

平面折り紙の基本定理

志甫 淳*

平成30年10月6日

日本における折り紙の源流は、和紙を折り目正しく折り、物を心を込めて包み渡す折紙礼法(あるいは折形礼法)という礼法だそうである。現代では、熨斗袋などにその名残りがあ

る。遊戯としての折り紙は江戸時代に普及した。中国やヨーロッパにも折り紙はあるようだが、現在、‘origami’の呼称が海外でも使われることが多い。

近年では、折り紙の数学的研究や工学的応用も行われている。本稿では、平面折り紙におけるいくつかの数学的な定理を紹介する。

まず、本稿における約束事をいくつか定める。一般に、折り紙作品の完成形は立体的なものであることが多い。例えば、代表的な折り紙作品である「鶴」がそうである。また、折り紙作品には、複数の折り紙を組み合わせて作るものもある。しかしながら、本稿では、1枚の折り紙で作る、完成形が平坦(机に平行に紙の層が重なった状態)である折り紙作品のみを考え、それを平面折り紙と呼ぶことにする。(例えば、「鶴」の場合、最後に立体的に形を整える直前の状態を完成形であると考えればよい。)また、折り紙作品を作る際の折り目は、紙の端から端まで貫いていなくてもよいが、必ず線分であるとする。

平面折り紙を一旦完成させて、また広げて最初の状態に戻すと、いろいろな折り目のついた一枚の折り紙となる。なお、折り紙の折り目には、山折りと谷折りの2種類があることに注意しよう。

*東京大学大学院数理科学研究科。本稿は平成30年度群馬県高校生数学キャンプ「折り紙を折る、切る、曲げる」における講義のためのテキストである。

折り紙において、2 本以上の折り目が紙の境界以外の点でぶつかっていることがあるが、そのような点を頂点と呼ぶことにする．本稿では、次の問題を考えたい．

問題．平面折り紙 (を広げたもの) において、ある頂点の周りの折り目の様子 (山折り・谷折りの本数、折り目間の角度) はどうなっているか？ また、どうなりうるか？

演習 1．適当な (それほど難しくない) 平面折り紙を折り、それを広げて、各頂点の回りの山折り・谷折りの本数、折り目間の角度を調べよ．

以後、本稿では、1 つの頂点の周りのみに着目して上の問題を考える．従って、頂点が円形折り紙の中心のみで、折り目が円形折り紙の半径である場合を主に考える．

演習 2．頂点が円形折り紙の中心のみで、折り目が円形折り紙の半径である平面折り紙 (で単純過ぎないもの) を一つ折り、それを広げて、頂点の周りの山折り・谷折りの本数、折り目間の角度を調べよ．

演習 3．頂点が円形折り紙の中心のみで、折り目が円形折り紙の半径である平面折り紙を考える．

(1) 折り目が 3 本で、折り目間の角度が全て 120° であるものを全て求めよ．

(2) 折り目が 4 本で、折り目間の角度が全て 90° であるものを全て求めよ．

平面折り紙のある頂点の周りの山折り・谷折りの本数について、次の定理が知られている．

定理 1 (前川-ジュスタン定理)．平面折り紙のある頂点の周りの山折りの本数を M 、谷折りの本数を V とすると、 $M = V + 2$ または $V = M + 2$ が成り立つ．

証明．円形折り紙で考える．平面折り紙を折った状態で、円形折り紙の円周部分を見る．そして、円周上の 1 点からスタートし、(折られた状態の) 円周を 1 周するベクトルを考える．

まず、平面折り紙を折った状態で折り紙の表面が現れている場合を考える．この場合は、山折りが現れるたびにベクトルは 180° 回転し、谷折りが現れるたびにベクトルは -180° 回転する．そして、最終的に円周を 1 周した時点で

は、ベクトルは合計 360° 回転している．従って $M \cdot 180^\circ - V \cdot 180^\circ = 360^\circ$ ，
よって $M = V + 2$ となる．

平面折り紙を折った状態で折り紙の裏面が現れている場合は、山折りが現れるたびにベクトルは -180° 回転し、谷折りが現れるたびにベクトルは 180° 回転する．従って、上と同様の計算により $-M \cdot 180^\circ + V \cdot 180^\circ = 360^\circ$ ，よって $V = M + 2$ となる． $\square$

定理 2. 平面折り紙の頂点の周りの折り目の本数は偶数である．

証明. 山折りを M 本、谷折りを V 本とすると、 $M = V \pm 2$ なので $M + V = 2V \pm 2$ となり、これは偶数である． $\square$

ある頂点の周りの折り目間の角度について、次の定理が知られている．

定理 3 (川崎-ジュスタン定理). 円形折り紙の頂点 (中心) の周りの折り目 (半径) 間の角度を順に $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ とする. (n は偶数で、また $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = 360^\circ$ である.) このとき、次の 2 条件は同値である．

- (1) 折り目の山・谷をうまく決めると、折り目で折って平面折り紙ができる．
- (2) $\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \dots - \theta_n = 0^\circ$ となる．

証明. まず (1) $\implies$ (2) を示す．平面折り紙を折った状態で、円形折り紙の円周部分を長さを変えずに x 軸上に移して、それを見る．そして、円周と最初の折り目の交点からスタートし、(折られた状態の) 円周を 1 周する点を考える．すると、折り目に会うたびに点の移動する向きが変わり、また折り目間での (x 軸上での) 移動距離は角度に比例するので、1 周したときの点の x 座標の変化の総計は $\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \dots - \theta_n$ の定数倍となる．一方、点は元に戻っているため、点の x 座標の変化の総計は 0 である．従って $\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \dots - \theta_n = 0$ となる．

次に (2) $\implies$ (1) を示す．まず、最初の折り目の半径で切って考える．最初の折り目以外の折り目を山・谷交互に折る．折り紙の円周部分を長さを変えずに x 軸上に移して、それを見る．円周と (切った) 最初の折り目の交点からスタートし、(折られた状態の) 円周を 1 周する点を見ると、条件 (2) より、出発点の x 座標と到着点の x 座標は一致する．その 2 点の間に紙がない場合は、2 点を貼りあわせれば平面折り紙になっている．

しかしながら、一般には2点の間に何枚か紙があるかも知れない。その場合は点が移動している際に x 座標が最大になる (折り目上にある) 点を含む半径で切り、最初に切った折り目の所を貼りあわせる。すると、新たに切ってきた円周上の2点の間には紙はないので、その2点を貼りあわせれば平面折り紙になる。□

注．定理3は、(2)の条件が満たされているときに、「折り目の山・谷をうまく決めると平面折り紙ができる」ということを述べており、折り目の山・谷の決め方が悪いと、平面折り紙になるとは限らないことに注意。また、折り目の山・谷のうまい決め方は、一般には一意的ではない。

注．円形折り紙からある扇形を切り取って捨て、切り口の半径2つを貼りあわせてできる円錐を円錐折り紙と呼ぶことにする。(但し、円錐折り紙を考えると、必要に応じて、折り紙をペコンと反転させることができるものとする。) 円錐折り紙を使って平面折り紙を作ること考えられるが、円錐折り紙に対しても定理1, 2, 3の類似が成り立つことが、同じ証明によりわかる。

演習 4. 演習2で折り目をつけた円形折り紙に対して、折り目は変更せずに折り目の山・谷を変えて、別の平面折り紙にしてみよ。

演習 5. 頂点が円形折り紙の中心のみで、折り目が円形折り紙の半径である平面折り紙を考える。 n を偶数とするとき、折り目が n 本で、折り目間の角度が全て $(360/n)^\circ$ であるものは何通りあるか。但し、対称性により移りあうものも異なるものであると考えよ。

更に、円錐折り紙のある頂点の周りの折り目間の角度と折り方との関係について、次の定理がある。

定理 4. 円錐折り紙から作られた平面折り紙の頂点(中心)の周りの折り目(半径)間の角度を順に $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ とする。 $\theta_{i-1} > \theta_i = \dots = \theta_j < \theta_{j+1}$ (但し $\theta_0 = \theta_n, \theta_{n+1} = \theta_1$ とする)ならば、ある i 以上 j 以下の k に対して、角度 θ_k をなす2つの折り目のうち1つは山折り、1つは谷折りである。

証明. 角度 $\theta_i, \dots, \theta_j$ をなす折り目たちを全て山折りまたは全て谷折りにすると平面折り紙にならないことが、円形折り紙の円周部分を見ることにより実際に確かめられる。□

ある頂点の周りの折り目の種類と折り目間の角度の組み合わせについて、次の定理が成り立つことがわかる。

定理 5. 円錐折り紙の頂点(中心)の周りの折り目(半径)間の角度を順に $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ とし、また、各折り目の種類(山・谷)を指定する。このとき、次の2条件は同値である。

- (1) 指定した折り方により平面折り紙ができる。
- (2) 次のいずれかが成り立つ。
 - (a) $n = 2$, $\theta_1 = \theta_2$ で、2つの折り目の種類は同じである。
 - (b) n は4以上の偶数で、ある最小角 θ_k をなす2つの折り目の種類が異なり、また、この2つの折り目で折ってのりで固定してできる円錐折り紙について、指定した折り方により平面折り紙ができる。

証明. まず (1) $\implies$ (2) を示す。定理2より n は偶数である。そして、 $n = 2$ のときは、定理1, 3より、2つの折り目の種類が同じで、かつ $\theta_1 = \theta_2$ であることが言える。従って (2) の (a) が言える。

n が4以上の偶数の場合、定理4と定理1より、ある最小角 θ_k をなす2つの折り目の種類が異なることが言える。指定した折り方で平面折り紙を作ったとき、角度 θ_k をなす2つの折り目によりできる折り紙の隙間に折り紙の他の部分が挟まることがありうるが、(θ_k の最小性より) 実はその挟まりを解消することができる。よってこの2つの折り目について、のりで固定してもよいことがわかる。よって (2) の (b) が言える。

次に (2) $\implies$ (1) を示す。(2) の (a) の場合は平面折り紙ができることは明らかである。(必要に応じて反転させ、折り紙を半分に折ることになる。) (2) の (b) の場合も、のりで固定した円錐折り紙を指定した仕方で折って平面にし、そのあとで固定したのりの部分をはがして考えることにより、最初の円錐折り紙についても、指定した折り方により平面折り紙ができることがわかる。□

定理5の(2)の条件は、原理的には帰納的に確かめることができるので、定理5により、円錐折り紙の状況では、平面折り紙になるかどうかの判定ができることになる。

参考文献

- [1] ジョセフ・オルーク著，上原隆平訳，折り紙のすうり—リンケージ・折り紙・多面体の数学，近代科学社，2012 年.
- [2] エリック・D・ドメイン，ジョセフ・オルーク著，上原隆平訳，幾何的な折りアルゴリズム—リンケージ，折り紙，多面体，近代科学社，2009 年.
- [3] ウィキペディア，項目「折り紙」.