平成２９年度群馬県高校生数学キャンプ
「結晶とタイル張りの数学」

群馬県教育委員会
東京大学大学院数理科学研究科

平成２９年９月１６日〜１８日

９月１６日
開会式
１０：３５〜１１：５０　参加者紹介，イントロダクション
１３：３０〜１４：３０　演習 I　図形の合同変換群を求める (坪井)
１４：４０〜１６：００　テーマ学習 I　図形の合同変換群 (志甫)
１６：２０〜１７：５０　演習 II　タイル張りと結晶群 (金井)
１９：００〜　アシスタントとの懇談

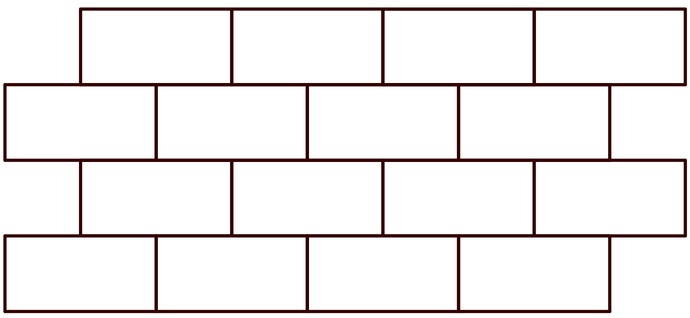
９月１７日
９：００〜１０：３０　テーマ学習 II　結晶群とその分類 (志甫)
１０：４０〜１１：５０　演習 III　ペンローズ・タイリングを創る (坪井)
ハイキング
１５：１５〜１６：１５　テーマ学習 III　ペンローズ・タイリング (志甫)
１６：３０〜１７：５０　自由研究発表準備
１９：００〜　自由研究発表準備

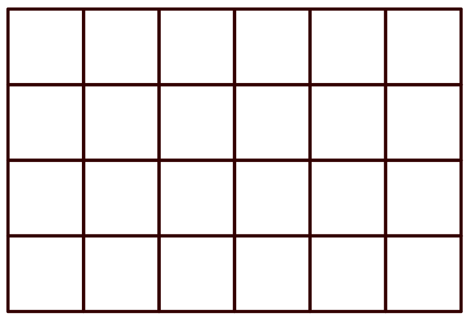
９月１８日
９：００〜１０：２０　発表 I
１０：３０〜１１：５０　発表 II
閉会式

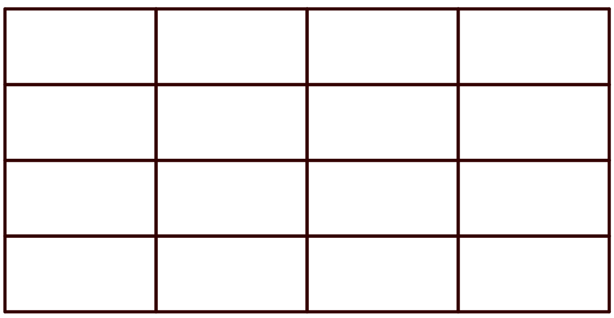
目 次

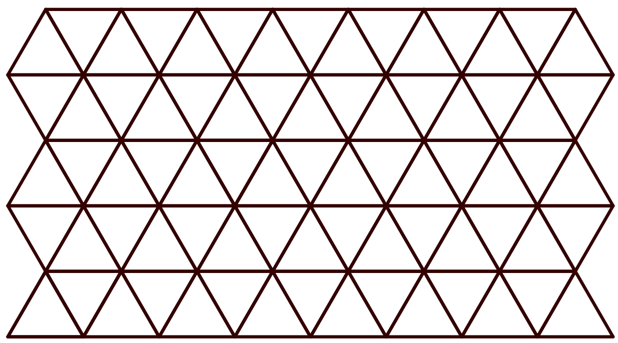
1　タイル張りとは

レンガ造りの建物の壁，浴室の壁やブロック塀など，平面が長方形や正方形の繰り返しにより埋め尽くされる様子を見たことがあると思う．より複雑な 1 種類あるいは何種類かの図形を用いて平面が埋め尽くされる様子は，エッシャーの絵やアルハンブラ宮殿の壁の模様，着物やシャツの柄など芸術性，デザイン性を持つものとして日常生活にもしばしば現れる．このように，平面を何種類かの図形を用いて隙間なく埋め尽くすことを平面のタイル張り (タイリング tiling, テセレーション tessellation) という．







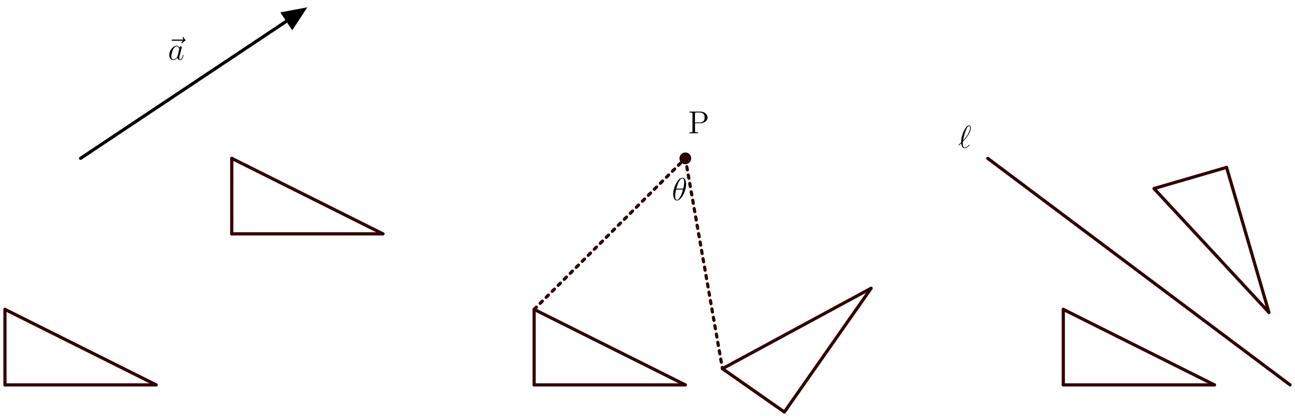


上の長方形によるタイル張り (左側の二つ) と正方形あるいは正三角形によるタイル張り (右側の二つ) を比べた場合，後者の方がより対称性 (規則性) を持つと感じられるのではないだろうか．また，タイル張りとしては異なった図

形からなるものでも対称性の観点から見ると同じであるとみなせるものもある．一般に，タイル張りの対称性を，数学的にどのように記述すればよいのであろうか？そしてタイル張りの対称性はどのように分類されるのであろうか？

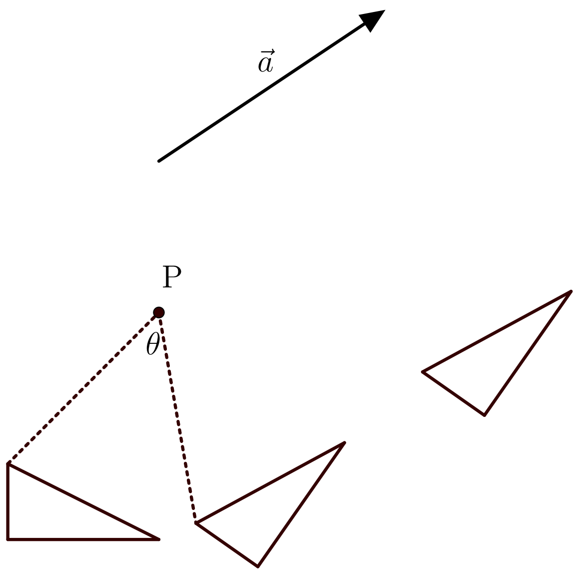
2　合同変換群

以下，ユークリッド平面を $\mathbb{E}$ と書く．$\mathbb{E}$ 上の合同変換 (等長変換 isometry) とは，全単射写像 $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ で，任意の 2 点間の距離を変えないもののことである．あるベクトル $\vec{a}$ に関する平行移動 (translation)，ある点 P を中心とする角度 θ の回転 (rotation)，ある直線 ℓ に関する鏡映 (折り返し reflexion) は合同変換の例である．

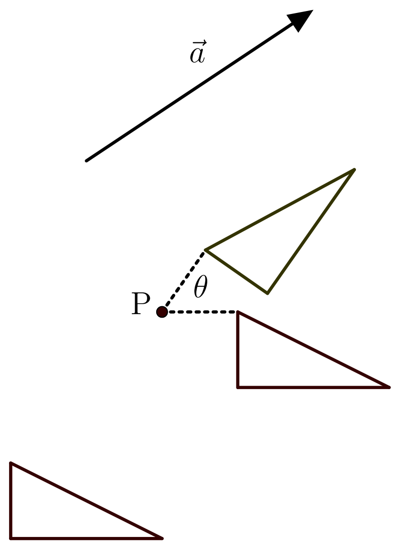


また，全く点を動かさない変換 (零ベクトルに関する平行移動あるいは角度 0 の回転とも思える) も合同変換である．これは恒等変換 (identity) と呼ばれ，id と書かれる．

2 つの合同変換 f, g があるとき，$\mathbb{E}$ 上の点にまず g をほどこしてから f をほどこすという操作を考えると，これは合同変換を定める．これを f と g の合成といい，fg と書く．($f \circ g$ と書く方が一般的であるが，$\circ$ を書くのを省略することにする.) 例えば，f をベクトル $\vec{a}$ に関する平行移動，g を点 P を中心とする角度 θ の回転とするとき，fg および gf は次のような合同変換となる．(特に，一般に $fg \neq gf$ であることがわかる.)



fg



gf

また，合同変換 f に対して，その逆変換を考えることができ，それは合同変換となる．それを f^{-1} と書く．例えば，ベクトル $\vec{a}$ に関する平行移動の逆変換は $-\vec{a}$ に関する平行移動，点 P を中心とする角度 θ の回転の逆変換は P を中心とする角度 $-\theta$ の回転，直線 ℓ に関する鏡映の逆変換はその鏡映自身である．

$\mathbb{E}$ 上の合同変換全体の集合を $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ と書く．恒等変換は合同変換であり，また $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ の元 (つまり合同変換) に対しては 2 つの元の合成をとる操作，逆変換をとる操作ができる．このような構造が入り，適切な条件を満たす集合のことを数学では群 (ぐん) と呼ぶので，$\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ のことを $\mathbb{E}$ 上の合同変換群と呼ぶ．

自然数 n に対し，合同変換 f を n 回合成してできる合同変換を f^n と書く．また，f の逆変換の n 回合成 $(f^{-1})^n$ のことを f^{-n} と書き，$f^0 = \mathrm{id}$ と定める．以上より，整数 n に対して f^n が定義されたことになる．このとき $f^n f^m = f^{n+m}$, $(f^n)^m = f^{nm}$ が成り立つ．

なお，抽象的に群について論じるときには，合成のことを積，逆変換のことを逆元と呼ぶ．また，恒等変換のことを単位元とよび 1 と書く．

問題 1. f をベクトル $\vec{a}$ に関する平行移動，g をベクトル $\vec{b}$ に関する平行移動とするとき，合成 fg はどのような合同変換となるか？また，$fg = gf$ となるか？

問題 2. f をベクトル $\vec{a}$ に関する平行移動，g を点 P を中心とする角度 θ の回転とする．$fg = gf$ となるのはどのようなときか？

3　図形の合同変換群

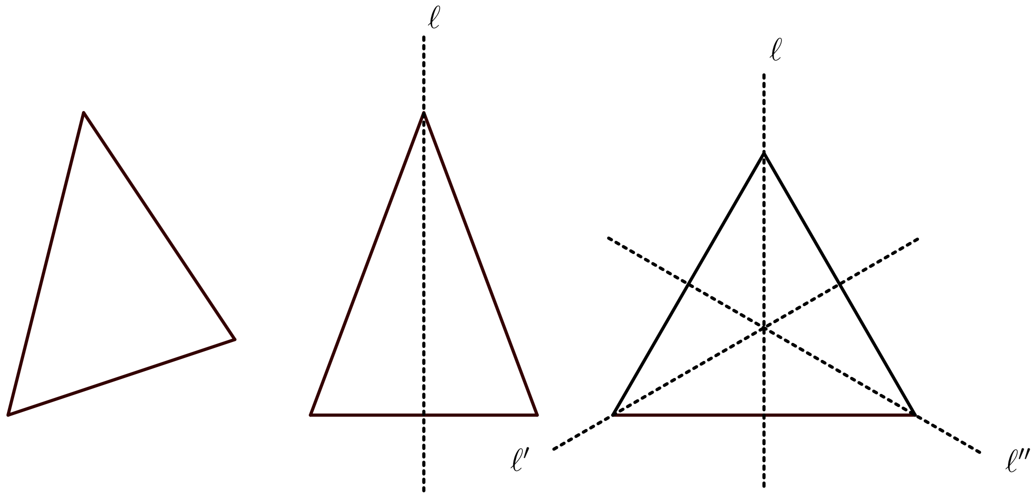
ユークリッド平面 $\mathbb{E}$ 上の図形 (たとえばタイル張り)F に対して，F を F に移すような合同変換全体のなす $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ の部分集合を $\mathrm{Isom}(F)$ とおく．

$$\mathrm{Isom}(F) = \{f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}) \mid f(F) = F\}.$$

このとき，$\mathrm{Isom}(F)$ は $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ の部分群である，すなわち，$\mathrm{Isom}(F)$ の元の合成や逆変換は $\mathrm{Isom}(F)$ に属する．$\mathrm{Isom}(F)$ を図形 F の合同変換群と呼ぶ．

この $\mathrm{Isom}(F)$ こそが，図形 F の対称性を記述するものであると言える．例えば，より多くの合同変換により保たれるような図形こそが対称性の高い図形なのである．

まず，$\mathbb{E}$ 内の三角形の合同変換群を求めてみよう．



問題 3. $\mathbb{E}$ 内の全ての辺が等しくない三角形の合同変換群の元を全て求めよ．

問題 4. $\mathbb{E}$ 内の正三角形でない二等辺三角形の合同変換群の元を全て求めよ．また，その合同変換群の元の合成がどうなるかを求めよ．

問題 5. F を $\mathbb{E}$ 内の正三角形とする．このとき，r を F の重心を中心とする角度 $120°$ の回転，s を上図の直線 ℓ に関する鏡映とすると，r, s は F の合同変換群 $\mathrm{Isom}(F)$ の元である．
(1)　整数 n に対して，r^n はどのような合同変換となるか？いつ $r^n = \mathrm{id}$ となるか？
(2)　整数 n に対して $r^n s$ はどのような合同変換となるか？
(3)　$sr = r^{-1}s$ となることを確かめよ．
(4)　$\mathrm{Isom}(F)$ の元は必ず r^n $(n = 0, 1, 2)$ または $r^n s$ $(n = 0, 1, 2)$ の形に書けることを示せ．(従って $\mathrm{Isom}(F)$ は 6 つの元からなる.)
(5)　$r^n s$ と $r^m s$ の合成 $(r^n s)(r^m s)$ を (5) に挙げた形の元で書け．

問題 6. $\mathbb{E}$ 内の正方形でない長方形の合同変換群の元を全て求めよ．また，その合同変換群の元の合成がどうなるかを計算せよ．

問題 7. $\mathbb{E}$ 内の正方形 F の合同変換群 $\mathrm{Isom}(F)$ について，問題 5 と同様の考察を行え．

問題 8. $\mathbb{E}$ 内の正 n 角形 F の合同変換群 $\mathrm{Isom}(F)$ について，問題 5 と同様の考察を行え．

4　合同変換の性質

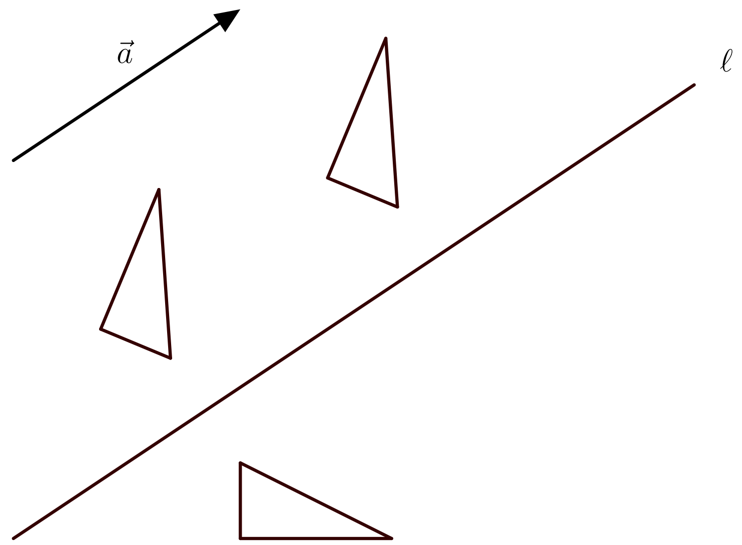
合同変換の基本的な性質について述べる．

命題 1. $\mathbb{E}$ 上の 3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ を同一直線上にないようにとる．このとき，2 つの $\mathbb{E}$ の合同変換 f, g が $f(\mathrm{P}) = g(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q}) = g(\mathrm{Q}), f(\mathrm{R}) = g(\mathrm{R})$ を満たすならば $f = g$ となる．

証明. $\mathbb{E}$ 上の任意の点 S に対して，S と $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ との距離をそれぞれ a, b, c とすると，$f(\mathrm{S}), g(\mathrm{S})$ は共に $f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q}), f(\mathrm{R})$ との距離が a, b, c である点であるが，そのような点は高々一つしかないので $f(\mathrm{S}) = g(\mathrm{S})$ となる．よって $f = g$．　□

$\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ を命題1のようにとり，f を合同変換とする．このとき，合同変換により $\triangle\mathrm{PQR}$ と $\triangle f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})f(\mathrm{R})$ は合同であるが，三角形の向きは変わらない場合と変わる場合があることに注意する．

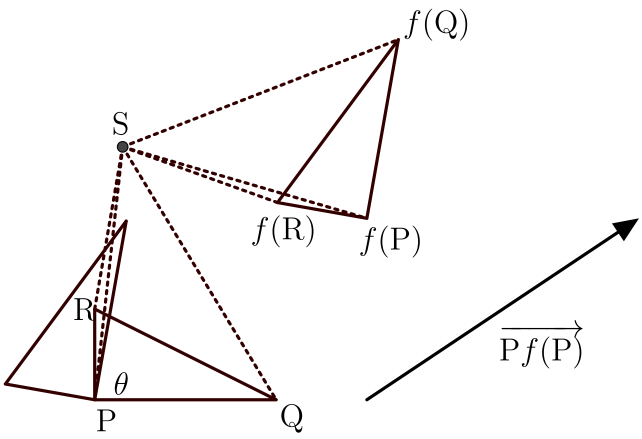
平行移動，回転，鏡映が合同変換であることは既に説明した．また，ある直線 ℓ に関する鏡映と，ℓ に平行なあるベクトル $\vec{a}$ に関する平行移動との合成である合同変換を ℓ と $\vec{a}$ に関するずらし鏡映 (並進鏡映 glide reflexion) と呼ぶ．(鏡映はずらし鏡映の特別な場合である.)



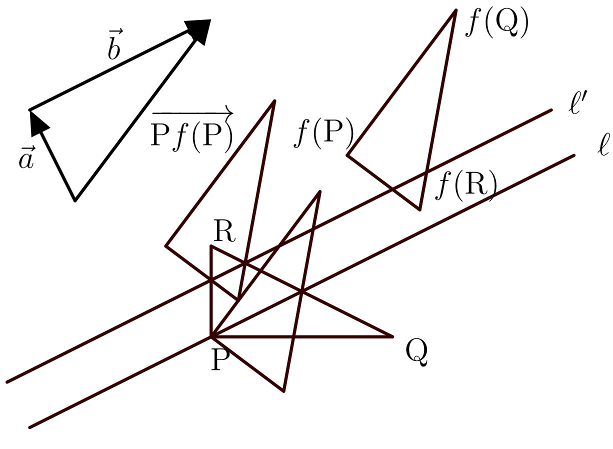
このとき，次の定理が成り立つ．

定理 2. $\mathbb{E}$ 上の合同変換 f は平行移動，回転，ずらし鏡映のいずれかである．

証明. $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ を同一直線上にない3点とする．$\triangle\mathrm{PQR}$ と $\triangle f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})f(\mathrm{R})$ の向きが変わらない場合，P を中心とする適当な角度 θ の回転と $\overrightarrow{\mathrm{P}f(\mathrm{P})}$ に関する平行移動との合成により $\triangle\mathrm{PQR}$ が $\triangle f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})f(\mathrm{R})$ に移ることがわかるので，命題より，この合成は f と一致する．特に，$\theta = 0$ のときは f は平行移動である．$\theta \neq 0$ のときは，点 S を，(線分 SP の長さ) $=$ (線分 $\mathrm{S}f(\mathrm{P})$ の長さ) かつ (向きを含めて)$\angle\mathrm{PS}f(\mathrm{P}) = \theta$ となるようにとる．すると S を中心とする角度 θ の回転により $\triangle\mathrm{PQR}$ が $\triangle f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})f(\mathrm{R})$ に移ることがわかるので，命題により，f はこの回転となる．



$\triangle\mathrm{PQR}$ と $\triangle f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})f(\mathrm{R})$ の向きが変わる場合，P を通るある直線 ℓ に関する鏡映と $\overrightarrow{\mathrm{P}f(\mathrm{P})}$ に関する平行移動との合成により $\triangle\mathrm{PQR}$ が $\triangle f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})f(\mathrm{R})$ に移るので，命題より，f はこの合成と一致する．$\overrightarrow{\mathrm{P}f(\mathrm{P})} = \vec{a} + \vec{b}$ (但し $\vec{a}$ は ℓ に垂直なベクトル，$\vec{b}$ は ℓ に平行なベクトル) と分けると，f は (1) ℓ に関する鏡映と $\vec{a}$ に関する平行移動との合成，と (2) $\vec{b}$ に関する平行移動，の合成で書けることになるが，(1) は ℓ を $\vec{a}/2$ だけ平行にずらした直線 ℓ' に関する鏡映であることが (例えば適当な 3 点の行き先を見ることにより) わかるので，結局 f はずらし鏡映であることがわかる．



$\square$

$\mathbb{E}$ 上の合同変換 f が平行移動または回転ならば，f は全ての三角形の向きを変えない．このとき，f を向きを変えない合同変換と呼ぶ．また，f がずらし鏡映ならば f は全ての三角形の向きを変える．このとき，f を向きを変える合同変換と呼ぶ．

問題 9. P を $\mathbb{E}$ 内の点とする．このとき，2 つの平行移動 f, g が $f(\mathrm{P}) = g(\mathrm{P})$ を満たすならば $f = g$ となることを確かめよ．

問題 10. P, Q を $\mathbb{E}$ 内の異なる 2 点とする．
(1)　2 つの向きを変えない合同変換 f, g が $f(\mathrm{P}) = g(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q}) = g(\mathrm{Q})$ を満たすならば $f = g$ となることを確かめよ．
(2)　2 つの向きを変える合同変換 f, g が $f(\mathrm{P}) = g(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q}) = g(\mathrm{Q})$ を満たすならば $f = g$ となることを確かめよ．

問題 11. f_1, f_2 を (中心が異なるかもしれない) 角度 θ_1, θ_2 の回転とする．このとき，$\theta_1 + \theta_2 = 0$ ならば $f_1 f_2$ は平行移動，$\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ ならば $f_1 f_2$ は (ある点を中心とする) 角度 $\theta_1 + \theta_2$ の回転であることを示せ．

問題 12. f をずらし鏡映とするとき，f が鏡映であることと $f^2 = \mathrm{id}$ となることが同値であることを示せ．

問題 13. f_1 を直線 ℓ_1 とそれに平行なベクトル $\vec{a}_1$ に関するずらし鏡映，f_2 を直線 ℓ_2 とそれに平行なベクトル $\vec{a}_2$ に関するずらし鏡映とする．このとき，ℓ_1 と ℓ_2 が平行ならば $f_1 f_2$ は平行移動，ℓ_1 と ℓ_2 が平行でないならば $f_1 f_2$ は回転となることを示せ．

問題 14. $f_1 \neq \mathrm{id}$ を点 P を中心とする角度 θ の回転，f_2 を直線 ℓ に関する鏡映とする．このとき P が ℓ 上にあるならば $f_1 f_2$ は鏡映，P が ℓ 上にないならば $f_1 f_2$ は鏡映でないずらし鏡映となることを示せ．

問題 15. f を平行移動 (回転，ずらし鏡映，鏡映)，g を合同変換とするとき，gfg^{-1} もまた平行移動 (回転，ずらし鏡映，鏡映) であることを示せ．

5 結晶群

この節では結晶群 (より正確には平面結晶群) の概念を定義する．この概念は適当なタイル張りの合同変換群に対応している．

以下，$\mathbb{E}$ 内の 2 点 P, Q に対して P, Q の距離（つまり線分 PQ の長さ）を $\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ と書くことにする．

G を $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ の部分群とし，以下，G に属する合同変換について考える．$\mathbb{E}$ の点 P に対して，G に属する合同変換により P をいろいろ動かすことによりできる集合 $O(\mathrm{P}) = \{f(\mathrm{P}) \mid f \in G\}$ を P の軌道 (orbit) という．このとき，G が離散群であるとは，どのような点 P に対しても，軌道 $O(\mathrm{P})$ に属する P 自身以外の点により P に限りなく近づくことができないことを言う．言いかえると，ある正の数 ϵ で，

$$(*) \quad f \in G,\ \mathrm{d}(\mathrm{P}, f(\mathrm{P})) > 0 \text{ ならば } \mathrm{d}(\mathrm{P}, f(\mathrm{P})) \geq \epsilon$$

を満たすものが存在するということである．

命題 3. G が離散群で，$O(\mathrm{P})$ が P と異なる点を含むならば，そのなかで P に最も近いものが存在する．(但し,「最も近いもの」は一つではないかもしれないことに注意.)

証明. $O(\mathrm{P})$ に属する P でない点 Q を一つとり，$\delta = \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ とおく．そして D を，P との距離が δ 以下の点の集合とする．(D は P を中心とする半径 δ の円板である.) このとき，D と $O(\mathrm{P})$ の共通部分 $D \cap O(\mathrm{P})$ は Q を含むので P 以外の点を含む．もし $D \cap O(\mathrm{P})$ が P 以外の点を有限個しか含まないならば，そのうち最も P に近い点が求める点である．そこで $D \cap O(\mathrm{P})$ が P 以外の点を無限個含むと仮定して，矛盾を導けばよい．半径 $\epsilon/3$ の円板 $C_1, ..., C_N$ をうまく充分多くとれば D が C_i たちの和集合 $\bigcup_{i=1}^{N} C_i$ に含まれるようにできる．P 以外の $D \cap O(\mathrm{P})$ の点を $(N+1)$ 個とってそれを $\mathrm{P}_1, ..., \mathrm{P}_{N+1}$ とすれば，どれかの円板 C_i はこのうち 2 個 (以上) の点を含むことになる．それを $\mathrm{P}_j, \mathrm{P}_k$ とする．$\mathrm{P}_j, \mathrm{P}_k$ は C_i に含まれるので $0 < \mathrm{d}(\mathrm{P}_j, \mathrm{P}_k) \leq 2\epsilon/3$ である．また，$\mathrm{P}_j, \mathrm{P}_k$ は軌道 $O(\mathrm{P})$ に属するのである $f, g \in G$ に対して $\mathrm{P}_j = f(\mathrm{P}), \mathrm{P}_k = g(\mathrm{P})$ と書ける．すると

$$2\epsilon/3 \geq \mathrm{d}(\mathrm{P}_j, \mathrm{P}_k) = \mathrm{d}(f(\mathrm{P}), g(\mathrm{P})) = \mathrm{d}(f^{-1}f(\mathrm{P}), f^{-1}g(\mathrm{P})) = \mathrm{d}(\mathrm{P}, f^{-1}g(\mathrm{P})) > 0$$

となる．(2 つめの等号は f^{-1} が合同変換であることから言える.) $f^{-1}g \in G$ なので，この式は $(*)$ に矛盾する． $\square$

以下，G に属する平行移動全体のなす群を T と書くことにする．このとき，結晶群の概念を次のように定義する．

定義 4. $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ の部分群 G が結晶群であるとは，G が離散的で，かつ T が 2 つの独立な方向のベクトルに関する平行移動を含むこと．

1 節で挙げたタイル張りの合同変換群は全て結晶群である：離散的であることはタイルの頂点が頂点に移ることを用いて示すことができ，また，2 つの独立な方向のベクトルに関する平行移動を含むことは図形をよく見るとわかる．

6 結晶群の分類

この節では，結晶群を分類する．以下，G を結晶群とし，G に属する向きを変えない合同変換全体のなす群を G^+, G に属する平行移動全体のなす群を T とする．このとき $T \subseteq G^+ \subseteq G$ である．

6.1 T の構造の決定

まず T の構造が一意的に定まることを示そう．

命題 5. $T = \langle a, b \,|\, ab = ba \rangle$ である．但し，この右辺は「a, b とその逆元 a^{-1}, b^{-1} の積で表され，$ab = ba$ という関係式を満たし，他の関係式はない群」のこと．

命題の結論 $T = \langle a, b \,|\, ab = ba \rangle$ は，実は
– $ab = ba$ であること，
– $T = \{a^m b^n \,|\, m, n$ は整数 $\}$ であること，
– 上の集合の元 $a^m b^n$ は (m, n) を変えたときに異なる元を表していること，
が成り立つことと同値である．以下ではこの 3 条件を確かめることにする．

証明. 点Pを任意に一つとる．Gが離散群であることより，Tも離散群であることがわかる．従って$a(\mathrm{P})$ $(a \in T)$の形に書けるPとは異なる点のうち，Pに最も近いものが存在する．また，Tは2つの独立な方向のベクトルに関する平行移動を含むので，a^n (nは整数) の形に書けないTの元が存在する．従って，$b(\mathrm{P})$ $(b \in T, b \notin \{a^n \mid n \text{ は整数}\})$の形に書けるPとは異なる点のうち，Pに最も近いものが存在する．

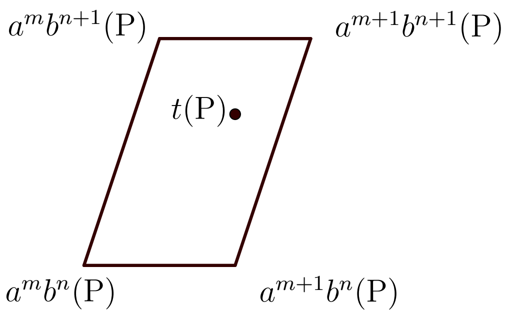
このようにa, bを選ぶとき，a, bは2つの独立な方向のベクトルに関する平行移動である：実際，a, bがそれぞれ(零でない) ベクトル$\vec{a}, \vec{b}$に関する平行移動であるとし，$\vec{b}$が$\vec{a}$の定数倍 (k倍とする) であったとすると，もしkが整数であったならば$b = a^k$となってbのとり方に矛盾するし，またkが整数でないとすれば，$[k]$をkを越えない最大の整数とするとき$ba^{-[k]}$はベクトル$(k-[k])\vec{a}$に関する平行移動となり，従って$ba^{-[k]}(\mathrm{P})$は$a(\mathrm{P})$よりもPに近くなって矛盾する．従って，$a^m b^n$は(m, n)を変えたときに異なる合同変換を表す．また$ab = ba$であることは容易にわかる．最後に，もしTの中に$a^m b^n$の形に書けない元tがあったとすると，tも平行移動であることから，$t(\mathrm{P})$は$a^m b^n(\mathrm{P})$の形をしていない．よって，あるm, nに対して，$t(\mathrm{P})$は

$$a^m b^n(\mathrm{P}), \quad a^{m+1} b^n(\mathrm{P}), \quad a^{m+1} b^{n+1}(\mathrm{P}), \quad a^m b^{n+1}(\mathrm{P})$$

のなす平行四辺形の頂点でない点となる．このとき，

$$t^{-1} a^m b^n(\mathrm{P}), \quad t^{-1} a^{m+1} b^n(\mathrm{P}), \quad t^{-1} a^{m+1} b^{n+1}(\mathrm{P}), \quad t^{-1} a^m b^{n+1}(\mathrm{P})$$

とPとの距離を考えることにより，a, bの定め方に矛盾することを示すことができる．よって従ってTの元は全て$a^n b^m$の形に書けることが言える．



□

6.2 G^+ の構造の分類

次に G^+ の構造を分類する．$T = G^+$ のときは 6.1 節の結果より G^+ は次の群と一致する．

$$G_1 = \langle a, b \,|\, ab = ba \rangle.$$

以下では $T \subsetneq G^+$ であると仮定する．

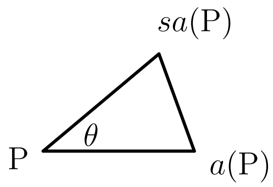
任意の $G^+ \setminus T$ の元は回転である．以下，P を中心とする角度 θ の回転を $s(\mathrm{P}, \theta)$ と書くことにする．

命題 6. $G^+ \setminus T$ に属する正の角度の回転 $s(\mathrm{P}, \theta)$ で，θ が最小になるものが存在する．また，このとき，$\theta = (360/n)^\circ$ (n は $2, 3, 4, 6$ のいずれか) である．

証明. まず，$G^+ \setminus T$ に属する正の角度の回転 $s := s(\mathrm{P}, \theta)$ を任意にとる．この P を用いて命題 5 の証明中のように $a \in T$ を選んでおく．もし $0^\circ < \theta < 60^\circ$ であったとすると，$a^{-1}sas^{-1}$ も平行移動であるが，

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}, a^{-1}sas^{-1}(\mathrm{P})) = \mathrm{d}(a(\mathrm{P}), sas^{-1}(\mathrm{P})) = \mathrm{d}(a(\mathrm{P}), sa(\mathrm{P})) < \mathrm{d}(\mathrm{P}, a(\mathrm{P}))$$

となり，これは a のとりかたに矛盾する．従って，必ず $\theta \geq 60^\circ$ となる．



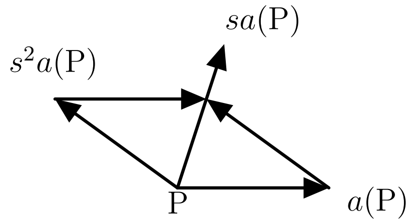
$G^+ \setminus T$ に属する 2 つの正の角度の回転 $s = s(\mathrm{P}, \theta), s' = s(\mathrm{P}', \theta')$ $(\theta < \theta')$ に対して，$s^{-1}s'$ は角度 $\theta' - \theta$ の回転なので，前段落の議論より，必ず $\theta' - \theta \geq 60^\circ$ となることがわかる．この事実から $G^+ \setminus T$ に属する正の角度の回転 $s(\mathrm{P}, \theta)$ で，θ が最小になるものの存在が言える：まず $G^+ \setminus T$ に属する正の角度の回転 $s_1 := s(\mathrm{P}_1, \theta_1)$ を任意にとる．θ_1 が最小でないとすると，より角度の小さな正の角度の回転 $s_2 := s(\mathrm{P}_2, \theta_2)$ があるが $\theta_2 \leq \theta_1 - 60^\circ$ である．θ_2 が最小でないとすると，より角度の小さな正の角度の回転 $s_3 := s(\mathrm{P}_3, \theta_3)$ があるが $\theta_3 \leq \theta_2 - 60^\circ \leq \theta_1 - 2 \cdot 60^\circ$ である．これを繰り返すと $0 < \theta_n \leq \theta_1 - (n-1)60^\circ$ と

なるので，この操作が無限に続くことはない．よって，どこかの $s_n := s(\mathrm{P}_n, \theta_n)$ において角度 θ_n は最小となる．

さて，$s = s(\mathrm{P}, \theta)$ を $G^+ \setminus T$ に属する最小の正の角度の回転とし，$\theta = (360/n)^\circ$(但し n は $1 < n \leq 6$ を満たす実数) とおく．もし n が自然数でないとすると，n' を n より大きい最小の自然数とするとき，$s^{n'}$ は角度 $(360n'/n - 360)^\circ = (360(n'-n)/n)^\circ$ の回転であり，また $0 < 360(n'-n)/n < 360/n = \theta$ なのでこれは s のとり方 (角度 θ の最小性) に矛盾する．従って n は自然数である．また，$n = 5$ であるとすると，$a, s^2 a s^{-2}$ が平行移動であることから

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{P}, as^2as^{-2}(\mathrm{P})) &= (\overrightarrow{\mathrm{P}a(\mathrm{P})} + \overrightarrow{\mathrm{P}s^2as^{-2}(\mathrm{P})}) \text{ の長さ} \\
&= (\overrightarrow{\mathrm{P}a(\mathrm{P})} + \overrightarrow{\mathrm{P}s^2a(\mathrm{P})}) \text{ の長さ} < \mathrm{d}(\mathrm{P}, a(\mathrm{P}))
\end{aligned}
$$

となり，これは a のとりかたに矛盾する．



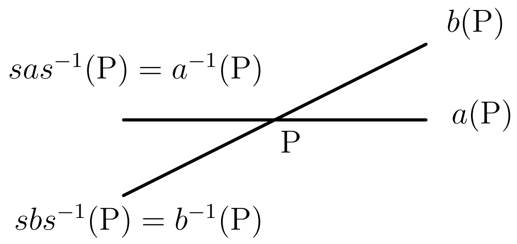
以上より n は $2, 3, 4, 6$ のいずれかである． □

以下，$s = s(\mathrm{P}, \theta)$ を $G^+ \setminus T$ に属する正の角度の回転で角度 θ が最小になるもの (の一つ) とする．また，s の中心 P を用いて $a, b \in T$ を命題 5 の証明中のようにとる．このとき，任意の $g \in G^+$ に対し，g が平行移動であれば g は $a^m b^n \quad (m, n$ は整数) の形である．また，g が回転であるとき，その角度を $k\theta$ 倍とおくと，この k は整数である．(もし k が整数でないとすると，$[k]$ を k を超えない最大の整数とするとき $gs^{-[k]}$ は角度 $(k - [k])\theta$ の回転となり，θ の最小性に反する．) すると gs^{-k} は平行移動となるので $g = a^m b^n s^k$ と書ける．以上より G^+ の元は a, b, s を用いて書けることがわかる．a, b, s の間の積の規則を求めればよい．

<u>$n = 2$ のとき</u>は s は角度 180° の回転なので $sas^{-1} = a^{-1}, sbs^{-1} = b^{-1}$ である．

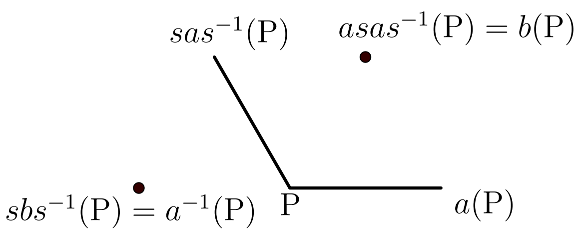
よって G^+ は次の群に一致する．

$$G_2 = \langle a, b, s \,|\, ab = ba, s^2 = 1, sas^{-1} = a^{-1}, sbs^{-1} = b^{-1} \rangle.$$



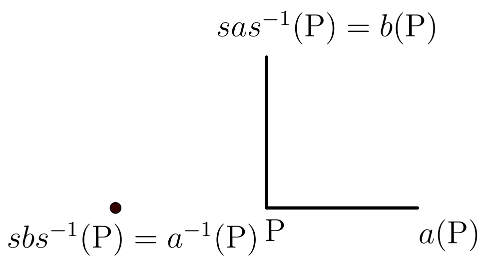
$n = 3$ のときは s は角度 $120°$ の回転である．このときは，$b = asas^{-1}$ となるように b をとることができる．(命題 5 の証明中の条件は保たれている.) そして $sas^{-1} = a^{-1}b, sbs^{-1} = a^{-1}$ であることが (幾何学的に) 確かめられる．よって G^+ は次の群に一致する．

$$G_3 = \langle a, b, s \,|\, ab = ba, s^3 = 1, sas^{-1} = a^{-1}b, sbs^{-1} = a^{-1} \rangle.$$



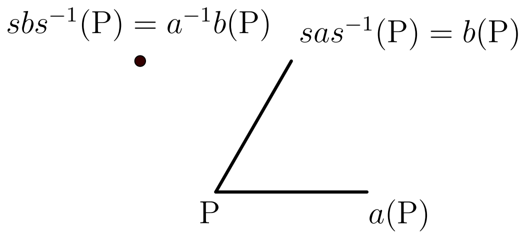
$n = 4$ のときは s は角度 $90°$ の回転である．このときは，$b = sas^{-1}$ となるように b をとることができる．(命題 5 の証明中の条件は保たれている.) そして $sas^{-1} = b, sbs^{-1} = a^{-1}$ であることが (幾何学的に) 確かめられる．よって G^+ は次の群に一致する．

$$G_4 = \langle a, b, s \,|\, ab = ba, s^4 = 1, sas^{-1} = b, sbs^{-1} = a^{-1} \rangle.$$



$n = 6$ のとき は s は角度 60° の回転である．このときは，$b = sas^{-1}$ となるように b をとることができる．(命題 5 の証明中の条件は保たれている.) そして $sas^{-1} = b, sbs^{-1} = a^{-1}b$ であることが (幾何学的に) 確かめられる．よって G^+ は次の群に一致する．

$$G_6 = \langle a, b, s \,|\, ab = ba, s^6 = 1, sas^{-1} = b, sbs^{-1} = a^{-1}b \rangle.$$



以上に挙げた G_1, G_2, G_3, G_4, G_6 が G^+ として現れうる群の全てである．

6.3 G の構造の分類

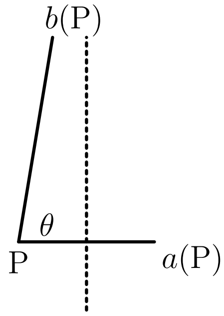
この小節では結晶群 G の構造を分類する．まず $G = G^+$ のときは，G は前小節の G_1, G_2, G_3, G_4, G_6 のいずれかである．以下，$G^+ \subsetneq G$ と仮定する．

$G^+ \subsetneq G, n = 1$ のときの G の分類
まず，準備となる命題を示す．

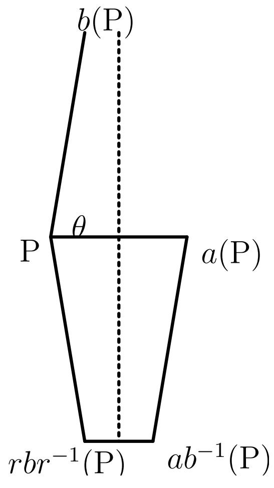
命題 7. $r \in G \setminus G^+$ とする．このとき，$T = \langle a, b \,|\, ab = ba \rangle$ を満たす $a, b \in T$ をうまくとり直せば，次の (1), (2) のどちらかが成り立つ．

(1) $rar^{-1} = a$, $rbr^{-1} = b^{-1}$.
(2) $rar^{-1} = b$, $rbr^{-1} = a$.

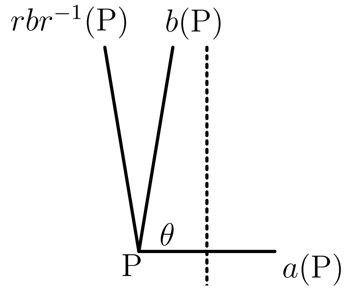
証明. r はある直線 ℓ に関するずらし鏡映 (鏡映を含む) である．ℓ 上の点 P を任意にとり，それを用いて a, b を命題 5 の証明中のようにとる．更に a, b を $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ のいずれかに変えることにより $\theta = \angle a(\mathrm{P})\mathrm{P}b(\mathrm{P})$ の絶対値 $|\theta|$ が $0^\circ < |\theta| \leq 90^\circ$ を満たすようにできる．すると $\mathrm{d}(\mathrm{P}, b(\mathrm{P})) \leq \mathrm{d}(\mathrm{P}, b^{-1}a(\mathrm{P})) = \mathrm{d}(b(\mathrm{P}), a(\mathrm{P}))$ であることから $60^\circ \leq |\theta| \leq 90^\circ$ である．



(i) $\overrightarrow{\mathrm{P}a(\mathrm{P})}$ と ℓ が平行なときは，$rar^{-1} = a$ となる．もし $|\theta| = 90^\circ$ ならば $rbr^{-1} = b^{-1}$ であり，従って (1) が成り立つ．もし $60^\circ \leq |\theta| < 90^\circ$ ならば rbr^{-1}, ab^{-1} は平行移動で $\mathrm{d}(rbr^{-1}(\mathrm{P}), ab^{-1}(\mathrm{P})) < \mathrm{d}(\mathrm{P}, a(\mathrm{P}))$ となるので，$rbr^{-1} = ab^{-1}$ となる．すると $r(ab^{-1})r^{-1} = aba^{-1} = b$ となり，従って (b, ab^{-1}) を改めて (a, b) とおけば (2) が成り立つ．



(ii) $\overrightarrow{\mathrm{P}a(\mathrm{P})}$ と ℓ が垂直なときは，$rar^{-1}=a^{-1}$ となる．そして，rbr^{-1}, b は平行移動で $\mathrm{d}(rbr^{-1}(\mathrm{P}), b(\mathrm{P})) \leq \mathrm{d}(\mathrm{P}, a(\mathrm{P}))$ となる．よって，図より $rbr^{-1}=b$ または $arbr^{-1}=b$ であり，前者のときは (b,a) を改めて (a,b) とおけば (1) が成り立つ．また後者のときは $(b, a^{-1}b)$ を改めて (a,b) とおけば (2) が成り立つ．



(iii) その他 (つまり $rar^{-1} \neq a^{\pm 1}$) のときは，rar^{-1} は a とは独立な方向の平行移動であり，また $\mathrm{d}(\mathrm{P}, rar^{-1}(\mathrm{P})) = \mathrm{d}(r^{-1}(\mathrm{P}), ar^{-1}(\mathrm{P})) = \mathrm{d}(\mathrm{P}, a(\mathrm{P}))$ なので，$b = rar^{-1}$ とおくと命題 5 の証明により $T = \langle a, b \,|\, ab = ba \rangle$ となっている．また $rbr^{-1} = r^2 ar^{-2} = a$ となるので，この (a,b) に対して (2) が成り立つ． □

さて，G が鏡映を持つ場合は，$r \in G \setminus G^+$ を鏡映として $a, b \in G$ を命題 7 の (1) または (2) を満たすようにとり直す．このとき $r^2 = 1$ なので，G は

$$G_1^1 = \langle a, b, r \,|\, ab = ba, r^2 = 1, rar^{-1} = a, rbr^{-1} = b^{-1} \rangle$$
$$G_1^2 = \langle a, b, r \,|\, ab = ba, r^2 = 1, rar^{-1} = b, rbr^{-1} = a \rangle$$

のいずれかとなる．G が鏡映をもたない場合は，$r \in G \setminus G^+$ を任意にとり $a, b \in G$ を命題 7 の (1) または (2) を満たすようにとり直す．r は鏡映でないずらし鏡映なので，$r^2 = a^k b^l (\neq 1)$ と書ける．命題 7 の (1) が成り立つならば，$r^2 = r(r^2)r^{-1}$ より $a^k b^l = r(a^k b^l) r^{-1} = a^k b^{-l}$ なので $l = 0$. よって $r^2 = a^k$. $ra^{-[k/2]}$ を改めて r とおくと r^2 は $1, a$ のいずれかとなるが，G は鏡映をもたないので $r^2 = a$ となる．このとき G は

$$G_1^3 = \langle a, b, r \,|\, ab = ba, r^2 = a, rar^{-1} = a, rbr^{-1} = b^{-1} \rangle$$

となる．また，命題 7 の (2) が成り立つならば，$r^2 = r(r^2)r^{-1}$ より $a^k b^l = r(a^k b^l) r^{-1} = a^l b^k$ となるのでなので $k = l$. $r(ab)^{-[k/2]}$ を改めて r とおくと r^2 は $1, ab$ のいずれかとなるが，G は鏡映をもたないので $r^2 = ab$ となる．しかしこ

のとき $(ra^{-1})^2 = ra^{-1}r^{-1}r^2a^{-1} = b^{-1}aba^{-1} = 1$ となるので G は鏡映をもち，矛盾する．よって G の可能性は以上の 3 通りである．

以下 $G^+ \subsetneq G, n \geq 2$ のときの G の分類を行うが，積の関係式は 6.2 節までの関係式の他に $rar^{-1}, rbr^{-1}, r^2, (sr)^2$ がわかれば充分である．

$\underline{G^+ \subsetneq G, n = 2 \text{ のときの } G \text{ の分類}}$
準備となる命題を示す．

命題 8. $r \in G \setminus G^+$ とする．このとき，$T = \langle a, b \,|\, ab = ba \rangle$ を満たす $a, b \in T$ をうまくとり直せば，次の (1), (2) のどちらかが成り立つ．
(1) $rar^{-1} = a,\ rbr^{-1} = b^{-1}.$
(2) $rar^{-1} = b,\ rbr^{-1} = a.$
また，a, b をとり直した後でも関係式 $sas^{-1} = a^{-1}, sbs^{-1} = b^{-1}$ はそのまま成り立つ．

証明. 証明は命題 7 と全く同じである．最後の主張は s が角度 $180°$ の回転であることから従う． □

さて，G が鏡映をもつ場合は，$r \in G \setminus G^+$ を鏡映として $a, b \in G$ を命題 8 の (1) または (2) を満たすようにとり直す．このとき $r^2 = 1$ である．命題 8 の (1) が成り立つ場合，$(sr)b(sr)^{-1} = sb^{-1}s = b$ であり，よって，ずらし鏡映 sr を定める直線は $\overrightarrow{\mathrm{P}b(\mathrm{P})}$ と平行である．従って $(sr)^2 = b^k$ と書ける．$b^{-[k/2]}s$ を改めて s と書くことにすると，$(sr)^2$ は $1, b$ のいずれかとなる．よって G は

$$G_2^1 = \left\langle a, b, s, r \;\middle|\; \begin{array}{l} ab = ba, s^2 = 1, sas^{-1} = a^{-1}, sbs^{-1} = b^{-1}, \\ r^2 = 1, rar^{-1} = a, rbr^{-1} = b^{-1}, (sr)^2 = 1 \end{array} \right\rangle$$
$$G_2^2 = \left\langle a, b, s, r \;\middle|\; \begin{array}{l} ab = ba, s^2 = 1, sas^{-1} = a^{-1}, sbs^{-1} = b^{-1}, \\ r^2 = 1, rar^{-1} = a, rbr^{-1} = b^{-1}, (sr)^2 = b \end{array} \right\rangle$$

のいずれかとなる．命題 8 の (2) が成り立つ場合，$(sr)(a^{-1}b)(sr)^{-1} = s(ab^{-1})s = a^{-1}b$ であり，ずらし鏡映 sr を定める直線は $\overrightarrow{\mathrm{P}a^{-1}b(\mathrm{P})}$ と平行である．従って $(sr)^2 = (a^{-1}b)^k$ と書け，s を適当に変えれば $(sr)^2$ は $1, a^{-1}b$ のいずれかとなる．

$(sr)^2 = a^{-1}b$ のときは

$$(sbr)^2 = sbrsbr = b^{-1}srsra = b^{-1}a^{-1}ba^{-1} = 1$$

より，sb を改めて s とおけば $(sr)^2 = 1$ の場合になる．よって G は

$$G_2^3 = \left\langle a, b, s, r \;\middle|\; \begin{array}{l} ab = ba, s^2 = 1, sas^{-1} = a^{-1}, sbs^{-1} = b^{-1}, \\ r^2 = 1, rar^{-1} = b, rbr^{-1} = a, (sr)^2 = 1 \end{array} \right\rangle$$

となる．

G が鏡映をもたない場合は，$r \in G \setminus G^+$ を任意にとって $a, b \in G$ を命題 8 の (1) または (2) を満たすようにとり直す．命題 8 の (1) が成り立つならば，$n = 1$ のときと同じ議論により $r^2 = a$ であるとしてよい．sr に対して同様の議論をすると更に $(sr)^2 = b$ であるとしてよいこともわかる．従って G は

$$G_2^4 = \left\langle a, b, s, r \;\middle|\; \begin{array}{l} ab = ba, s^2 = 1, sas^{-1} = a^{-1}, sbs^{-1} = b^{-1}, \\ r^2 = a, rar^{-1} = a, rbr^{-1} = b^{-1}, (sr)^2 = b \end{array} \right\rangle$$

となる．また，命題 8 の (2) が成り立つならば，上の同様の議論により $r^2 = ab, (sr)^2 = a^{-1}b$ としてよいことがわかる．すると

$$(sra)^2 = (sr)a(sr)^{-1}(sr)^2a = b^{-1}a^{-1}ba = 1$$

となり，G は鏡映をもつこととなり矛盾する．よって G の可能性は以上の 4 通りである．

$\underline{G^+ \subsetneq G, n = 4 \text{ のときの } G \text{ の分類}}$

準備となる命題を示す．

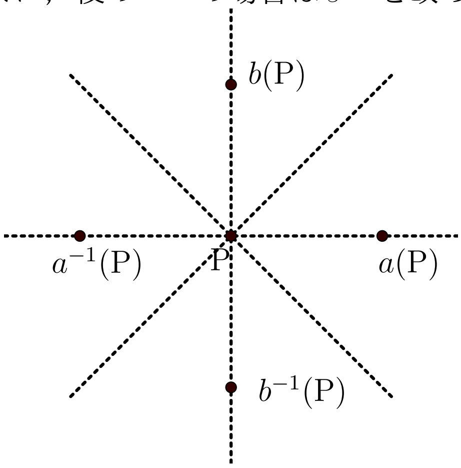
命題 9. $r \in G \setminus G^+$ とする．このとき，$T = \langle a, b \,|\, ab = ba \rangle$ を満たす $a, b \in T$ をうまくとり直せば，次の (1), (2) のどちらかが成り立つ．

(1) $rar^{-1} = a$, $rbr^{-1} = b^{-1}$.

(2) $rar^{-1} = b$, $rbr^{-1} = a$.

また，a, b をとり直した後でも，s を $s^{\pm 1}$ のいずれかにとり直せば関係式 $sas^{-1} = b, sbs^{-1} = a^{-1}$ がそのまま成り立つ．

証明． $a, b, s \in G_4$ を 6.2 節のようにとる．このとき，平行移動 rar^{-1} を定めるベクトルの長さは平行移動 a を定めるベクトルの長さと等しいので，rar^{-1} は a, b, a^{-1}, b^{-1} のいずれかと等しい．それぞれの場合に r を定める直線 ℓ の傾きを考え，rbr^{-1} を求めると $rbr^{-1} = b^{-1}, a, b, a^{-1}$ となる．よって，それぞれの場合に $(a,b), (a,b), (b,a), (a,b^{-1})$ を改めて (a,b) とおけば，命題の (1), (2), (1), (2) がそれぞれ成り立つ．関係式 $sas^{-1} = b, sbs^{-1} = a^{-1}$ は最初の二つの場合は s はそのままに，後の二つの場合は s^{-1} を改めて s とおけば成り立つ．



□

さて，$r \in G \backslash G^+$ を任意にとって，$a, b, s \in G$ を命題 9 の (1) または (2) を満たすようにとり直す．命題 9 の (2) が成り立つとき，$(rs)a(rs)^{-1} = a, (rs)b(rs)^{-1} = b^{-1}$ となるので，rs を改めて r とおけば命題 9 の (1) が成り立つことになる．従って，命題 9 の (1) が成り立つと仮定してよい．すると，$n = 1$ のときと同じ議論により，r, s を適当に変えれば r^2 は 1 または a のいずれかとなり，また $(sr)^2$ は 1 または ab のいずれかとなる．従って，$(sr)^2 = 1$ のときは G は

$$G_4^1 = \left\langle a, b, s, r \;\middle|\; \begin{array}{l} ab = ba, s^4 = 1, sas^{-1} = b, sbs^{-1} = a^{-1}, \\ r^2 = 1, rar^{-1} = a, rbr^{-1} = b^{-1}, (sr)^2 = 1 \end{array} \right\rangle$$
$$G_4^2 = \left\langle a, b, s, r \;\middle|\; \begin{array}{l} ab = ba, s^4 = 1, sas^{-1} = b, sbs^{-1} = a^{-1}, \\ r^2 = a, rar^{-1} = a, rbr^{-1} = b^{-1}, (sr)^2 = 1 \end{array} \right\rangle$$

のいずれかとなる．$(sr)^2 = ab$ のときは，

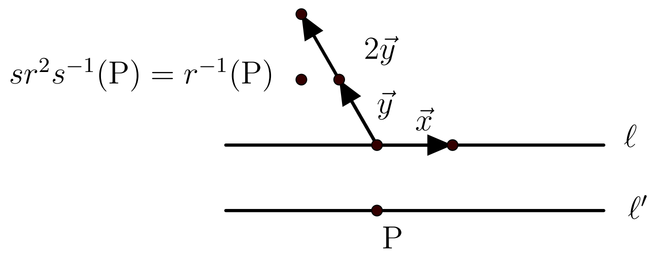
$$(sa^{-1}r)^2 = sa^{-1}rsa^{-1}r = b^{-1}srsra^{-1} = 1$$

となるので，sa^{-1} を改めて s とおくことにより，$(sr)^2 = 1$ となるので，上の場合に帰着できる．よって G の可能性は以上の 2 通りである．

次に，$G^+ \subsetneq G, n = 3, 6$ のときの G の分類のために次の補題を示す．

補題 10. G が角度 120° の回転 s を含み，ずらし鏡映 r を含むとすれば，ある $t \in T$ に対して rt は鏡映となる．

証明. r が直線 ℓ に関する鏡映と長さ d のベクトル $\vec{x}$ に関する平行移動の合成であるとする．$\vec{x}$ を 120° 回転させてできるベクトルを $\vec{y}$ とおく．r^2 は $2\vec{x}$ に関する平行移動なので，sr^2s^{-1} は $2\vec{y}$ に関する平行移動である．ℓ に平行で ℓ から見ると $\vec{y}$ とは反対方向にあり ℓ との距離が $\sqrt{3}d/2$ である直線を ℓ' とすると，ℓ' 上の任意の点 P に対して，$sr^2s^{-1}(\mathrm{P}) = r^{-1}(\mathrm{P})$ となることが幾何学的に確かめられる．よって $r(sr^2s^{-1})(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$ であり，このことから $r(sr^2s^{-1})$ が直線 ℓ' に関する鏡映であることがわかる．



□

<u>$G^+ \subsetneq G, n = 3$ のときの G の分類</u>

$a, b, s \in G_3$ を 6.2 節のようにとる．補題 10 より G は鏡映を含むので，r を鏡映とする．(よって $r^2 = 1$.) 更に

$$(s(sr)^2r)^2 = (s^2rsr^2)^2 = (s^2rs)^2 = (s^{-1}rs)^2 = s^{-1}r^2s = 1$$

なので，$s(sr)^2$ を改めて s とおくことにより $(sr)^2 = 1$ となることが言える．(なお，$(sr)^2 = 1$ より $s^2r = rs$ なので $(s^2r)^2 = s^2rs^2r = s^2s^4rr = 1$ となる．)

平行移動 rar^{-1} を定めるベクトルの長さは平行移動 a を定めるベクトルの長さと等しいので，rar^{-1} は $a, b, a^{-1}b, a^{-1}, b^{-1}, ab^{-1}$ のいずれかと等しい．そ

れぞれの場合に r を定める直線 ℓ の傾きを考え，rbr^{-1} を求めると $rbr^{-1} = ab^{-1}, a, b, ab^{-1}, a^{-1}, b^{-1}$ となる．最初の場合には G は

$$G_3^1 = \left\langle a, b, s, r \;\middle|\; \begin{array}{l} ab = ba, s^3 = 1, sas^{-1} = a^{-1}b, sbs^{-1} = a^{-1}, \\ r^2 = 1, rar^{-1} = a, rbr^{-1} = ab^{-1}, (sr)^2 = 1 \end{array} \right\rangle$$

となる．二つめの場合には G は

$$G_3^2 = \left\langle a, b, s, r \;\middle|\; \begin{array}{l} ab = ba, s^3 = 1, sas^{-1} = a^{-1}b, sbs^{-1} = a^{-1}, \\ r^2 = 1, rar^{-1} = b, rbr^{-1} = a, (sr)^2 = 1 \end{array} \right\rangle$$

となる．三つめの場合は

$$(s^2r)a(s^2r)^{-1} = a, \quad (s^2r)b(s^2r)^{-1} = ab^{-1},$$

四つめの場合は

$$(s^2r)a(s^2r)^{-1} = b, \quad (s^2r)b(s^2r)^{-1} = a,$$

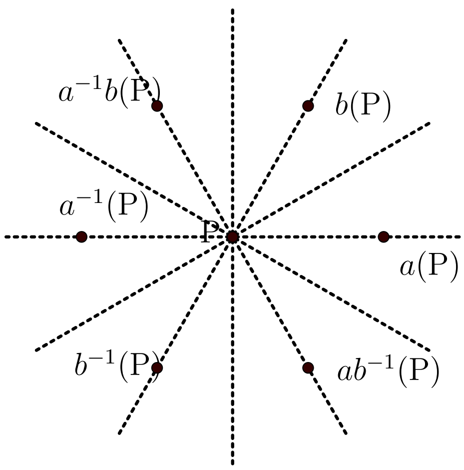
五つめの場合は

$$(sr)a(sr)^{-1} = a, \quad (sr)b(sr)^{-1} = ab^{-1},$$

六つめの場合は

$$(sr)a(sr)^{-1} = b, \quad (sr)b(sr)^{-1} = a$$

となるので，s^2r または sr を改めて r とおくことにより最初の二つの場合に帰着される．よって G の可能性は以上の 2 通りである．



$G^+ \subsetneq G, n=6$ のときの G の分類

$a,b,s \in G_6$ を 6.2 節のようにとる．補題より G は鏡映を含むので，r を鏡映とする．(よって $r^2=1$.) また，sr はずらし鏡映なので，補題よりある $t \in T$ に対し srt は鏡映となる．そこで $srtr^{-1}$ を改めて s とおくと，sr は鏡映となる，つまり $(sr)^2=1$ となる．(なお，$(sr)^2=1$ より $s^5r=rs$ なので $(s^2r)^2 = s^2rs^2r = s^2s^{10}rr = 1$ となる．)

平行移動 rar^{-1} を定めるベクトルの長さは平行移動 a を定めるベクトルの長さと等しいので，rar^{-1} は $a, b, a^{-1}b, a^{-1}, b^{-1}, ab^{-1}$ のいずれかと等しい．それぞれの場合に r を定める直線 ℓ の傾きを考え，rbr^{-1} を求めると $rbr^{-1} = ab^{-1}, a, b, ab^{-1}, a^{-1}, b^{-1}$ となる．(ここの議論は $n=3$ のときと同様である.) 二つめの場合は，G は

$$G_6^1 = \left\langle a,b,s,r \;\middle|\; \begin{array}{l} ab=ba, s^6=1, sas^{-1}=b, sbs^{-1}=a^{-1}b, \\ r^2=1, rar^{-1}=b, rbr^{-1}=a, (sr)^2=1 \end{array} \right\rangle$$

となる．最初の場合は

$$(sr)a(sr)^{-1}=b, \quad (sr)b(sr)^{-1}=a,$$

三つめの場合は

$$(s^{-1}r)a(s^{-1}r)^{-1}=b, \quad (s^{-1}r)b(s^{-1}r)^{-1}=a,$$

四つめの場合は

$$(s^{-2}r)a(s^{-2}r)^{-1}=b, \quad (s^{-2}r)b(s^{-2}r)^{-1}=a,$$

五つめの場合は

$$(s^3r)a(s^3r)^{-1}=b, \quad (s^3r)b(s^3r)^{-1}=a,$$

六つめの場合は

$$(s^2r)a(s^2r)^{-1}=b, \quad (s^2r)b(s^2r)^{-1}=a$$

となるので，$s^ir\,(i=1,-1,-2,3,2)$ を改めて r とおくことにより二つめの場合に帰着される．よって G の可能性は以上の 1 通りである．

以上より，結晶群 G は 17 通りに分類された．

6.4　結晶群の特徴づけ

この小節では，6.3 節までに求めた各結晶群を特徴づける性質を述べる．(国際結晶学連合の記法も書く．) 以下において，6.3 節の $T = \langle a, b \,|\, ab = ba \rangle$ となる平行移動 a, b を定めるベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ と書く．($n = 3$ のときには $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を 60° となるようにとってあることに注意.)

G_1 (p1) は回転，ずらし鏡映を持たない結晶群である．

G_2 (p2) は回転の最小角が 180° で，ずらし鏡映を持たない結晶群である．

G_3 (p3) は回転の最小角が 120° で，ずらし鏡映を持たない結晶群である．

G_4 (p4) は回転の最小角が 90° で，ずらし鏡映を持たない結晶群である．

G_6 (p6) は回転の最小角が 60° で，ずらし鏡映を持たない結晶群である．

G_1^1 (pm) は回転をもたず，$\vec{a} \mapsto \vec{a}, \vec{b} \mapsto -\vec{b}$ と移す鏡映をもつ結晶群である．

G_1^2 (cm) は回転をもたず，$\vec{a} \mapsto \vec{b}, \vec{b} \mapsto \vec{a}$ と移す鏡映をもつ結晶群である．

G_1^3 (pg) は回転，鏡映をもたず，ずらし鏡映をもつ結晶群である．

G_2^1 (pmm) は回転の最小角が 180° で，$\vec{a} \mapsto \vec{a}, \vec{b} \mapsto -\vec{b}$ と移す鏡映をもち，かつそれに直交する鏡映をもつ結晶群である.

G_2^2 (pmg) は回転の最小角が 180° で，$\vec{a} \mapsto \vec{a}, \vec{b} \mapsto -\vec{b}$ と移す鏡映をもち，かつそれに直交する鏡映のない結晶群である．

G_2^3 (cmm) は回転の最小角が 180° で，$\vec{a} \mapsto \vec{b}, \vec{b} \mapsto \vec{a}$ と移す鏡映をもつ結晶群である．

G_2^4 (pgg) は回転の最小角が 180° で，鏡映をもたず，ずらし鏡映をもつ結晶群である．

G_3^1 (p31m) は回転の最小角が 120° で，$\vec{a} \mapsto \vec{a}, \vec{b} \mapsto \vec{a} - \vec{b}$ と移す鏡映をもつ結晶群である．

G_3^2 (p3m1) は回転の最小角が 120° で，$\vec{a} \mapsto \vec{b}, \vec{b} \mapsto \vec{a}$ と移す鏡映をもつ結晶群である．

G_4^1 (p4m) は回転の最小角が 90° で，鏡映を持ち，かつそれと 45° の角をなす鏡映を持つ結晶群である．

G_4^2 (p4g) は回転の最小角が 90° で，鏡映を持つが，それと 45° の角をなす鏡映を持たない結晶群である．

G_6^1 (p6m) は回転の最小角が 60° で，鏡映をもつ結晶群である．

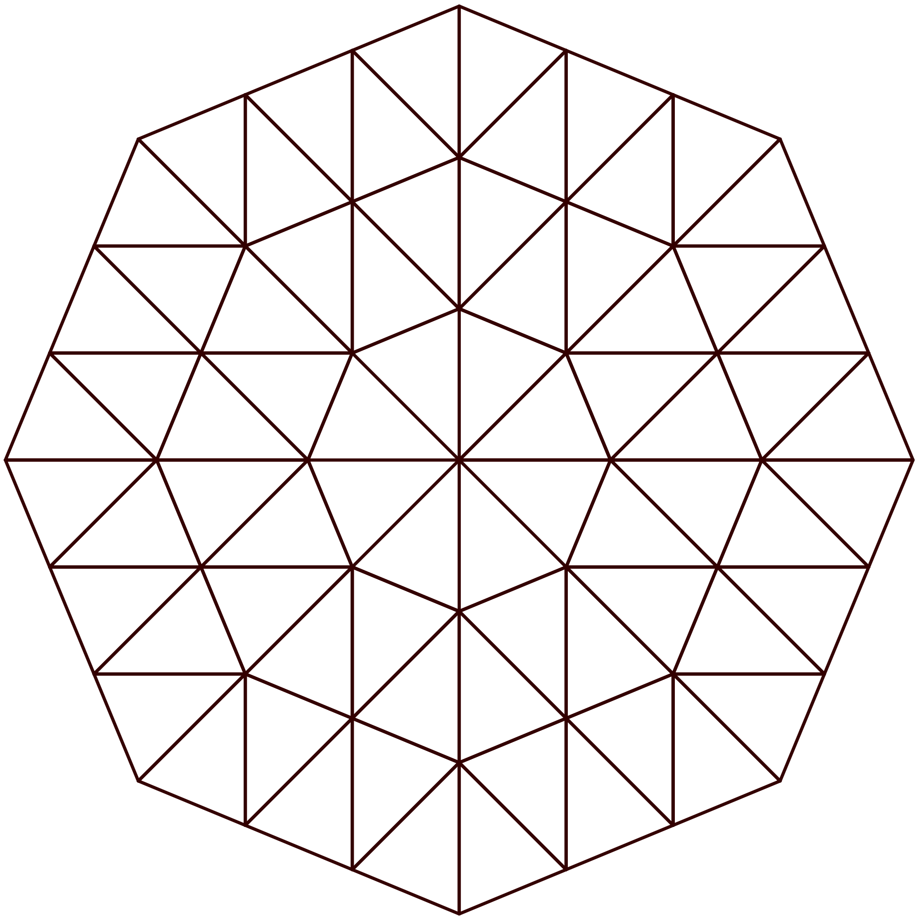
問題 16. 1 節にあるタイル張りの合同変換群がどの結晶群となるかを決定せよ．

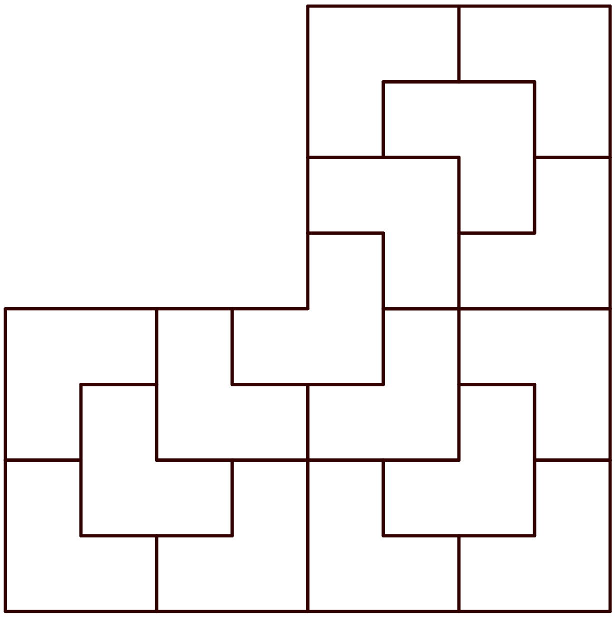
問題 17. 上の 17 種の結晶群を合同変換とするタイル張りの構成を試みよ．

7　ペンローズ・タイリング

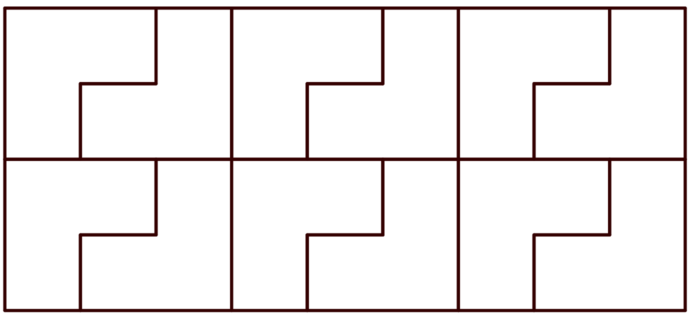
合同変換群が結晶群であるようなタイル張りは，ある 2 つの独立な方向のベクトルに関する平行移動で保たれる．このように，ある平行移動により保たれるようなタイル張りを周期的なタイル張りと呼ぶ．

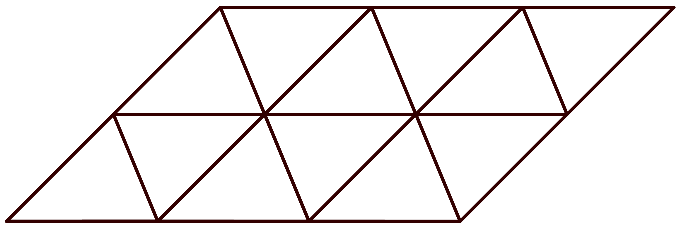
1 種類のタイル A からなる周期性を持たないタイル張り F には例えば次のようなものがある．





しかしながら，これらの場合は，同じタイル A からなる周期性を持つ別のタイル張りを容易に構成できる．

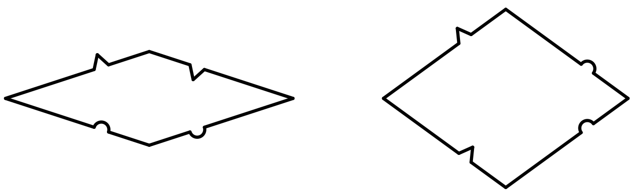




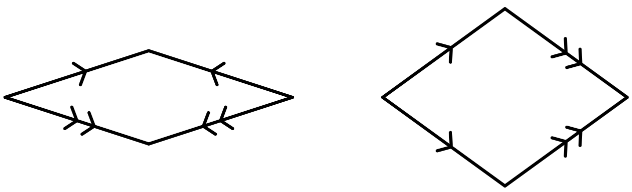
問題． 何種類かのタイル $A_1, ..., A_n$ で，これらによるタイル張りが可能であるが，どのようなタイル張りも周期性を持たないようなものが存在するか？

Robert Berger により問題の条件を満たす最初の例が $n = 20426$ で構成された． Berger 自身により $n = 104$，Donald Knuth により $n = 92$ の例が構成され，Raphael M. Robinson, Robert Ammann, Roger Penrose(ロジャー・ペンローズ) により $n = 6$ の例が構成された．そして Roger Penrose により $n = 2$ の例が構成された．つまり，2 種類のタイルで，これらによるタイル張りが可能であるが，どのようなタイル張りも周期性を持たないようなものが存在する！

ペンローズによるタイルは，正確には以下の通りである．(別の例もあるが，今日はこのタイルのみを考える.)

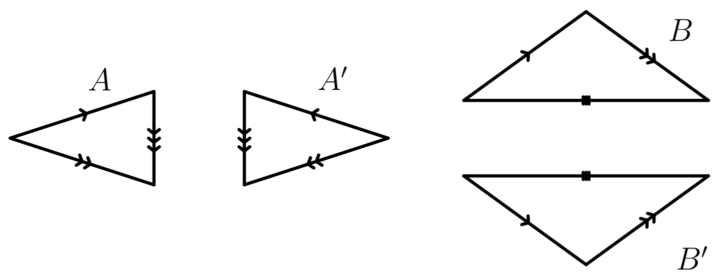


これらは薄い菱形 (thin rhombus)，厚い菱形 (thick rhombus) と呼ばれる．薄い菱形の内角は $36°$ および $144°$, 厚い菱形の内角は $72°$ および $108°$ である．通常は，各辺に凹凸をつける代わりに，各辺に矢印をつけ，タイルを貼りあわせる時に矢印が向きをこめて一致するように張りあわせることにする．(但し，このように考える場合はタイルの裏返しは許さないものとする.)

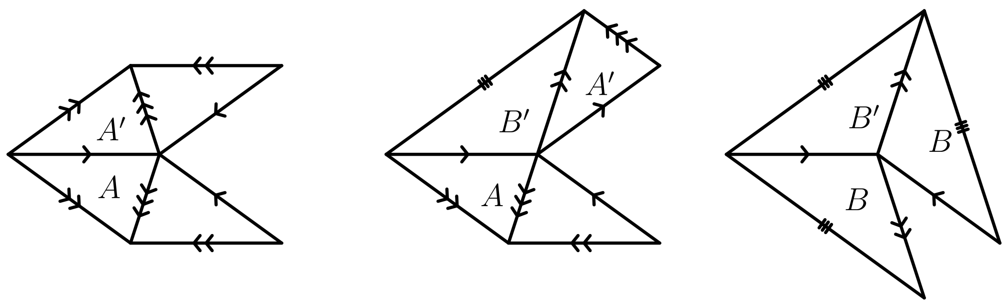


あるいはタイルに適当な模様をつけ，その模様がつながるようにタイルを張り合わせることにする．この 2 種類のタイルによるタイル張りをペンローズ・タイリングと呼ぶ．

ペンローズ・タイリングの性質を調べるため，薄い菱形を縦に半分に，厚い菱形を横に半分に切り，切り口の辺に新たに矢印をつける．すると４種類のタイルができる．これを A, A', B, B' と名付ける．ペンローズ・タイリングはこの４種類のタイルによるタイル張りと同値である．



なお，A', B' はそれぞれ A, B の鏡像となっている．この４種類のタイルを１つ矢印，２つ矢印のついた辺で張りあわせることを考える．１つ矢印のついた辺での張りあわせを $\leftrightarrow$，２つ矢印のついた辺での張りあわせを $\Leftrightarrow$ と書くことにする．このとき，まず同じタイルが張りあわないこと，また $A \leftrightarrow B$, $A' \leftrightarrow B'$, $A \Leftrightarrow B'$, $A' \Leftrightarrow B$ とは張りあわないことがわかる．次に，$A \leftrightarrow A'$, $A \leftrightarrow B' \Leftrightarrow A'$, $A' \leftrightarrow B \Leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow B' \Leftrightarrow B$, $B' \leftrightarrow B \Leftrightarrow B'$ という張りあわせ方は許されない (平面上のペンローズ・タイリングに伸びない) ことがわかる．

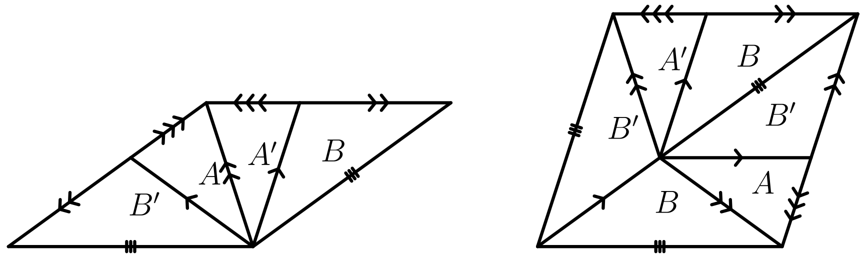


従って，許される張りあわせ方は $A \leftrightarrow B' \Leftrightarrow B, A' \leftrightarrow B \Leftrightarrow B', B \leftrightarrow A' \Leftrightarrow A, B \leftrightarrow A' \Leftrightarrow B', B \leftrightarrow B' \Leftrightarrow A', B' \leftrightarrow A \Leftrightarrow A', B' \leftrightarrow A \Leftrightarrow B, B' \leftrightarrow B \Leftrightarrow A$ と

なる．$B \Leftrightarrow B'$ の所で切ることにすると，張りあわせは

$$B \leftrightarrow A' \Leftrightarrow A \leftrightarrow B', \quad B \leftrightarrow A' \Leftrightarrow B' \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow B'$$

のいずれかに含まれることになる．この 2 つを図示とすると次の通りである．



これは辺がもとの τ 倍 (但し $\tau = (1+\sqrt{5})/2$ は黄金比) である薄い菱形，厚い菱形となる．半分に切ることにより τ 倍された A, A', B, B' が現れる．

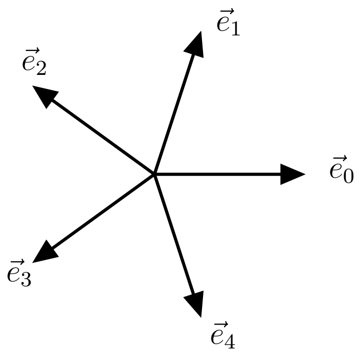
以上により，ペンローズ・タイリングがある場合，菱形を半分に切り，それを適当にまとめて考えると，辺が τ 倍の菱形によるペンローズ・タイリングができることがわかる．この操作をインフレーションと呼ぶ．インフレーションを用いると次の命題が言える．

命題 11. 任意のペンローズ・タイリングは周期性を持たない．

証明. あるペンローズ・タイリング F がベクトル $\vec{a}$ の平行移動で不変だとすると，F からインフレーションの繰り返しで得られるタイリングもそうである．しかし，インフレーションを繰り返すと，タイルの大きさが $\vec{a}$ の長さより大きくなり，よってベクトル $\vec{a}$ の平行移動で不変になりえなくなるので矛盾． □

インフレーションは，ペンローズ・タイリングの作り方も教えてくれる：ある (半分にした) タイルから始めて，それを含む τ 倍されたタイルを描く．次にそれを含む更に τ 倍されたタイルを描く．これを繰り返すことにより，τ^n 倍されたタイルの領域がタイル張りされていることになる．$n \to \infty$ とすれば，大抵の場合にペンローズ・タイリングが得られる．各段階で A, B, A', B' のどのタイルを描くかにより，異なるペンローズ・タイリングが得られる．

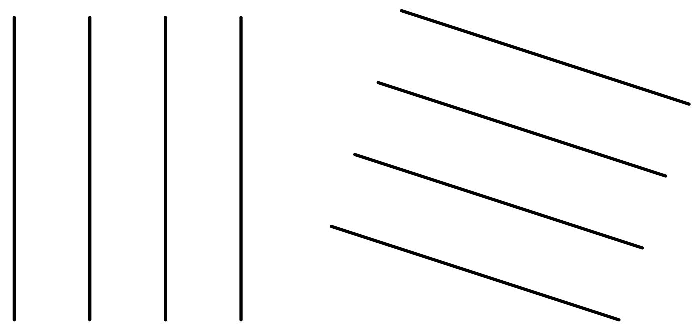
次に，ペンローズ・タイリングのもう一つの構成法であるペンタグリッド法について述べる．まず長さ 1 のベクトル $\vec{e}_0, ..., \vec{e}_4$ を次のように定める．(つまり $\vec{e}_j = (\cos(72j)^\circ, \sin(72j)^\circ)$ と定める.)



$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ を $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 0$ を満たす実数の 5 つ組とする．$j = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して，j 番目のグリッド L_j を $\mathbb{E}$ 内の平行な直線の和集合

$$L_j = \{(x, y) \,|\, (\cos(72j)^\circ)x + (\sin(72j)^\circ)y + \gamma_j \text{ は整数 } \}$$

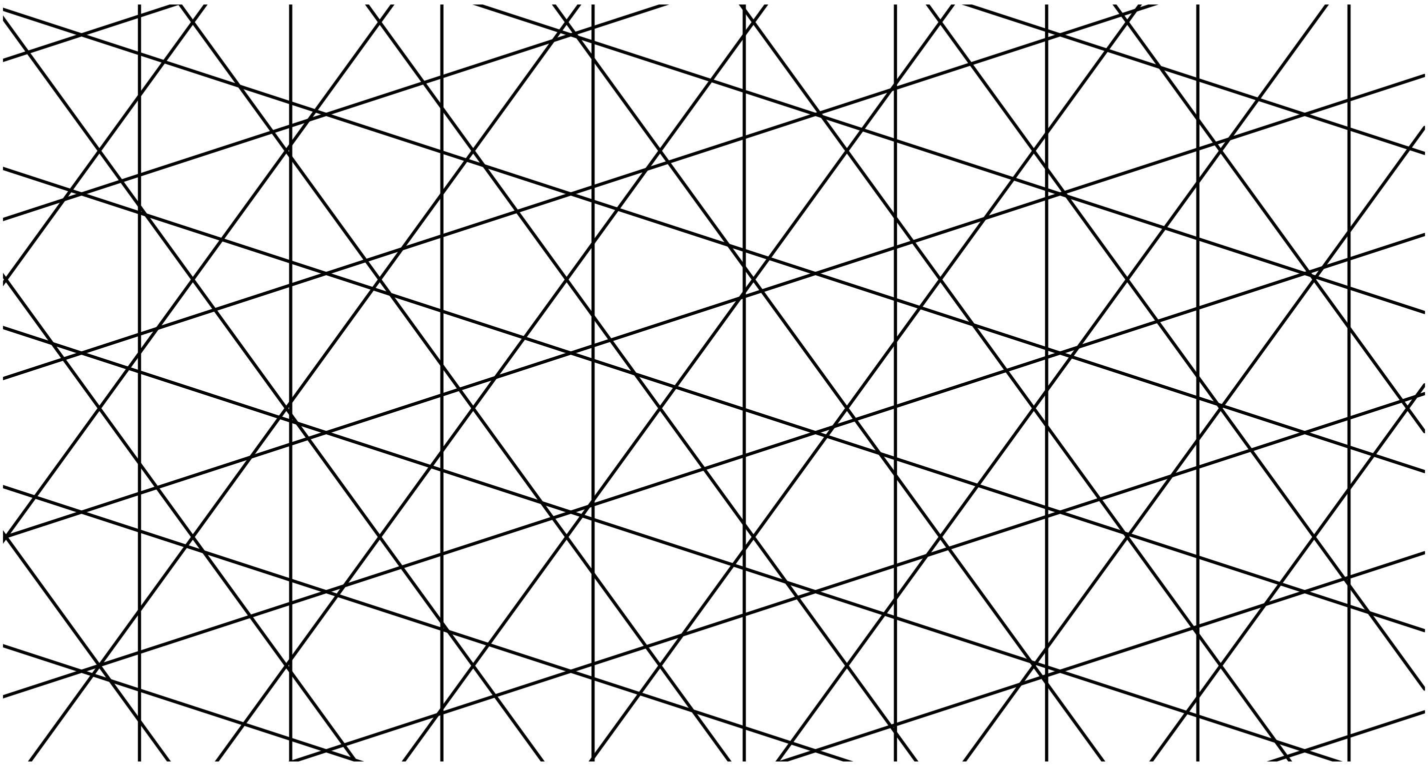
とする．つまり，L_j はベクトル $\vec{e}_j$ と直交する，互いの距離が整数であるような平行な直線たちの和集合で，点 $(-\gamma_j / \cos(72j)^\circ, 0)$ を含むようなものである．



L_0　　　　L_1

そして，ペンタグリッド L を $L_0, ..., L_4$ の和集合とする．ペンタグリッド L のどの 3 直線も 1 点で交わらないとき，L は正則であるという．以下では L は

正則であると仮定する．ペンタグリッド L は複素平面を無数の領域に分ける．この各々の領域の内部のことをメッシュと呼ぶことにする．



平面内の点 $\mathrm{P}(x,y)$ に対してベクトル $\vec{\mathrm{P}}$ を

$$\vec{\mathrm{P}} = \sum_{j=0}^{4}[(\cos(72j)^\circ)x + (\sin(72j)^\circ)y + \gamma_j]\vec{e}_j$$

(但し $[\quad]$ はガウス記号) と定め，また $\vec{\mathrm{P}}$ を位置ベクトルとする平面上の点を $f(\mathrm{P})$ とおく．このとき，P があるメッシュ内を動くときには $\vec{\mathrm{P}}$ は一定であり，また，P が L_j に属する直線を越えて隣のメッシュに移るときは $\vec{\mathrm{P}}$ は $\vec{e}_j$ だけ変化する．そこで，P が平面上の点全体を動くときの点 $f(\mathrm{P})$ 全体を頂点の全体とし，P が L に属する直線を越えて隣のメッシュに移るときの隣り合ったメッシュに対する点 $f(\mathrm{P})$ たちを辺で結ぶことにより平面全体が薄い菱形と厚い菱

形で重なりなく覆われる：より正確には，L に属する 2 直線が 36° の角度で交わるときにその交点の周りの 4 つのメッシュに対する頂点から薄い菱形ができ，72° の角度で交わるときにはその交点の周りの 4 つのメッシュに対する頂点から厚い菱形ができる．そして，実は辺の張り合わせかたがうまくいってこれがペンローズ・タイリングをなすことが知られている．(正確な証明は複雑なのでここでは述べられない.)

命題 12. (正則なペンタグリッドから構成される) ペンローズ・タイリングに対して，(厚い菱形の個数)/(薄い菱形の個数) の極限は黄金比 τ である．

証明. グリッド L に属する直線 ℓ を一つ固定し，その ℓ の他の直線との交点から生じる菱形について割合を計算する．ℓ と他の直線の交わる角度が 36° の場合に薄い菱形，72° の場合に薄い菱形が生じるが，前者の交わりは ℓ 上で $1/\sin 36^\circ$ の間隔で生じ，後者の交わりは ℓ 上で $1/\sin 72^\circ$ の間隔で生じるので，求める割合は $(\sin 72^\circ)/(\sin 36^\circ) = \tau$ となる． □

命題 12 からも，(正則なペンタグリッドから構成される) ペンローズ・タイリングが非周期的であることがわかる：もし周期的であれば，(厚い菱形の個数)/(薄い菱形の個数) の極限は有理数なので，命題に矛盾する．

ペンタグリッド法の最初に実数の 5 つ組 $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ で $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 0$ を満たすものを固定したが，これを変えるとペンタグリッド L が変化し，それに応じてペンローズ・タイリングも変わる．詳細は述べないが，互いに平行移動で移りあわないペンローズ・タイリングが無数に存在することが知られている．

また，ペンタグリッド法の構成から考察することにより，実はペンローズ・タイリングが「5 次元空間内の 5 次元立方体によるタイル張り」を適当な方法で平面に射影することにより得られるということがわかる．

問題 18. できるだけ大きな平面内の領域を埋めつくすペンローズ・タイリングをつくり，(厚い菱形の個数)/(薄い菱形の個数) を求めてみよ．

問題 19. ペンローズ・タイリングの中には恒等変換でない合同変換をもつようなものがある．そのようなものの構成を試みよ．

参考文献

[1] 河野俊丈，結晶群，共立出版 (数学探検 7).

[2] D. L. Johnson, Symmetries, Springer (Springer Undergraduate Mathematics Series).

[3] D. Austin, Penrose Tiles Talk Across Miles, Feature Column, Providence: American Mathematical Society (2005), available at http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-penrose

[4] D. Austin, Penrose Tilings Tied up in Ribbons, Feature Column, Providence: American Mathematical Society (2005), available at http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-ribbons

[5] N. B. de Brujin, Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane, I, II, Indagationes mathematicae (Proceedings), 84(1) (1981), 39–66.

[6] N. B. de Brujin, Updown generation of Penrose patterns, Indagationes mathematicae, 1(2) (1990), 201–219.

[7] R. Penrose, Pentaplexity, Mathematical Intelligencer, vol. 2(1) (1979).