

テーマ学習 I:

球面 3 角形・オイラーの定理・正多面体

1.1 ハリオットの定理

3次元ユークリッド空間内の原点を中心とする半径 1 の球面

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

を考える．原点 O を通る平面と球面 $\mathbb{S}^2$ の交わりを**大円**と呼ぶ．例えば， $\mathbb{S}^2$ を地球にみたてたとき，経線や赤道は大円であるが，赤道以外の緯線は大円ではない．球面の**大円**は，平面幾何における直線の代用品と考えられる．とくに n 本の大円で囲まれた図形を（**球面**） **n 角形**と呼ぶ．

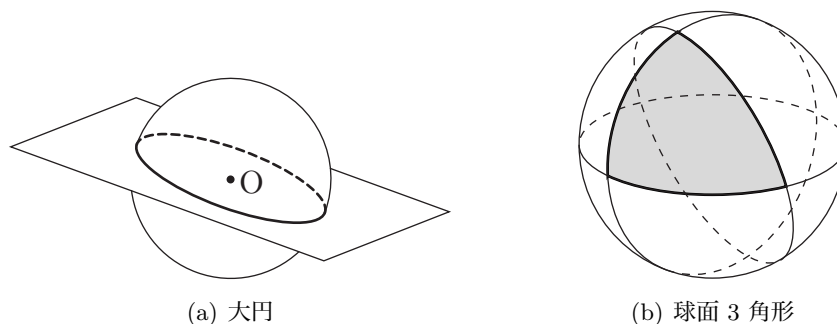


図 1.1: 大円と球面 3 角形

定理（ハリオットの定理） |||

球面 n 角形に対し，その面積を A ，内角を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とすると，

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = (n-2)\pi + A$$

が成り立つ．

|||||

平面内の n 角形に対しては，その内角の和は常に $(n-2)\pi$ に等しかった．平面幾何における

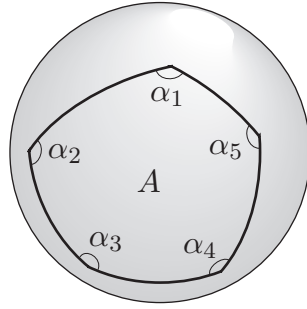


図 1.2: ハリオットの定理

この事実とハリオットの定理を比較するしたとき，後者においては面積 A が現れることに注意しよう．とくに，球面 3 角形に対してはその内角の和は常に π より大きい．

ハリオットの定理の証明. $n \geq 4$ の場合には，与えられた n 角形を 3 角形に分割し $n = 3$ の場合の定理を適用すればよい．以下で $n \leq 3$ の場合を議論する．

まずは $n = 2$ の場合である．¹ この場合，ふたつの内角の大きさは一致する．そこで，それを α としよう．すると，面積 A は球面全体の面積 4π に $\alpha/2\pi$ を乗じたものである．すなわち，

$$A = 4\pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha$$

が成り立つ．これでハリオットの定理が $n = 2$ のときに成立することが確かめられた．

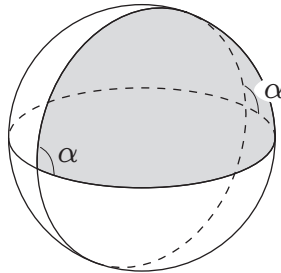


図 1.3: 球面 2 角形

最後に $n = 3$ の場合を考える．点 P, Q, R を頂点とする球面 3 角形が与えられたとしよう．これら頂点における内角をそれぞれ α, β, γ とする．また，球面 S^2 上の点であって，点 P, Q, R と原点に関し対称な位置にある点をそれぞれ P', Q', R' とする．さらに 2 点 P, P' を頂点とし $\triangle PQR$ を含む球面 2 角形を T_P とする． T_P のふたつの内角の大きさはともに α である．同様な

¹球面幾何においては 2 角形が考え得る．これも平面幾何と球面幾何の相違のひとつである．

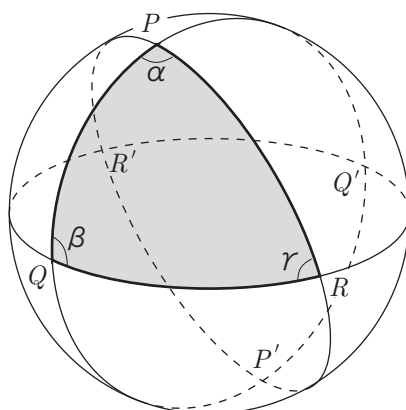


図 1.4: ハリオットの定理の証明 ($n = 3$ のとき)

仕方でさらにふたつの 2 角形 T_Q, T_R をとる. $\triangle PQR = T_P \cap T_Q \cap T_R$ であることに注意しよう. したがって, $T = T_P \cup T_Q \cup T_R$ ² としたとき,

$$\begin{aligned}(T \text{ の面積}) &= (T_P \text{ の面積}) + (T_Q \text{ の面積}) + (T_R \text{ の面積}) - 2 \times (\triangle PQR \text{ の面積}) \\ &= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2A\end{aligned}$$

が成り立つ。一方、 T の補集合 $\mathbb{S}^2 \setminus T^3$ は T 自身と原点に関して対称であるから、それらの面積は一致する： $(T \setminus \mathbb{S}^2 \text{ の面積}) = (T \text{ の面積})$. したがって、

$$(T \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\mathbb{S}^2 \text{ の面積}) = 2\pi$$

が従う. 以上から, $\alpha + \beta + \gamma = \pi + A$ が結論される.

1.2 オイラーの定理

いま証明を終えたハリオットの定理から，次の定理を得る．

定理（オイラーの定理） 球面 S^2 が多角形に分割されているとする．そこに現れる頂点 (vertex), 辺 (edge), 面 (face) の個数をそれぞれ v, e, f としたとき, 常に次の等式が成り立つ:

$$v - e + f = 2.$$

²³3つの集合 T_P, T_Q, T_R のいずれかに属する点を集めて得られる集合を T_P, T_Q, T_R の和集合と呼び、記号 $T_P \cup T_Q \cup T_R$ で表す。

³球面 S^2 から T を取り除いた図形を, T の補集合と呼び, 記号 $S^2 \setminus T$ で表す.

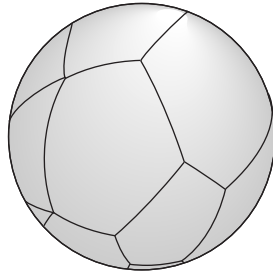


図 1.5: 球面の多角形分割

証明. 分割に現れる面を $F_1, \dots, F_f$ とする. 各面 F_j ($j = 1, \dots, f$) は n_j 角形で, その内角は $\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn_j}$, 面積は A_j であるとする. ハリオットの定理より,

$$\sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{jk} = (n_j - 2)\pi + A_j \quad (*)$$

を得る. この等式の両辺の $j = 1, \dots, f$ に関する和を計算したい. まず左辺の和を考えよう. その値は, 分割に現れる各頂点においてそこに集まる角の和をとり— その値は常に 2π である — さらに頂点全体に渡って総和をとったものに等しい. すなわち,

$$\sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{jk} = 2\pi \cdot v$$

が成り立つ. 次に n_j の $j = 1, \dots, f$ に関する和を求めよう. もちろん各面 F_j は n_j 本の辺を持つ. これをすべての面に関し足し合わせれば, 各辺が 2 度ずつ数えられたことになり, その結果 $2e$ を得る:

$$\sum_{j=1}^f n_j = 2e.$$

一方, A_j の総和は球面 S^2 の面積 4π に等しい:

$$\sum_{j=1}^f A_j = 4\pi.$$

したがって, 式 (*) の両辺を $j = 1, \dots, f$ に関し加え合わせるにより,

$$2\pi \cdot v = 2e \cdot \pi - 2\pi \cdot f + 4\pi, \quad \text{すなわち} \quad v - e + f = 2$$

を得る. □

1.3 正多面体の分類

オイラーの定理の応用として、正多面体の分類を問題として提出する.

問題

R を正多面体とする.

(1) R の頂点, 辺, 面の個数をそれぞれ v, e, f とする. さらに各頂点からは m 本の辺が生えて
いると, また各面は正 n 角形であるとする (ただし $m, n \geq 3$). このとき, 常に

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)e = 1$$

が成り立つことを示せ.

(2) m, n, v, e, f のとり得る値は次のものに限られることを示せ.

m	n	v	e	f
3	3	4	6	4
3	4	8	12	6
4	3	6	12	8
3	5	20	30	12
5	3	12	30	20

表 1.1: 正多面体の分類

(3) 正多面体を分類せよ. また各正多面体をボール紙を使って作成せよ.

略解. (1) まず $e = mv/2 = nf/2$ が成り立つことに注意しよう. したがって, $v = 2e/m$, $f = 2e/n$. これらをオイラーの公式 $v - e + f = 2$ に代入して整理すればよい.

(2) (1) より $m = 3$ あるいは $n = 3$ でなければならないことが直ちに従う. $m = 3$ のとき, n のとり得る値は 3, 4, 5 である. また $n = 3$ のとき, m のとり得る値が 3, 4, 5 であることも同様.

(3) (2) より f のとり得る値は, 4, 6, 8, 12, 20. すなわち 5 種類の正多面体しか存在しない. $\square$

テーマ学習 II: 凸多面体の剛性

2.1 コーシーの剛性定理

多角形を辺に沿って貼り合わせて得られる空間図形を**多面体**と呼ぶ。⁴ 例えば、直方体や 4 角錐（の表面）は多面体である。また、これらの多面体から面をいくつか取り除いたものもまた多面体である。ボール紙を使って実際に多面体を作ることを考えよう。面の貼り合わせにはセロテープを使うことにする。辺をはさんで隣り合う 2 枚の辺だけを取り出して考えれば、それらはセロテープで貼り合わされているだけで、したがってそれら 2 枚の面の間の角度は変化する。言い換えれば、この 2 枚の面からのみなる多面体は「変形可能」である。同様に、直方体から向かい合う 2 枚の面を取り除いた多面体や、4 角錐から底面を取り除いた多面体もまた変形可能である（図 2.6）。ところが、元の直方体や 4 角錐は堅くて変形しない。また、正多面体も変形不可能であるように感じられる。多くの多面体の変形不可能であると、我々の幾何学的直感は訴える。この直感を正当化することが、テーマ学習 II の目的である。

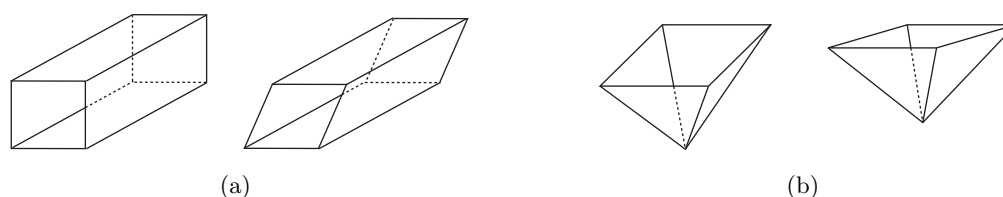


図 2.6: 変形可能な多面体

まずは言葉の用意から始めよう。「穴」の開いていない多面体を、**閉多面体**と呼ぶ。例えば直方体（の表面）は閉であるが、そこから面をひとつ取り去ったものはもはや閉ではない。また閉多面体に対し、その内部の任意の 2 点を結ぶ線分が多面体内部にとどまるとき、その多面体は**凸**であると言われる。例えば、すべての正多面体は凸である。

⁴テーマ学習 III では、「多面体」という用語を違う意味で用いるので、注意されたい。

定理（コーシーの剛性定理） |||||

凸閉多面体は変形不可能である。⁵

|||||

証明に先立って、多面体が変形するとき何が起こるかを観察してみたい。例えば、直方体から向かい合うふたつの面を取り去ることにより得られる多面体は変形可能であった。実際にその多面体を変形する際に、隣り合うふたつの面の間の角が変化することに注意しよう。辺を隔てて隣り合うふたつの面の間の角度の変化、これが多面体の変形を可能にする。逆にもし辺を隔てて隣り合うふたつの面の間の角度に変化が一切生じないときには、多面体は変形不可能である。

2.2 剛性定理の証明

さて、コーシーの剛性定理の証明を始めよう。 P を凸閉多面体とする。同一空間内に、中心が P の内部にあり、しかも P を内部に含む球面をとる。そして、 P の各辺をその球面の中心から球面に射影することにより、球面上に網目状の図形 – これを **(球面) グラフ** と呼ぶ – が得られる (図 2.7)。それを G_0 で表すことにしよう。

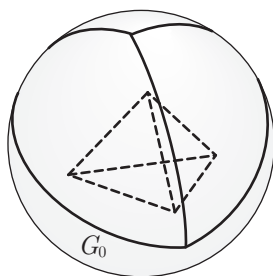


図 2.7: 多面体の球面への射影

以降、証明は背理法による。 P が変形可能だとしよう。すると、隣り合う面の間の角度に変化が生じる。 P のおのおのの辺に対し、それを隔てて隣り合うふたつの面の間の角度が増加するときには符号 $+$ を、また逆に減少するときには符号 $-$ を与えることにする。ただし、角度に変化が生じない場合には符号を与えないことにする。背理法の仮定によれば符号の付いた辺が少なくともひとつ存在する。多面体 P の辺に対する符号付けに応じて、球面グラフ G_0 の辺にも符号を与えよう (図 2.8)。

グラフ G_0 の各頂点 V に対し、そこから生えている辺に着目する。これらの辺を順番に $E_1, \dots, E_m$ としよう。これらの辺 $E_1, \dots, E_m$ の符号をこの順に並べ、さらに最後に辺 E_1 の符号を再度書

⁵ 「凸である」という条件は必要である。すなわち、変形する閉多面体が存在する。そのような多面体を実際に作成することが、演習 II の主題である。

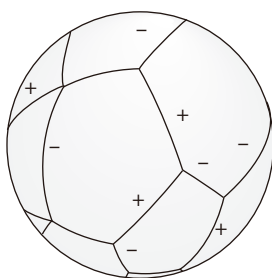


図 2.8: 辺に符号が与えられた球面グラフ

く. ただし, 符号の付いていない辺は無視することにする. このとき, 符号が合計何回変化したか, その回数を頂点 V の**指数**と呼ぶことにしよう (図 2.9). すると, 次が成り立つ.

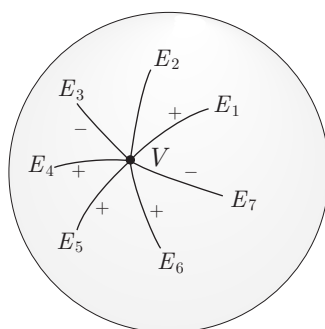


図 2.9: 頂点の指数

辺 $E_1, E_2, \dots, E_7$ の符号を書き出し, さらに最後に辺 E_1 の符号を書くと (ただし符号の付いていない辺は無視する), $+ - + + + - +$ となる. したがって, この場合の符号の変化の回数, すなわち頂点 V の指数は 4 である.

主張 |||||

V をグラフ G_0 の頂点とする. このとき, 次のいずれか一方が必ず成り立つ:

- (i) V から生えている辺には符号が全く与えられていない;
- (ii) V の指数は 4 以上である.

|||||

この主張の証明は後回しにして, コーシーの定理の証明を続けよう. グラフ G_0 の辺のうち, 符号の付いていないものを取り除く. その結果, 辺が 1 本も生えていない頂点が発生した場合, そういった頂点も取り除こう. すると, 新たな球面グラフが得られる. そのグラフは一般には複数

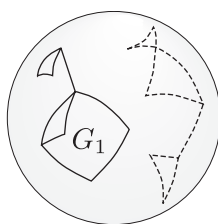


図 2.10: 連結成分

の連結成分を持ち得る (図 2.10). そこで連結成分をひとつとり G_1 とする. さらに G_1 の頂点・辺・面の個数をそれぞれ v, e, f としよう. G_1 の各面に対し, その周を 1 周したときの辺の符号の変化の回数をその面の**指数**と呼ぶことにする (図 2.11). すると, G_1 の頂点の指数の総和は面の指数の総和に等しいことが判る:

$$(\text{頂点の指数の総和}) = (\text{面の指数の総和}). \quad (1)$$

上記主張によれば, この等式の左辺の値は $4v$ 以上である. 一方, G_1 の各面に対し, それが n

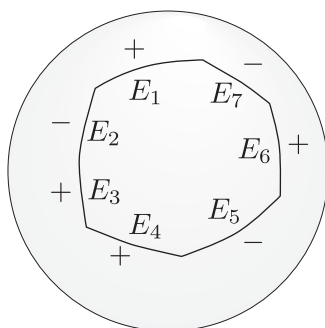


図 2.11: 面の指数

この図の場合, 辺 E_1 から始め反時計回りに一巡したとき, 辺に与えられた符号は $+-+--++$ となる (最後に辺 E_1 の符号を再び書くことを忘れないように). したがってこの面の指数は 6 である.

角形であるとしたとき, 指数は明らかに n 以下で, しかも偶数である. したがって, とくに面が 3 角形の場合には, その指数は 2 以下である. そこで, G_1 の面のうち n 角形であるものの個数を f_n とすれば (G_1 はループや並列辺を持たないから $n \geq 3$ としてよい), 式 (1) の右辺の値は $2f_3 + \sum_{n \geq 4} n f_n$ 以下であることが判る. 以上より,

$$4v \leq 2f_3 + \sum_{n \geq 4} n f_n \quad (2)$$

が従う.

各 $k = 1, \dots, n$ に対し, 内角 $\angle A_k$ と $\angle A'_k$ の間に $\angle A_k > \angle A'_k$ なる関係があるときには, 頂点 A_k に符号 $+$ をあたえる. また逆に $\angle A_k < \angle A'_k$ なる関係があるときには, 符号 $-$ を与えることにする. ただし, $\angle A_k = \angle A'_k$ の場合には符号を与えないこととする. いま, Γ の頂点のうち少なくともひとつが符号を有すると仮定する. このとき, 頂点 A_1 から出発し, 頂点 $A_2, \dots, A_n$ を回り, 最後に再び頂点 A_1 に戻ったときに符号が何回変化するか, その変化の回数は常に 4 以上である. ただし符号の変化の回数を数えるにあたって, 符号の付いていない頂点は無視するものとする.

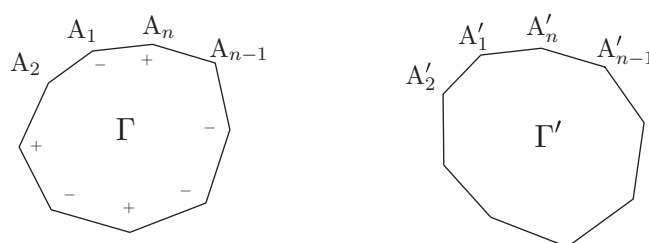


図 2.13: 命題 1

この命題を仮定して, 上述の主張を証明しよう. 先程の様に, P の各頂点を中心として半径が十分小さな球面をとると, それと P との交わりとして球面凸多角形がひとつ得られる. これを命題 1 の凸多角形 Γ と見なそう. さて, ここで多面体 P が変形可能であると仮定しよう. 変形の結果得られる凸多面体を P' とする. このとき, 多面体と球面の交わりとして得られた球面凸多角形 Γ も, 別の球面凸多角形 — それを Γ' としよう — に変形する. 変形に際し多面体の各面の形は変化しないから, Γ と Γ' の対応する辺の長さは等しいことが判る. すなわち, Γ と Γ' は命題 1 の条件を満足する. そこで命題 1 で行ったように, Γ の頂点に符号を与え, さらに Γ の周を 1 周したときの符号の変化の回数を考えると, その値は, 球面の中心としてとった P の頂点の指数と一致する. その結果, 主張が従う. 以上で主張の証明が (命題 1 の証明を除き) 完了した.

命題 1 は球面多角形に関するものであったが, 同様なことが平面内の多角形に対しても成立する. すなわち, 次が成り立つ.

命題 2 Γ および Γ' を平面内の凸 n 角形とする. Γ の頂点を順に $A_1, \dots, A_n$ と, また Γ' の頂点を順に $A'_1, \dots, A'_n$ とする. さらに,

$$A_1A_2 = A'_1A'_2, \quad \dots, \quad A_{n-1}A_n = A'_{n-1}A'_n, \quad A_nA_1 = A'_nA'_1.$$

とする. ただし Γ と Γ' は合同ではないと仮定する. Γ の各頂点 A_k に命題 1 と同じ仕方で符号を与えるとき, Γ の周を 1 周したときの頂点の符号の変化の回数は 4 以上である.

これらふたつの命題の証明を比べたとき、命題 2 の証明の方が若干証明が容易である。またそもそも平面図形の方が球面図形より絵が描きやすいという利点もある。そこで、ここでは命題 1 の証明を与える代わりに、命題 2 の証明を以下の節で行うことにする。

2.4 命題 2 の証明

まず準備として、補題をひとつ用意する。

補題 Γ , および Γ' を平面内の凸 n 角形とする。 Γ の頂点を順に $A_1, \dots, A_n$ と、また Γ' の頂点を順に $A'_1, \dots, A'_n$ とする。さらに、

$$A_1A_2 = A'_1A'_2, \quad \dots, \quad A_{n-1}A_n = A'_{n-1}A'_n, \\ \angle A_2 \geq \angle A'_2, \quad \dots, \quad \angle A_{n-1} \geq \angle A'_{n-1}$$

と仮定する (図 2.14)。このとき、

$$A_nA_1 \geq A'_nA'_1$$

が成り立つ。しかも等号 $A_nA_1 = A'_nA'_1$ が成立するのは、 $\angle A_1 = \angle A'_1, \dots, \angle A_n = \angle A'_n$ が成り立つときのみである。

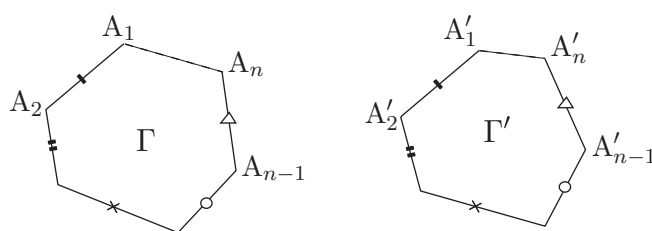


図 2.14: 補題

この補題の証明は後回しにして、命題 2 の証明を行おう。

命題 2 の証明. まず、符号の変化の総数は常に偶数であることに注意しよう。従ってもし符号の変化の回数が 4 未満であるならば、その値はゼロないし 2 でなければならない。仮にその値がゼロであるとする、 Γ の頂点に与えられている符号はすべて + であるか、すべて - でなければならない。いずれにしても、 Γ の内角の和と Γ' の内角の和が等しくないことになり矛盾が生じる。したがって、符号の変化の回数が決して 2 とはならないことを示せばよい。

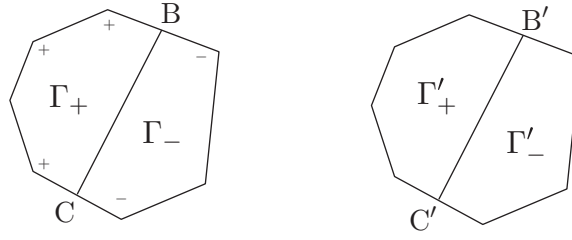


図 2.15: 命題 2 の証明 — 指数が 2 の場合

いま仮に符号の変化の回数が 2 であるとする. すると, 多角形 Γ の周に 2 点 B, C を適当にとることにより, 多角形 Γ の周を符号が $+$ の頂点だけを含む部分と符号が $-$ の頂点を含む部分とに分けることが可能である (図 2.15). さらに点 B, C は Γ のある辺の中点であるとする. 多角形 Γ' にも対応する点 B', C' をとる. さらに線分 BC により凸多角形 Γ をふたつの凸多角形 Γ_+, Γ_- に分割する. ただし, もとの多角形 Γ の頂点 $A_1, \dots, A_n$ のうち, $+$ の符号が付いたものは Γ_+ に含まれ, 一方 $-$ の符号が付いたものは Γ_- に含まれるとする. これに対応して, 多角形 Γ' も線分 $B'C'$ により, ふたつの凸多角形 Γ'_+, Γ'_- に分割される. 凸多角形 Γ_- および Γ'_- に対し補題を適用すれば, $BC > B'C'$ を得る. 一方, 凸多角形 Γ_+ と Γ'_+ に対し補題を適用すると, $BC < B'C'$ が従う. ところが, これは明らかに矛盾である. 以上で命題 2 が正しいことが証明された. $\square$

2.5 補題の証明

さて, 最後に補題を n に関する帰納法により証明しよう. $n = 3$ のときには補題の成立は明らかである. 凸 n 角形に対して補題が成立すると仮定して, 凸 $n + 1$ 角形に対しても同様な主張が成り立つことを示そう. 以下ふたつの場合に分けてこれを実行する.

場合 1. ある番号 $k (= 2, \dots, n)$ に対して $\angle A_k = \angle A'_k$ が成立する場合. この場合には凸 $n + 1$ 角形 Γ および Γ' から $\triangle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ および $\triangle A'_{k-1}A'_kA'_{k+1}$ を切り落とすことにより得られるふたつの凸 n 角形に対し, 帰納法の仮定を適用すればよい (図 2.16).

場合 2. すべての番号 $k = 2, \dots, n$ に対し, $\angle A_k > \angle A'_k$ が成り立つ場合. このときにはさらに次のような場合分けが必要である. 多角形 Γ' に含まれる $\triangle A'_{n-1}A'_nA'_{n+1}$ を点 A'_{n-1} を中心として適当な角度回転させ, その結果得られる新たな $n + 1$ 角形の頂点 A'_{n-1} における内角が $\angle A_{n-1}$ に等しくなるようにしたとする (図 2.17).

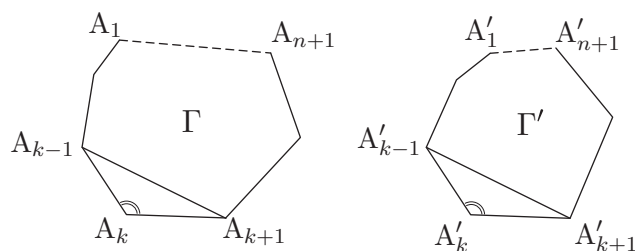


図 2.16: 補題の証明 — 場合 1

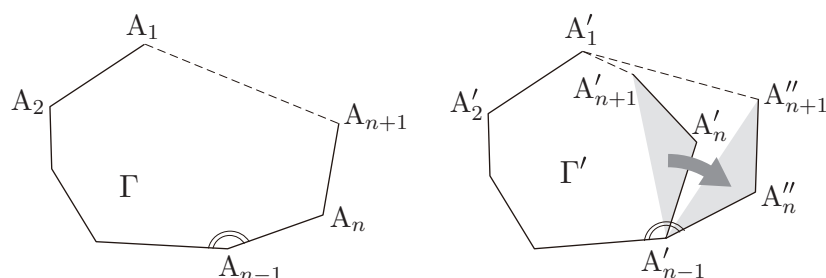


図 2.17: 補題の証明 — 場合 2

場合 2 a. その新たな $n+1$ 角形が凸である場合. その凸 $n+1$ 角形を Γ'' と呼ぶことにしよう. またその頂点を $A'_1, \dots, A'_{n-1}, A''_n, A''_{n+1}$ とする (図 2.17). このとき

$$A'_1 A''_{n+1} > A'_1 A'_{n+1}$$

が成り立つ. 一方, 凸 $n+1$ 角形 Γ'' の頂点 A'_{n-1} における内角と凸 $n+1$ 角形 Γ の対応する頂点 A_{n-1} の内角は等しい. 従って, ふたつの凸 $n+1$ 角形 Γ, Γ'' に対し場合 1 の議論を適用することができ, そしてその結果として

$$A_1 A_{n+1} > A'_1 A''_{n+1}$$

を得る. これと先程の不等式とから示すべき不等式 $A_1 A_{n+1} > A'_1 A'_{n+1}$ が従う.

場合 2 b. 新たに得られた $n+1$ 角形が凸でない場合 (図 2.18(a)). この場合には, $\triangle A'_{n-1} A'_n A'_{n+1}$ を回転していく途中, 3 点 A'_1, A'_2, A'_{n+1} が 1 直線上にある瞬間がある. そのときの点 A'_n, A'_{n+1} の位置を改めて A''_n, A''_{n+1} と記すことにしよう (図 2.18(b)). このとき $A'_1 A'_{n+1} < A'_1 A''_{n+1}$ が成り立つ. さらに 3 点 A'_1, A'_2, A''_{n+1} が 1 直線上にあることから, $A'_1 A''_{n+1} = A'_2 A''_{n+1} - A'_1 A'_2$ を得る. 以上から,

$$A'_1 A'_{n+1} < A'_2 A''_{n+1} - A'_1 A'_2$$

が従う. ところが, 仮定より $A'_1 A'_2 = A_1 A_2$ である. 一方, 点 $A'_2, \dots, A'_n, A''_{n+1}$ を頂点とする凸 n 角形と点 $A_2, \dots, A_{n+1}$ を頂点とする凸 n 角形に帰納法の仮定を適用することにより,

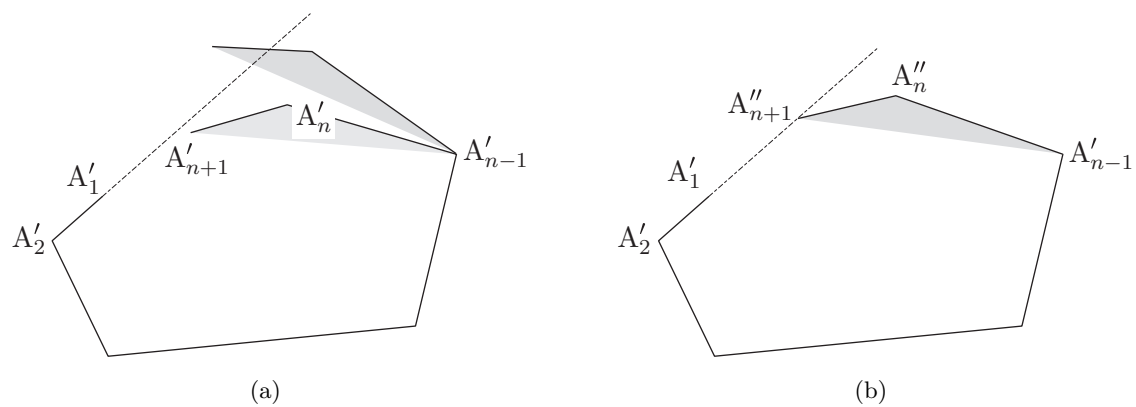


図 2.18:

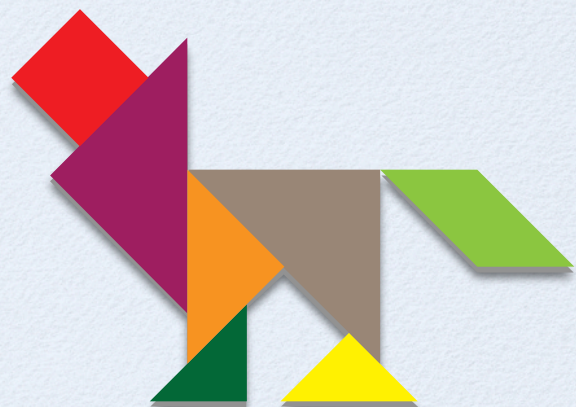
$A'_2 A''_{n+1} < A_2 A_{n+1}$ を得る. 従って, $A'_1 A'_{n+1} < A_2 A_{n+1} - A_1 A_2 \leq A_1 A_{n+1}$ が結論される. 以上で, 補題の証明も完了した.

テーマ学習 III
Hilbert の第3問題
— 『面積』と『体積』をめぐって—

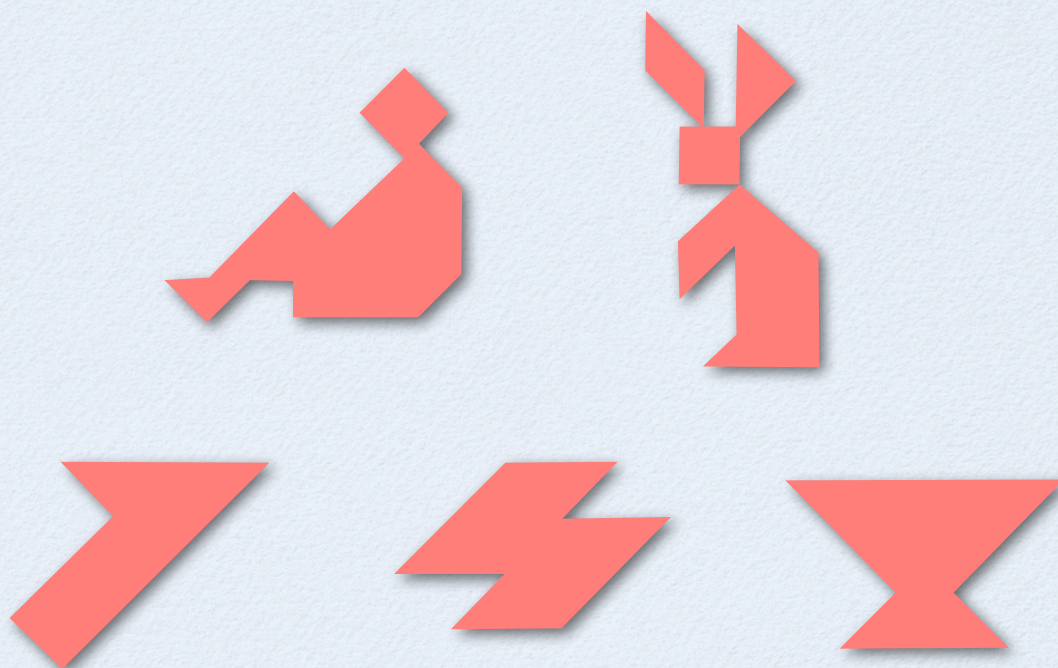
■ タングラムで遊ぼう



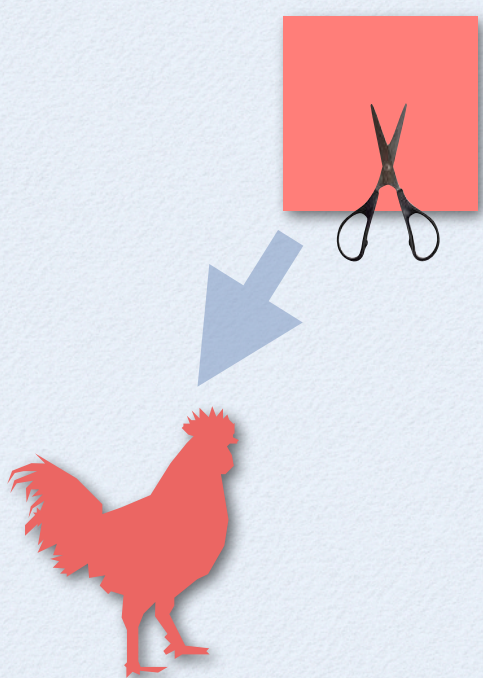
月に吠える犬



■ いろいろな問題



■ 『自由形』 タングラム



正方形のボール紙をはさみで切り，それを適当に再配置して，あらかじめ与えられた図形を作れるか？ ただし，

- はさみで切るのは有限回，また切り口はいつもまっすぐ；
- それ以外，どう切るかは自由；
- 切ったボール紙を置くときに，重なってはならない。

■ 数学的定式化

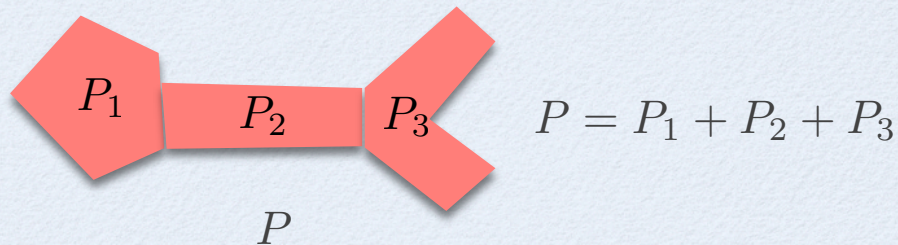
平面内の多角形 $P, P_1, \dots, P_n$ に対し,

$$P = P_1 \cup \dots \cup P_n \quad \text{かつ} \quad \text{int } P_i \cap \text{int } P_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

が成り立つとき, P は $P_1, \dots, P_n$ に**分割される**と言い,

$$P = P_1 + \dots + P_n$$

と書くことにする. ただし, $\text{int } P_i$ は P_i の内部を表す.

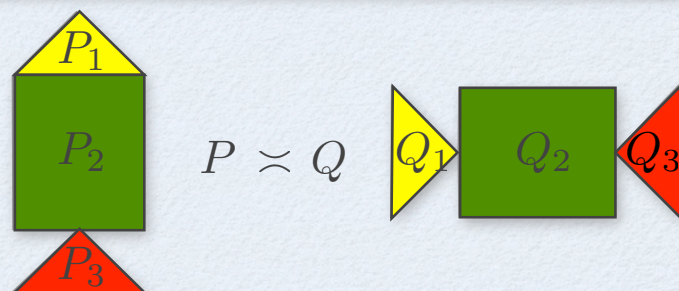


平面内のふたつの多角形 P, Q に対し, 以下の条件が満たされるとき, P と Q は**合同分割同値**であると言い, $P \asymp Q$ と書く:

平面内に多角形 $P_1, \dots, P_n$ および $Q_1, \dots, Q_n$ を適当にとったとき,

$$P = P_1 + \dots + P_n, \quad Q = Q_1 + \dots + Q_n,$$

$$P_i \equiv Q_i \quad (i = 1, \dots, n).$$



■ 2次元における Hilbert の問題

問題. 平面内の任意の多角形は正方形と合同分割同値か？

あるいは、より一般に、

問題. 平面内のふたつの多角形 P, Q は互いに合同分割同値か？

面積の等しい

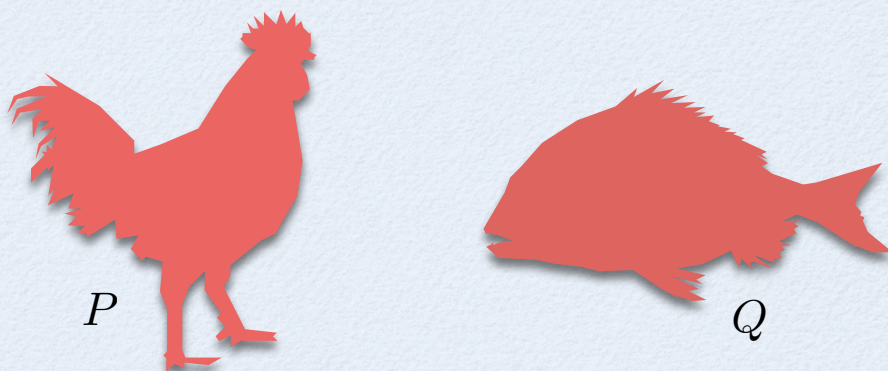
必要条件： $\text{Area } P = \text{Area } Q$;

ただし、 $\text{Area } P$ は P の面積を表す.

■ Bolyai-Gerwien の定理

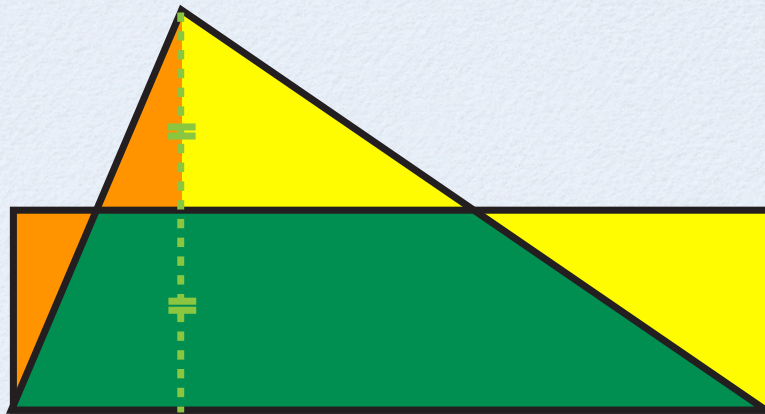
定理. 平面内のふたつの多角形 P, Q が合同分割同値であるための必要十分条件は、それらの面積が一致することである:

$$P \asymp Q \iff \text{Area } P = \text{Area } Q.$$



■ 証明に向けての準備

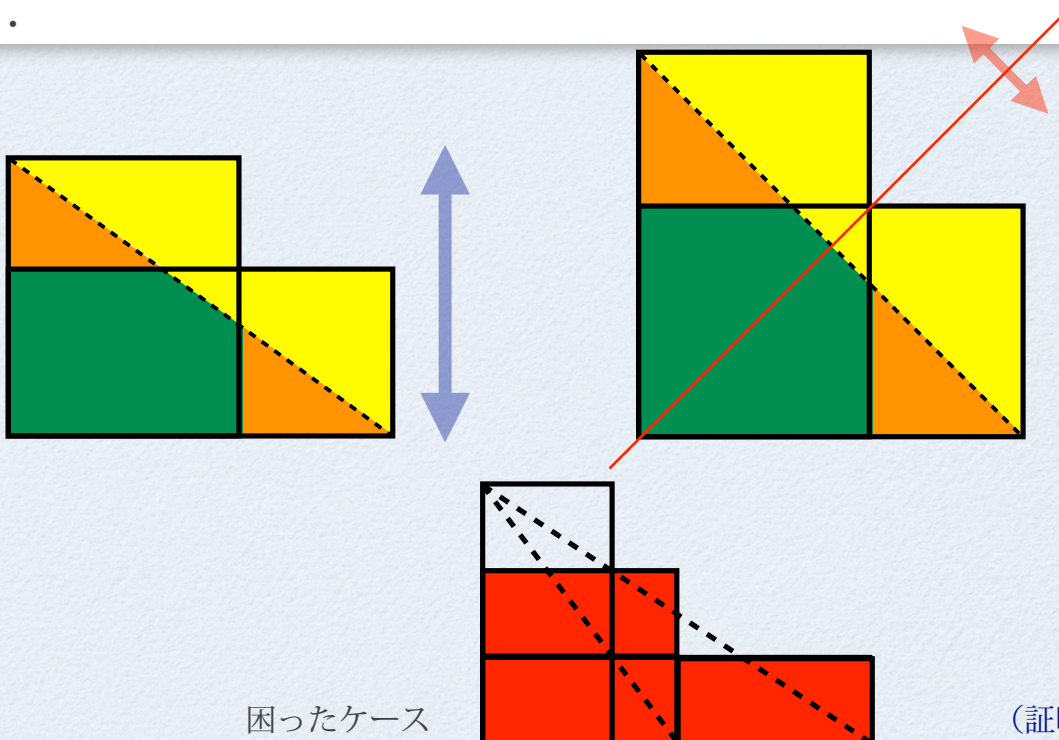
補題 1. いかなる 3 角形に対しても、それと合同分割同値な長方形が存在する.



(証明終わり)

補題 1. いかなる 3 角形に対しても、それと合同分割同値な長方形が存在する.

補題 2. 面積が等しいふたつの長方形は合同分割同値である.



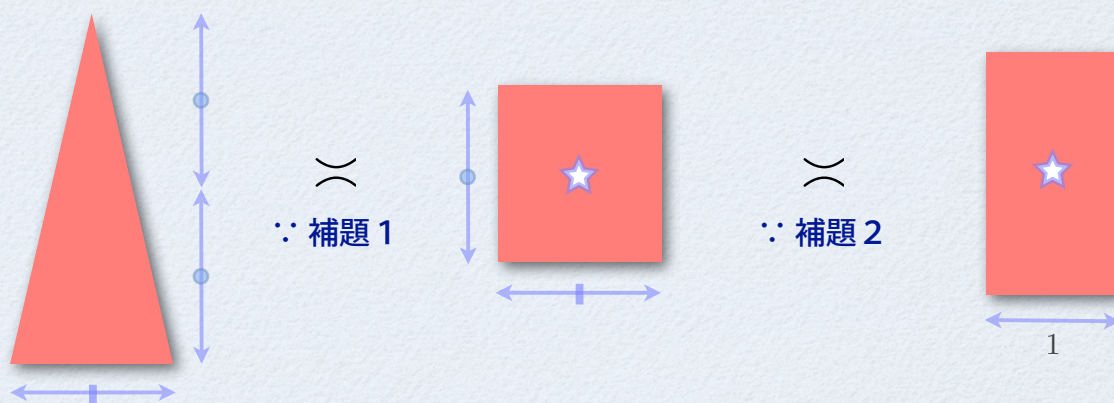
困ったケース

(証明終わり)

補題 1. いかなる 3 角形に対しても、それと合同分割同値な長方形が存在する.

補題 2. 面積が等しいふたつの長方形は合同分割同値である.

補題 3. いかなる 3 角形も、1 辺の長さが 1 の長方形と合同分割同値である.

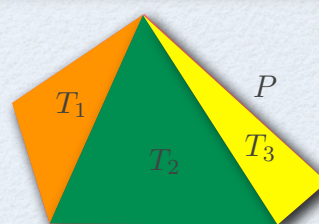


(証明終わり)

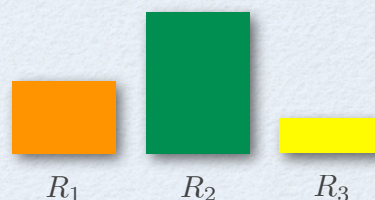
命題. 平面内のいかなる多角形も、1 辺の長さが 1 の長方形に合同分割同値である.

証明

ステップ 1. 与えられた多角形 P を 3 角形 $T_1, \dots, T_n$ に分割する.



ステップ 2. 各 3 角形 T_i は、同じ面積を持つ 1 辺の長さが 1 の長方形 R_i に合同分割同値である. $\Leftarrow$ 補題 3



ステップ 3. 長方形 $R_1, \dots, R_n$ を「積み上げて」1 辺の長さが 1 のひとつの長方形 R が作られる. もとの多角形 P はこの長方形 R に合同分割同値である.



(証明終わり)

■ Bolyai-Gerwien の定理の証明

B-G の定理：

$$\text{Area } P_1 = \text{Area } P_2 \implies P_1 \asymp P_2$$



$$P_1 \asymp R_1$$

$$\text{Area } P_1 = \text{Area } R_1$$

$$\text{Area } P_1 = \text{Area } P_2 \quad \therefore \quad \text{Area } R_1 = \text{Area } R_2 \quad \therefore \quad \ell_1 = \ell_2 \quad \therefore \quad R_1 \equiv R_2 \quad \therefore \quad P_1 \asymp P_2$$



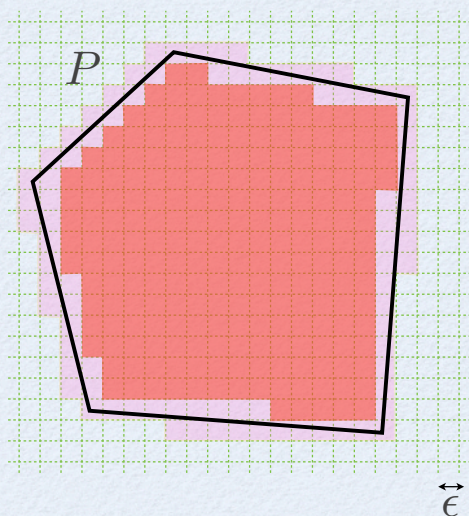
$$\text{Area } P_2 = \text{Area } R_2$$

$$P_2 \asymp R_2$$

主張. 平面内のいかなる多角形も、1 辺の長さが 1 の長方形に合同分割同値である。

(B-G の定理の証明終わり)

■ そもそも『面積』とは？



$$O_\epsilon := (\text{pink squares})$$

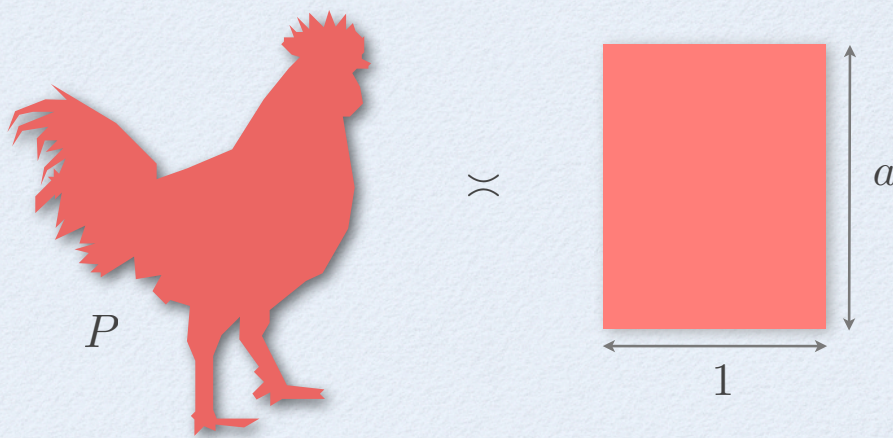
$$(\text{pink area}) = \epsilon^2 O_\epsilon$$

$$I_\epsilon := (\text{red squares})$$

$$(\text{red area}) = \epsilon^2 I_\epsilon$$

$$\text{Area } P := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 O_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 I_\epsilon$$

■ 極限操作を必要としない多角形の『面積』の定義



$$\text{Area } P := a$$

■ Hilbert の第 3 問題

問題. 空間内の体積の等しいふたつの多面体は合同分割同値か？

背景.

- ・ 2次元の場合，すなわち平面内の多角形に対しては，極限操作を用いることなく，その面積が定義可能であった．
- ・ところが3次元の場合，すなわち空間内の多面体に対しては，極限操作なしに体積を定義することは不可能であるように，Hilbert には思えた．

Dehn による解決. 空間内の多面体は，体積が等しくとも合同分割同値であるとは限らない．

すなわち，空間内の体積の等しいふたつの多面体で，合同分割同値でないものが存在する．



David HILBERT (1862-1943) 19世紀後半から20世紀前半にかけて活躍した大数学者。その業績は、代数・幾何・解析・数理物理学等極めて多岐に渡る。19世紀最後の年1900年にパリで開催された国際数学会議において、彼が発表したのが、いわゆる **Hilbert の23の問題**である。その多くが20世紀における数学の発展に多大な影響を与えた。その中で一番最初に解決されたのが、第3問題と呼ばれるものである。解決したのは Hilbert の弟子の **Max DEHN (1878-1958)**, Hilbert が問題を発表してから僅か数ヶ月後のことである。

■ Dehn 不変量 — 定義に向けての準備

$\mathbb{Q}$ — 有理数全部を集めてできる集合

有限個の実数からなる集合 $\Theta := \{\theta_1, \dots, \theta_p\}$ に対し、

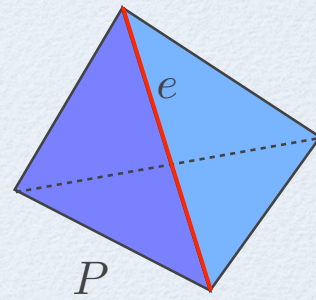
$$V(\Theta) := \{a_1\theta_1 + \dots + a_p\theta_p : a_1, \dots, a_p \in \mathbb{Q}\}$$

関数 $\Lambda : V(\Theta) \rightarrow \mathbb{Q}$ に対し以下の条件が成り立つとき、 Λ は **$\mathbb{Q}$ -線形**であると言われる：

$$\begin{aligned} \Lambda(\phi + \psi) &= \Lambda(\phi) + \Lambda(\psi) & (\forall \phi, \psi \in V(\Theta)); \\ \Lambda(a\phi) &= a\Lambda(\phi) & (\forall a \in \mathbb{Q}, \forall \phi \in V(\Theta)). \end{aligned}$$

空間内の多面体 P に対し,

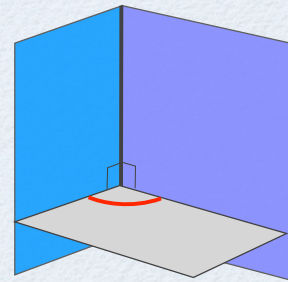
$$\text{Edge}(P) := \{e : e \text{ は } P \text{ の辺} \}$$



各 $e \in \text{Edge}(P)$ に対し,

$$\text{ang}(e) := (\text{ } e \text{ を含むふたつの面の間の偏角})$$

$$\text{Ang}(P) := \{\text{ang}(e) : e \in \text{Edge}(P)\}$$



■ Dehn 不変量

P — 空間内の多面体

Θ — $\text{Ang}(P) \cup \{\pi\} \subset \Theta \subset \mathbb{R}$ なる有限集合

$\Lambda : V(\Theta) \rightarrow \mathbb{Q}$ — $\Lambda(\pi) = 0$ なる $\mathbb{Q}$ -線形関数

このとき, P の Λ に関する **Dehn 不変量**が以下で定義される:

$$\text{Dehn}(P; \Lambda) := \sum_{e \in \text{Edge}(P)} \text{length}(e) \cdot \Lambda(\text{ang}(e)).$$

ただし, $\text{length}(e) := (\text{辺 } e \text{ の長さ})$

■ Dehn の定理

P, Q を多面体とする. もしそれらが合同分割同値であるならば,

- $\text{Ang}(P) \cup \text{Ang}(Q) \cup \{\pi\} \subset \Theta \subset \mathbb{R}$ なる任意の有限集合 Θ , および
- $\Lambda(\pi) = 0$ なる任意の $\mathbb{Q}$ -線形関数 $\Lambda : V(\Theta) \rightarrow \mathbb{Q}$

に対し, 次が成り立つ:

$$\text{Dehn}(P; \Lambda) = \text{Dehn}(Q; \Lambda).$$

■ Hilbert の問題に対する反例

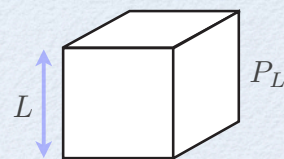
$$\text{Dehn}(P; \Lambda) := \sum_{e \in \text{Edge}(P)} \text{length}(e) \cdot \Lambda(\text{ang}(e))$$

P_L — 1 辺の長さ L の立方体

任意の Λ に対し, $\text{Dehn}(P_L; \Lambda) = 12 \cdot L \cdot \Lambda(\pi/2)$.

ところが, $2\Lambda(\frac{\pi}{2}) = \Lambda(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \Lambda(\pi) = 0. \quad \therefore \quad \Lambda(\pi/2) = 0.$

$$\therefore \text{Dehn}(P_L; \Lambda) = 0.$$



Q — 1 辺の長さ 1 の正四面体

$\alpha = \arccos 1/3$, すなわち, $\cos \alpha = 1/3$.

補題. $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$.

これより, 次のような $\mathbb{Q}$ -線形関数 Λ が存在することが分かる:

$$\Lambda(\pi) = 0, \quad \Lambda(\alpha) = 1.$$

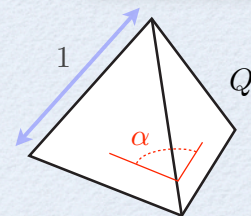
この Λ に対し, $\text{Dehn}(Q; \Lambda) = 6 \cdot 1 \cdot \Lambda(\alpha) = 6$

$$\therefore \text{Dehn}(P_L; \Lambda) \neq \text{Dehn}(Q; \Lambda)$$

したがって, Dehn の定理より, $P_L \not\sim Q$.

いま, L を $\text{Vol}(P_L) = \text{Vol}(Q)$ となるようにとる.

すると, P_L, Q が Hilbert の第 3 問題に対する反例になる.



Dehn の定理:

$$P \asymp Q \implies \text{Dehn}(P; \Lambda) = \text{Dehn}(Q; \Lambda)$$

■ ここまでのまとめ

- 幾何学においては、『**不変量**』がしばしば登場する.

例：Euler 数・ホモロジー・コホモロジー・特性類. . .

- 幾何学においては、**次元**ごとに現象・手法が異なることがしばしばである.

例 1：奇数次元の多様体の Euler 数は常にゼロである.

例 2：Poincare 予想の解決

- 2次元：自明
- 5次元以上：Smale, 1960 年
- 4次元：Freedman, 1981 年
- 3次元：Perelman, 2002-03 年

- 数学には**終わりがない**. . .

例：Hilbert の第3問題の周辺にも未解決問題が少なからず存在する.

■ Sydler の定理

Dehn の定理 (1902) :

$$P \asymp Q \implies \begin{aligned} \text{Dehn}(P) &= \text{Dehn}(Q) \\ \text{Vol } P &= \text{Vol } Q \end{aligned}$$

逆は成り立つか？

Sydler の定理 (1965) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vol } P = \text{Vol } Q \\ \text{Dehn}(P) = \text{Dehn}(Q) \end{array} \right\} \implies P \asymp Q$$

■ 未解決問題 — 高次元化

Dehn-Sydler の定理：

$$P \asymp Q \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Dehn}} \\ \xleftarrow{\text{Sydler}} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Vol } P = \text{Vol } Q \\ \text{Dehn}(P) = \text{Dehn}(Q) \end{array} \right\}$$

これらは 3 次元 Euclid 空間の中での話.

一般次元 Euclid 空間の中でも, Dehn の定理は成り立つ.

4 次元 Euclid 空間の中でも, Sydler の定理は成り立つ (Jessen, 1968)

未解決問題：5 次元以上の Euclid 空間の中で, Sydler の定理は成り立つか？

■ 未解決問題 — 非 Euclid 幾何学化

Dehn-Sydler の定理：

$$P \asymp Q \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Dehn}} \\ \xleftarrow{\text{Sydler}} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Vol } P = \text{Vol } Q \\ \text{Dehn}(P) = \text{Dehn}(Q) \end{array} \right\}$$

n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{E}^n$ の代わりに, n 次元球面 $\mathbb{S}^n$ や n 次元双曲空間 $\mathbb{H}^n$ を考えることも可能.

$\mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ ($n \geq 3$) においても, Dehn の定理は成り立つ.

未解決問題： $\mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ ($n \geq 3$) において, Sydler の定理は成り立つか？

■ 参考文献

- 砂田利一著『分割の幾何学』日本評論社，2000 年.
- Norman Do, *Scissors congruence and Hilbert's third problem*", The Australian Math. Soc. Gazette, 33 (2006), no. 2, 81-87.
- Ruth Kellerhals, *Old and new about Hilbert's third problem*, European Women in Mathematics, 179-187, Hindawi Publ. Corp., Cairo, 2000.
- Walter D. Neumann, *Hilbert's 3rd problem and invariants of 3-manifolds*, The Epstein Birthday Schrift, 383--411 (electronic), Geom. Topol. Monogr., 1, Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.

補遺

■ 補題の証明について

補題. $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. $\alpha = \operatorname{Arccos} 1/3$, すなわち, $\cos \alpha = 1/3$.

$$(\#) \quad \cos k\alpha = \frac{\nu_k}{3^k} \quad (k = 1, 2, \dots); \text{ ただし, } \nu_k \text{ は } 3 \text{ で割り切れない整数}$$

(#) の証明. 帰納法による. $k = 1$ の場合. $\cos \alpha = 1/3$ であるから OK.
 $k = 2$ の場合. $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9}$. 確かに OK.

$k = j - 1, j$ に対し (#) が成立すると仮定.

$$\begin{aligned} \cos(\phi + \psi) &= \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi, \\ \cos(\phi - \psi) &= \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi. \\ \therefore \cos(\phi + \psi) + \cos(\phi - \psi) &= 2 \cos \phi \cos \psi. \\ \phi &:= j\alpha, \psi := \alpha : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(j+1)\alpha &= 2 \cos j\alpha \cos \alpha - \cos(j-1)\alpha \\ &= 2 \cdot \frac{\nu_j}{3^j} \cdot \frac{1}{3} - \frac{\nu_{j-1}}{3^{j-1}} = \frac{2\nu_j - 9\nu_{j-1}}{3^{j+1}}. \end{aligned}$$

これより, $\nu_{j+1} = 2\nu_j - 9\nu_{j-1}$. これは確かに 3 で割り切れない整数. (証明終わり)

補題. $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. $\alpha = \operatorname{Arccos} 1/3$, すなわち, $\cos \alpha = 1/3$.

$$(\#) \quad \cos k\alpha = \frac{\nu_k}{3^k} \quad (k = 1, 2, \dots); \text{ ただし, } \nu_k \text{ は } 3 \text{ で割り切れない整数}$$

補題の証明. 背理法による. $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{q}{p}$ と仮定: ただし, p, q は互いに素な正の整数.

仮定より $p\alpha = q\pi$. $\therefore \cos p\alpha = \cos q\pi = \pm 1$.

ところが, これは (#) に矛盾.

(証明終わり)

■ Dehn の定理の証明のための補題

- $P, P_1, \dots, P_n$ を $P = P_1 + \dots + P_n$ なる多面体,
- Θ を $\text{Ang}(P) \cup \text{Ang}(P_1) \cup \dots \cup \text{Ang}(P_n) \cup \{\pi\} \subset \Theta \subset \mathbb{R}$ なる任意の有限集合,
- $\Lambda: V(\Theta) \rightarrow \mathbb{Q}$ を $\Lambda(\pi) = 0$ なる任意の $\mathbb{Q}$ -線形関数とする.

このとき,

$$(*) \quad \text{Dehn}(P; \Lambda) = \text{Dehn}(P_1; \Lambda) + \dots + \text{Dehn}(P_n; \Lambda).$$

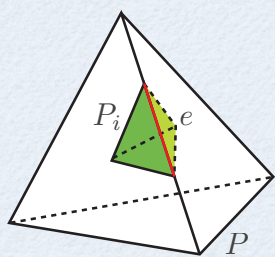
$$(*) \quad \text{Dehn}(P; \Lambda) = \text{Dehn}(P_1; \Lambda) + \dots + \text{Dehn}(P_n; \Lambda).$$

証明. 各 $e \in \text{Edge}(P_1) \cup \dots \cup \text{Edge}(P_n)$ に対し, 次のいずれかが成り立つ:

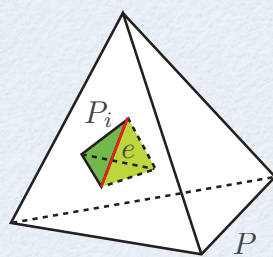
(Type A) e は P のある辺に含まれる:

(Type B) e は P のある面に含まれる:

(Type C) e は P の内部に含まれる.



(Type A)



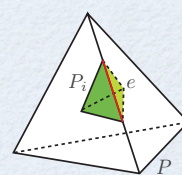
(Type B)

$$(*) \quad \text{Dehn}(P; \Lambda) = \text{Dehn}(P_1; \Lambda) + \cdots + \text{Dehn}(P_n; \Lambda).$$

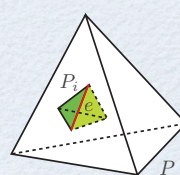
(Type A) e は P のある辺に含まれる:

(Type B) e は P のある面に含まれる:

(Type C) e は P の内部に含まれる.



(Type A)



(Type B)

$$(* \text{の右辺}) = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in \text{Edge}(P_i)} \text{length}(e) \cdot \Lambda(\text{ang}(e)) = \sum_{e: \text{Type A}} + \sum_{e: \text{Type B}} + \sum_{e: \text{Type C}}$$

$$(\text{第1項}) = \text{Dehn}(P; \Lambda)$$

$$(\text{第2項}) = 0 \quad (\because \Lambda(\pi) = 0)$$

$$(\text{第3項}) = 0 \quad (\because \Lambda(2\pi) = 2\Lambda(\pi) = 0)$$

(証明終わり)

■ Dehn の定理の証明

$$(\text{Dehn の定理}) \quad P \asymp Q \implies \text{Dehn}(P; \Lambda) = \text{Dehn}(Q; \Lambda);$$

ただし, $\text{Ang}(P) \cup \text{Ang}(Q) \cup \{\pi\} \subset \Theta$, $\Lambda: V(\Theta) \rightarrow \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ -線形, $\Lambda(\pi) = 0$.

証明. 仮定より, 以下のような多面体 $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$ が存在:

$$P = P_1 + \cdots + P_n, \quad Q = Q_1 + \cdots + Q_n, \quad P_i \equiv Q_i.$$

$\Theta \cup \bigcup_{i=1}^n \text{Ang}(P_i) \cup \bigcup_{i=1}^n \text{Ang}(Q_i) \subset \bar{\Theta} \subset \mathbb{R}$ なる有限集合 $\bar{\Theta}$ をとり, Λ を $\mathbb{Q}$ -線形関数 $\bar{\Lambda}: V(\bar{\Theta}) \rightarrow \mathbb{Q}$ に『拡張』する.

$$\text{このとき, } \text{Dehn}(P; \Lambda) = \text{Dehn}(P; \bar{\Lambda}), \quad \text{Dehn}(Q; \Lambda) = \text{Dehn}(Q; \bar{\Lambda})$$

$$\text{一方, 補題より } \text{Dehn}(P; \bar{\Lambda}) = \sum_{i=1}^n \text{Dehn}(P_i; \bar{\Lambda}), \quad \text{Dehn}(Q; \bar{\Lambda}) = \sum_{i=1}^n \text{Dehn}(Q_i; \bar{\Lambda}).$$

$$\text{そして, } P_i \equiv Q_i \text{ より } \text{Dehn}(P_i; \bar{\Lambda}) = \text{Dehn}(Q_i; \bar{\Lambda}).$$

$$\text{以上から, } \text{Dehn}(P; \Lambda) = \text{Dehn}(Q; \Lambda).$$

(証明終わり)

■ 『普遍』な Dehn 不変量

Dehn 不変量 $\text{Dehn}(P; \Lambda) \in \mathbb{R}$ は, 多面体 P のみならず, Θ や $\Lambda : V(\Theta) \rightarrow \mathbb{Q}$ にも依存.

Θ や Λ を使わずに Dehn 不変量を定義したい.

Dehn 不変量の値域を『複雑化』することにより
これは実現可能:

$$\text{Dehn}(P) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$$

Dehn の定理: $P \asymp Q \implies \text{Dehn}(P) = \text{Dehn}(Q)$