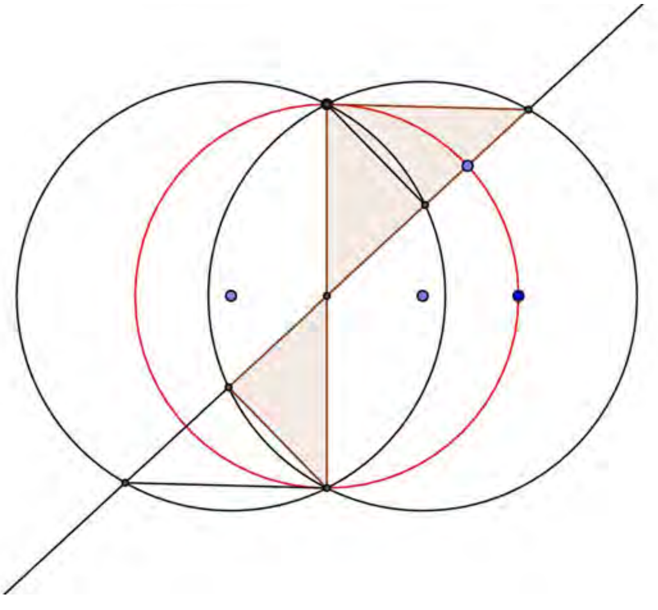


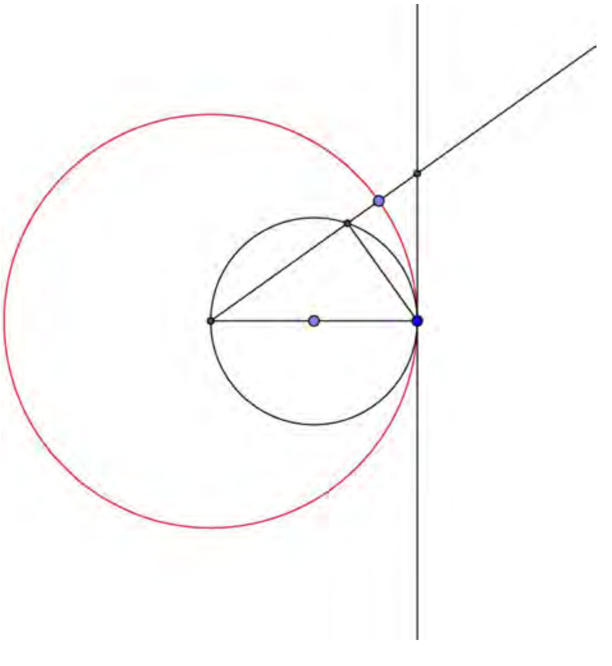
3つの円が3つずつ交わるとき、2円の交点を結ぶ3つの弦は1点で交わる



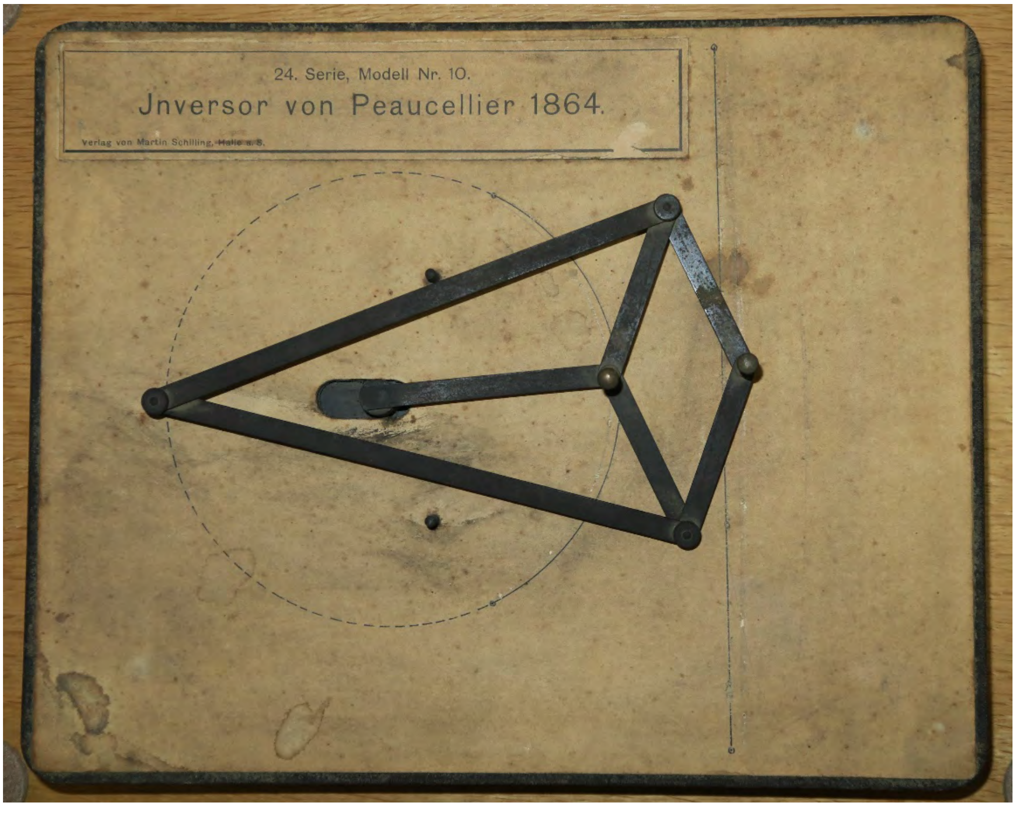
反転



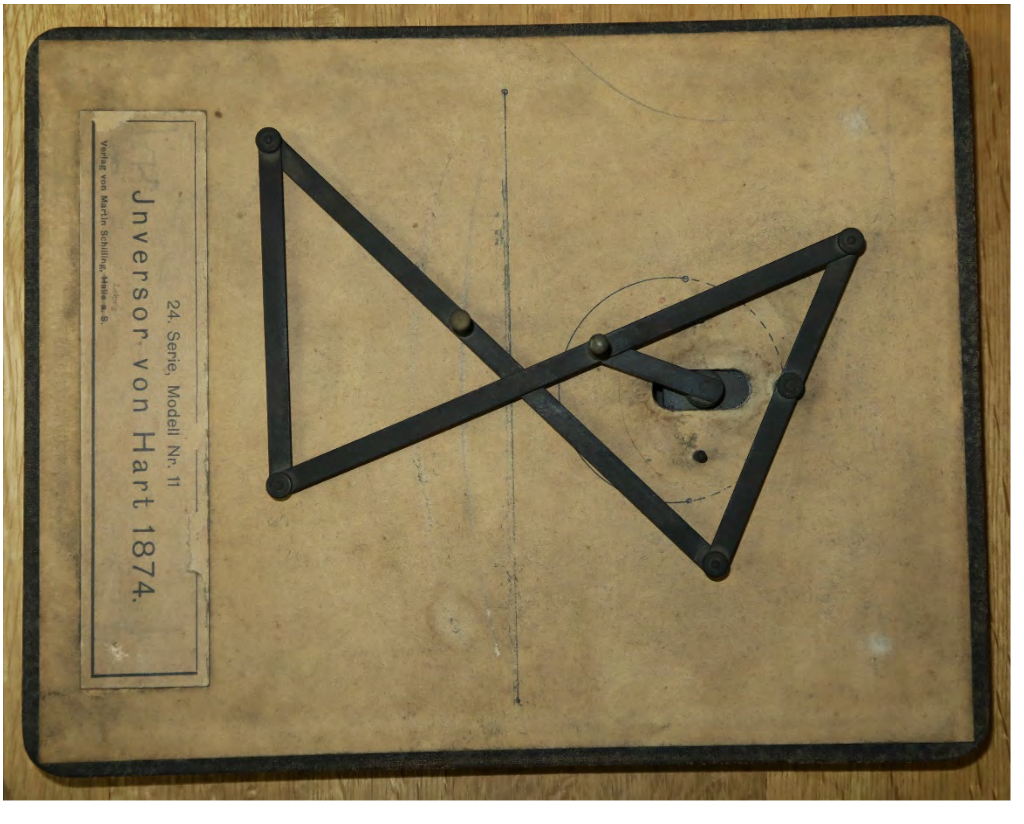




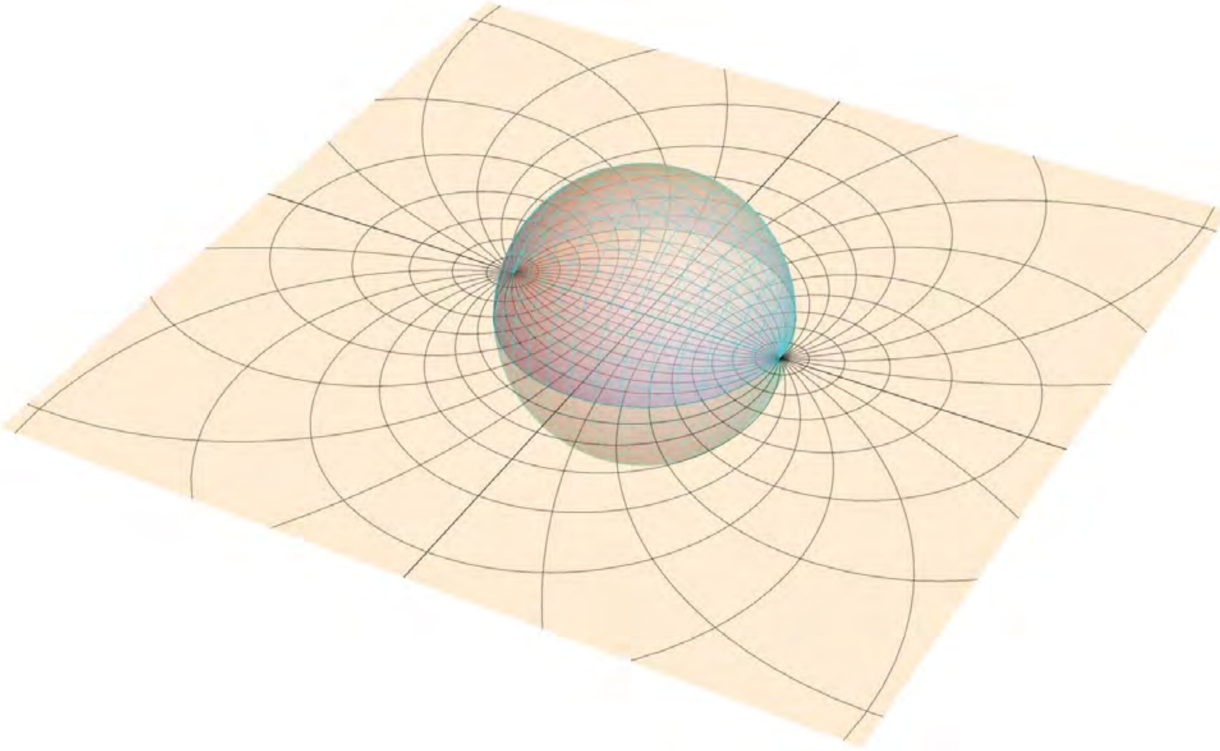
ポーセリエの反転器



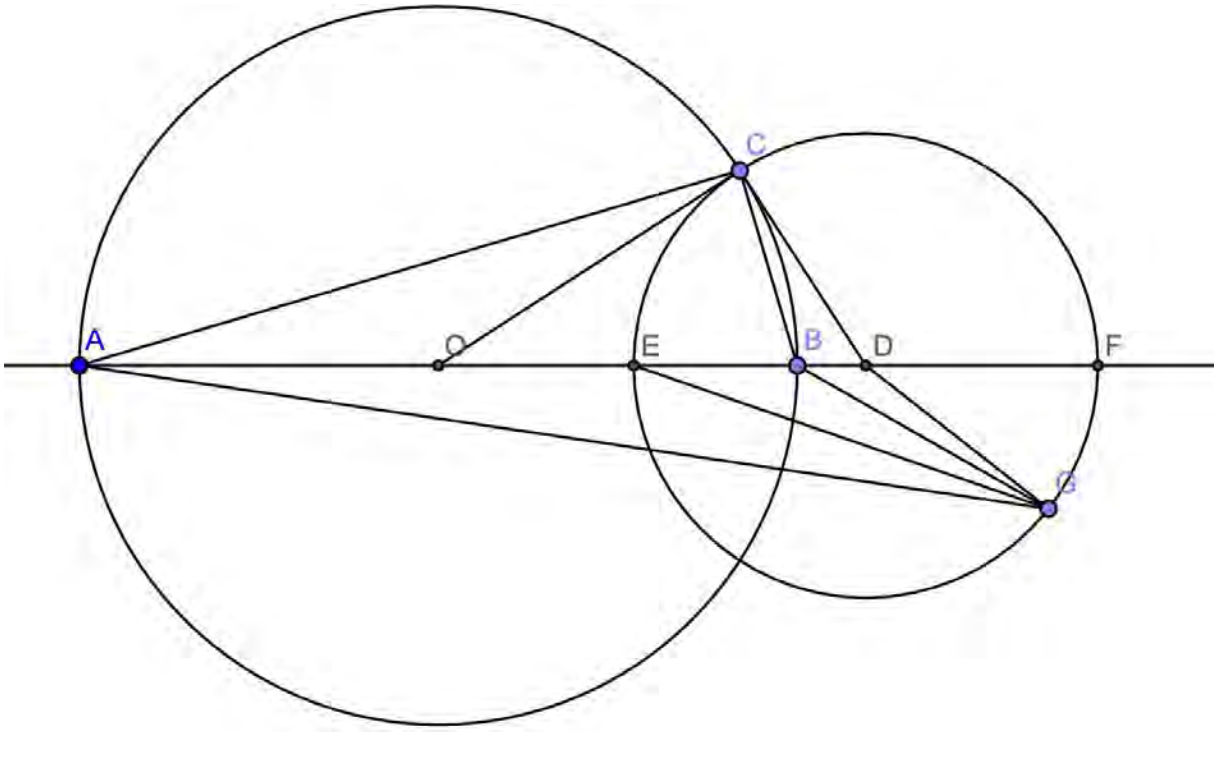
ハートの反転器



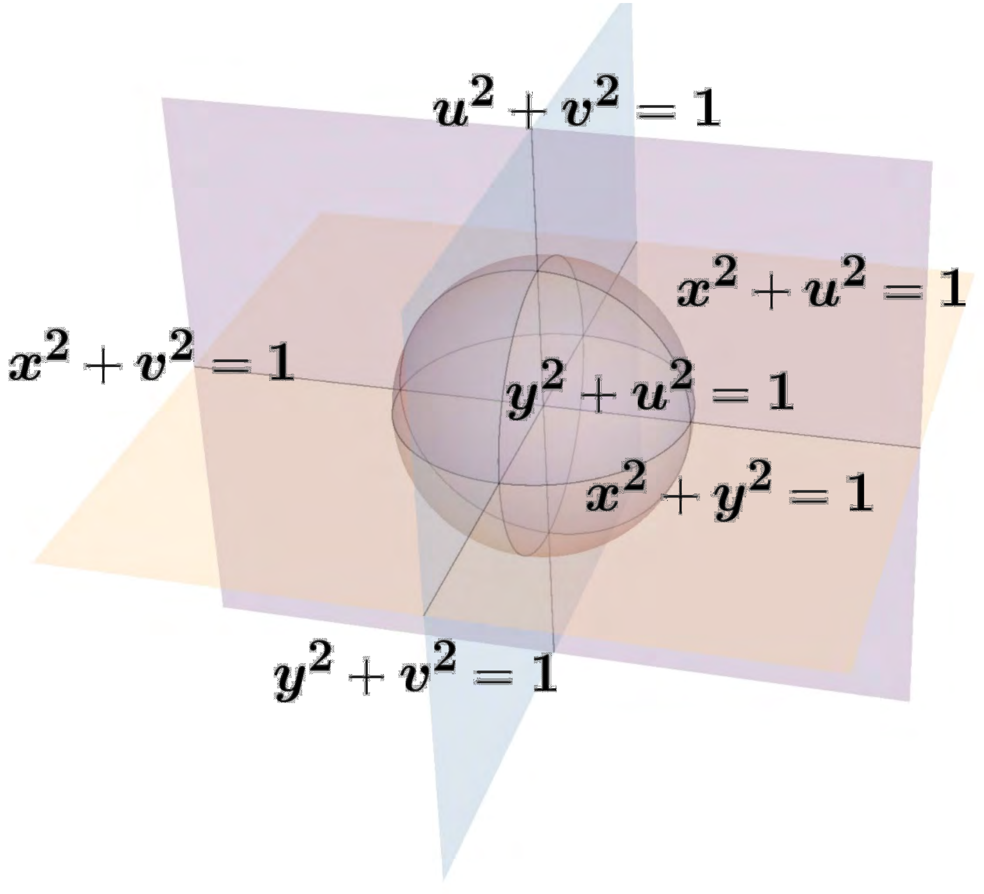
ステレオグラフ射影



円に直交する円が直径の両端について
アポロニウスの円となる



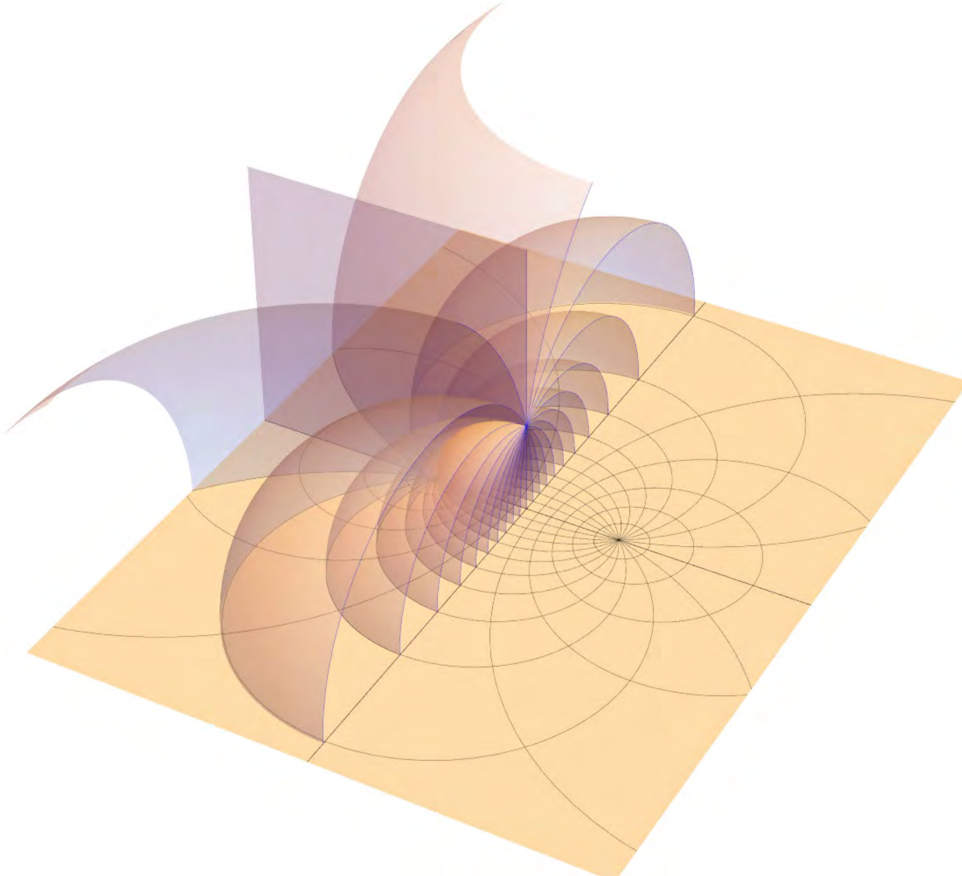
３次元球面からのステレオグラフ射影

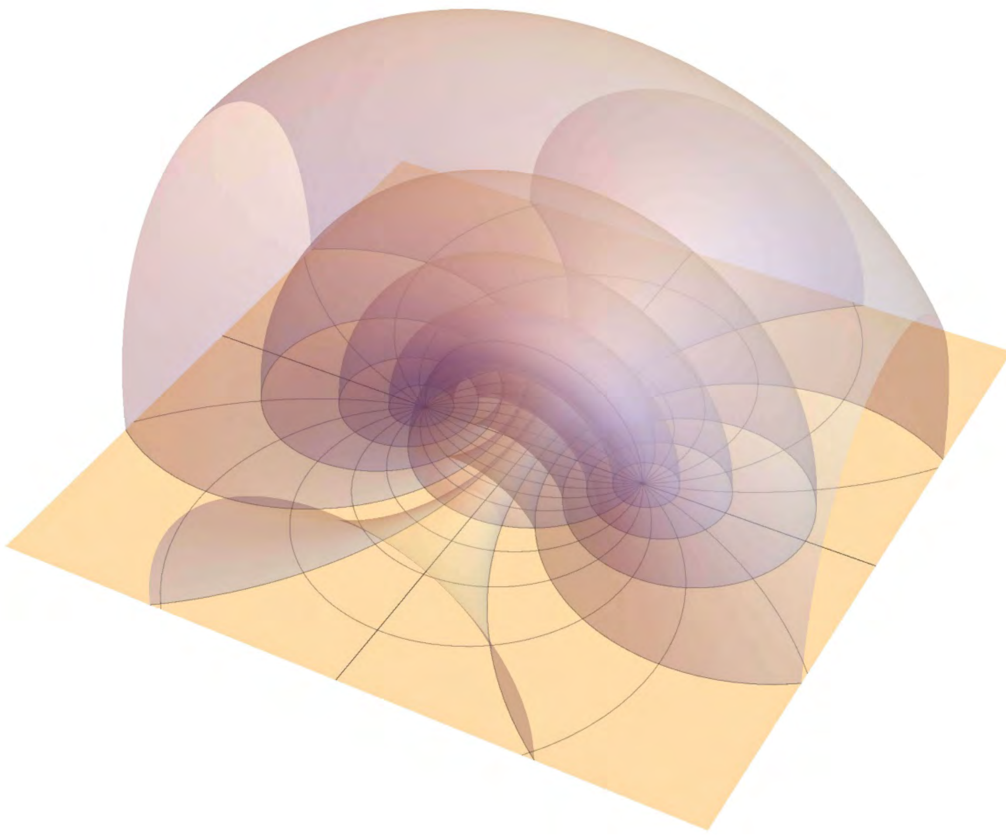


　$xyuv$ 空間内の球面を xy 平面方向と uv 平面方向に同時に回転させるとき、この回転の軌道は大円になります。

　この理由を述べるのには、複素数が著しく便利です。
　$x+y\sqrt{-1}$ が θ 回転したとき、$x+y\sqrt{-1}$ は $\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ を掛けたものに移りますが、$u+v\sqrt{-1}$ も $\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ を掛けたものに移るので、$u+v\sqrt{-1}$ は $x+y\sqrt{-1}$ の複素定数倍であり、それはこの軌道が $xyuv$ 空間の原点を通る１つの平面上にあることを示しています。
　３次元球面と原点を通る平面の交わりは大円ですから、それをステレオグラフ射影で写したトーラス上の軌道は円周となります。

yv平面の回転

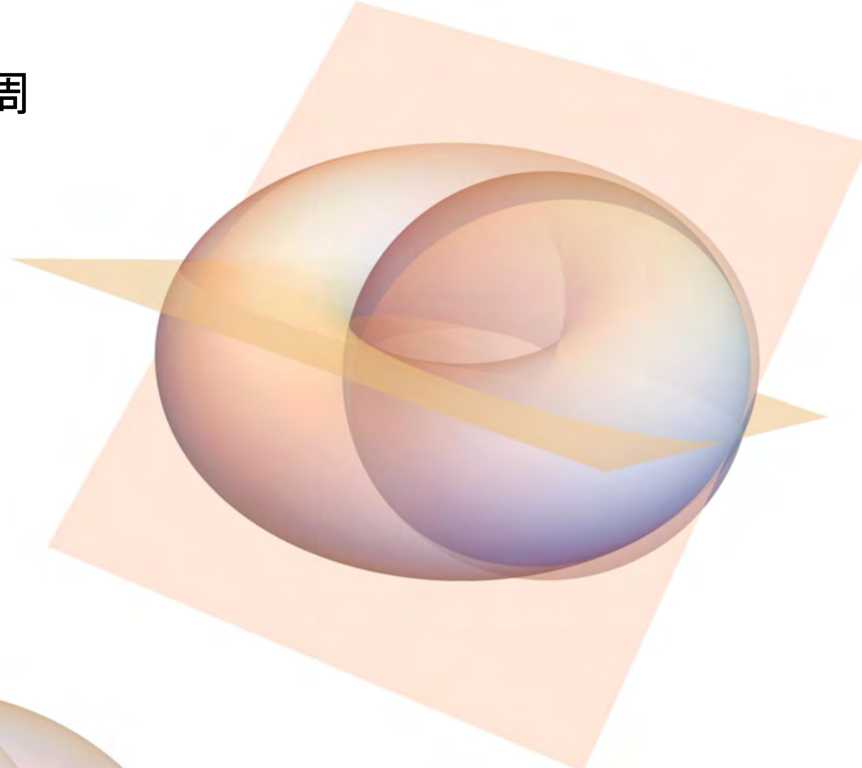


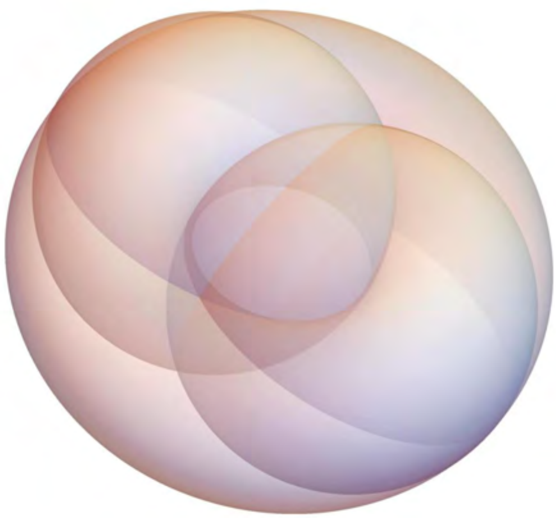


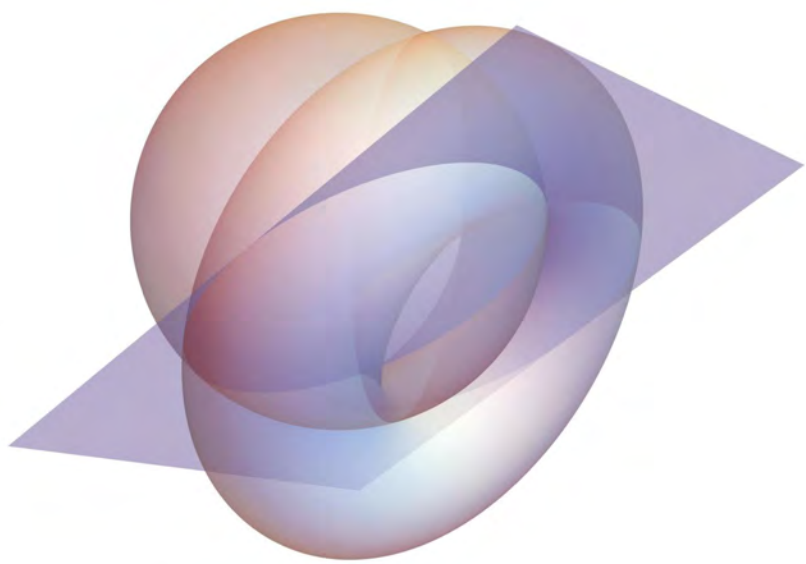
ビラルソーの円周

寺杣友秀教授制作　河野俊丈教授撮影

ビラルソーの円周







参考ビデオ：http://www.dimensions-math.org/