

東京大学玉原国際セミナーハウス
2011年9月17日 - 19日

科学技術振興機構 (JST)
「サイエンス・パートナーシップ・
プロジェクト事業」
群馬県教育委員会高校教育課
東京大学大学院数理科学研究科

平成23年度群馬県高校生数学キャンプ 「対称性と周期性」

1. 9月17日 10:30 - 11:50 (テーマ学習 I)
対称性の記述について
2. 9月17日 13:30 - 14:50 (演習 I)
模様から規則性を見つける
3. 9月17日 15:00 - 16:20 (テーマ学習 II)
平面の17種の模様について
4. 9月17日 16:30 - 17:50 (演習 II)
模様の規則性の記述
5. 9月17日 19:00 - 20:30 (ディスカッション)
6. 9月18日 9:00 - 10:20 (テーマ学習 III)
空間を埋め尽くすブロックについて
7. 9月18日 10:30 - 11:50 (演習 III)
空間における対称性
8. 9月18日 15:00 - 16:20 (演習 IV)
模型製作
9. 9月18日 16:30 - 17:50 (発表準備)
10. 9月18日 19:00 - 20:30 (発表準備)
11. 9月19日 9:00 - 10:20 (発表 I)
12. 9月19日 10:30 - 11:50 (発表 II)

対称性と周期性

1 対称な図形

1.1 対称性

私たちの身の回りにあるものの形を観察すると、さまざまな対称性を発見できる。数学においては、図形を多角形、多面体として表したり、方程式であらわしたりする。良く知っている図形には、次のようなものがある。

- 三角形、4角形、多角形
- 円、楕円、双曲線、放物線
- 立方体、直方体、4面体、8面体、12面体、20面体
- 球面、放物面、楕円面、双曲放物面、1葉双曲面、2葉双曲面

これらのなかには、特別なものがある。

- 正多角形（正三角形、正方形、正5角形、正6角形）
- 正多面体（正4面体、立方体、正8面体、正12面体、正20面体）
- 円、球面

これらを特別と考えたいのは、以下の理由による。

- 同じ個数の頂点をもつ多角形の中では、正多角形が、一番対称性が高い。
- 正多面体は、多面体のなかで対称性が高いものである。
- 円、球面は、曲線のなかで、あるいは曲面のなかで最も対称性が高いと考えられる。

対称とはどういうことといえば良いだろうか。

- 平面の図形の場合、対称である様子には、線対称、ある角度の回転で対称、任意の角度の回転で対称
- 空間の図形の場合、対称である様子には、面对称、ある軸についてのある角度の回転で対称、ある軸について任意の角度の回転で対称、ねじのような対称性などがある。

1.2 合同変換

- 対称性を表すと、考えている図形がある合同変換でそれ自身に写ると言い表すことができる。
- 平面幾何、立体幾何での、合同変換は、図形上の任意の2点の間の距離を変えない全単射写像のことである。等長変換とも呼ばれる。
- 図形 F に対し、

$$I_F = \{f \mid f : F \rightarrow F \text{ は } F \text{ をそれ自身に写す合同変換}\}$$

とおく。

ここで、 $f : F \rightarrow F$ は、写像を表す。 I_F は、写像の集合である (I_F は、この数学キャンプだけで使う記号です)。 I_F は図形 F の等長変換群あるいは合同変換群と呼ばれる。

1.3 I_F の性質

等長変換群あるいは合同変換群という名前はその性質による。

- (0) $f, g \in I_F$ に対して、 $f \circ g \in I_F$.
- (1) $f, g, h \in I_F$ に対して、 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- (2) $e = \text{id}_F$ (F の恒等写像) $\in I_F$ であり、 $f \in I_F$ に対し、 $e \circ f = f = f \circ e$ を満たす。
- (3) $f \in I_F$ に対し、逆写像 $f^{-1} \in I_F$ であり、 $f \circ f^{-1} = e = f^{-1} \circ f$ を満たす。

2 合同変換群

2.1 群

一般にある集合 G が群であるとは、 G に演算という名前の写像

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (f, g) &\mapsto fg \end{aligned}$$

が与えられていて、それが次を満たすことをいう。ここで $G \times G$ は、 G の要素を、2個 (同じでも良い) 順序をつけて並べたものを要素とする集合である。

以下では、集合の要素を集合の元と呼ぶ。

- (1) (結合律)
 $f, g, h \in G$ に対して、 $(fg)h = f(gh)$.
- (2) (単位元の存在)
 $e \in G$ で任意の $g \in G$ に対し、 $eg = g = ge$ を満たすものが存在する。
- (3) (逆元の存在)
 $g \in G$ に対し、 $gg^{-1} = e = g^{-1}g$ を満たす g^{-1} が存在する。

2.2 群 I_F

この群の定義により、図形 F のすべての合同変換からなる集合は、変換の結合に関して群である。

演算は、写像の結合（合成） \circ であるが、 \circ を書かないことにする。

- ほとんどの図形 F に対して、 $I_F = \{\text{id}_F\}$ である。

2.3 演習：長方形

xy 平面上の原点を中心とし、座標軸に平行な辺をもつ長方形 R を考える。 I_R を記述しよう。

- 正方形ではない長方形 R に対し、 I_R は、4 個の元からなる。
- これらは、恒等写像 e と 3 次元空間の x 軸、 y 軸、 z 軸についての 180 度回転 r_x, r_y, r_z である。
- 各元の逆元はそれ自身である。
- すなわち、 $r_x r_x = e, r_y r_y = e, r_z r_z = e$.
- $r_x r_y = r_y r_x = r_z, r_y r_z = r_z r_y = r_x, r_z r_x = r_x r_z = r_y$.
- 演算の表を次のように書くこともある。

	e	r_x	r_y	r_z
e	e	r_x	r_y	r_z
r_x	r_x	e	r_z	r_y
r_y	r_y	r_z	e	r_x
r_z	r_z	r_y	r_x	e

- 将来、行列を習うと、行列で次のように書かれる。

$$r_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, r_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, r_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4 演習：正三角形

重心を原点に、1 つの頂点が y 軸上の点 $(0, y)$ ($y > 0$) であるような正三角形 T について、 I_T を記述しよう。

- 正三角形 T に対し、 I_T は、6 個の元からなる。

- どのような元があるかという、恒等写像 id_T , 原点を中心とする 120 度回転 a , 240 度回転 a^2 , y 軸についての対称移動 r . それと ar, a^2r である。
- ar は、 y 軸についての対称移動 r を行ってから原点を中心とする 120 度回転 a を行うものである。 ar はどのような軸についての対称移動となるか調べよ。 a^2r についても調べよ。
- $a^3 = e, r^2 = e, ra = a^2r$ であり、これにより計算ができる。
- 演算の表を書いてみよ。

	e	a	a^2	r	ar	a^2r
e						
a						
a^2						
r						
ar						
a^2r						

- 正三角形 T の頂点に 1, 2, 3 と番号をつけると、 I_T の元 f は、頂点を頂点に写すので、1, 2, 3 の置換を引き起こす。

置換とは、有限集合からそれ自身への全単射のことである。

それを $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$ のようにあらわす。

- e, a, a^2, r, ar, a^2r を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$ の形で表せ。
- 2つの置換の表示 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ g(1) & g(2) & g(3) \end{pmatrix}$ に対し、 gf, fg はどのように書かれるか。
- 正三角形の場合、頂点の対応が定まると、合同変換が定まる。
- 置換の個数は 1 2 3 の、順列の個数 $3! = 6$ だけある。

2.5 演習：正方形、正多角形

xy 平面上の原点を中心とし、座標軸に平行な辺をもつ正方形 S を考える。 I_S を記述しよう。

- 正方形 S に対し、 I_S は、8 個の元からなる。

- どのような元があるかということ、恒等写像 id_S , 重心を中心とする 90 度回転 a , 180 度回転 a^2 , 270 度回転 a^3 , xy 平面上に、4 つの頂点を軸の上においたときに、 y 軸についての対称移動 r . それと ar, a^2r, a^3r (これらもある軸についての対称移動である).
- $a^4 = e, r^2 = e, ra = a^3r$ であり、これにより計算ができる.
- 正 5 角形、正 6 角形などの正多角形 P の合同変換群 I_P は、どのように記述されるか予想せよ。

3 平面の有界な図形 F の合同変換群

3.1 演習

家紋などの模様 F を見て、合同変換群 I_F を定めよ。

3.2 外接円

- F が有界であるとは、原点を中心とするある半径の円板に含まれることをいう。
- 図形 F を含む最小半径の閉円板 D を考えると、 $I_F \subset I_D$ となる。 \subset は \subseteq と同じ意味で部分集合を表す。
- このような半径最小の閉円板 D は、ただひとつ存在する。
- 半径最小の閉円板 D が、ただひとつ存在することから、 $I_F \subset I_D$ であることがわかる。
- 実際ある合同変換が F を F に写していれば、その変換は F を含む円板を同じ半径の F を含む円板に写すが、半径が最小のものが D だけであるから、 D を D に写す。

以下で「半径最小の閉円板 D が、ただひとつ存在すること」を示すが、そのために実数の性質を使う。

このことを認めて、先に進む方がよい。

- このような半径最小の円板の一意性は、同じ半径の 2 つの異なる円板の共通部分は、より小さい半径の円板に含まれることによる。(円板を正方形に変えると成立しない。)
- 最小の半径の存在は次のような議論による。
- $A = \{r \mid \text{図形 } F \text{ を含む半径 } r \text{ の閉円板が存在する}\}$ とおくと、 A は正の実数の集合で、下限 $r_0 = \inf A$ が存在する。 A の下限 r_0 とは、 A の任意の元 r に対し $r_0 \leq r$ を満たすような実数のなかで最大のものである。

- ここで、実際に半径 r_0 の円板が存在して、 F を含むことを示す必要がある。
- r_0 が下限であることから、任意の正実数 ε に対し、半径 $r + \varepsilon$ (以下) の円板で F を含むものが存在する。
- これにより、任意の自然数 n に対し、中心 p_n , 半径 $r_0 + \frac{1}{n}$ の円板で、 F を含むものがある。
- $\{p_n\}$ は、有界な点列だから、部分列 $\{p_{n_j}\}$ で、収束するものがある。この点列の極限を $\lim_{j \rightarrow \infty} p_{n_j} = p_\infty$ とする。
- このとき、 p_∞ を中心とする半径 $r_0 + \frac{1}{n_j} + \|p_{n_j} - p_\infty\|$ の円板は F を含む。
- $j \rightarrow \infty$ のとき、 $r_0 + \frac{1}{n_j} + \|p_{n_j} - p_\infty\| \rightarrow 0$ だから、 F は、それらの共通部分である p_∞ を中心とする半径 r_0 の円板に含まれる。

3.3 円板 D の合同変換群

単位閉円板 D の合同変換群 I_D は、中心の周りの回転と中心を通る軸についての対称移動からなる。

このことを認めて、先に進む方がよい。

理由は例えば以下のように述べられる。単位閉円板 D の中心を原点に取る。

- I_D の元 f は、円周を円周に写し、 D の中心である原点 O を動かさない。
 - なぜなら、円周の点 P に対し、直径 PQ をとることができる。 $f(P)f(Q)$ は D の2点で距離が2であるから、 $f(P)f(Q)$ は D の直径であり、 $f(P)$ は円周の点である。
 - 原点 O に対し、 $f(O)$ が O と異なるとする。 O と $f(O)$ を結ぶ直線と円周の交点を考えると、 $f(O)$ と円周の1点 Q との距離が1と異なる。 O と円周の距離は1であるから、 $f^{-1}(Q)$ は円周上の点だから O と $f^{-1}(Q)$ の距離は1で、 f が距離を保つことに反する。
- D の境界上に異なる2点を取り、 P, Q とする。 I_D の元 f に対し、 $f(P), f(Q)$ を考えると、三角形 $O f(P) f(Q)$ は、三角形 OPQ と合同であり、従って原点の周りの回転または原点を通る軸についての対称移動 g で、 $g(f(P)) = P, g(f(Q)) = Q$ を満たすものがある。
- gf は、 O, P, Q を固定する D の合同変換である。 D の点は、 O, P, Q への距離により一意的に定まるから、 gf は恒等写像である。
- 従って、 $f = g^{-1}$ は、原点の周りの回転または原点を通る軸についての対称移動である。

3.4 $O(2)$, $SO(2)$

- 三角関数を使って行列で書けば、原点の周りの θ (ラジアン) の回転は、
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$
 で表される。また、 x 軸と原点において角度 θ をなす直線を軸とする対称移動は
$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$
 となる。

- 絶対値が 1 の複素数倍することが原点を中心とする回転となることを用いて書くと、原点の周りの θ (ラジアン) の回転は、

$$z = x + yi \mapsto (\cos \theta + i \sin \theta)z = (x \cos \theta - y \sin \theta) + (x \sin \theta + y \cos \theta)i$$

とあらわされ、 x 軸と原点において角度 θ をなす直線を軸とする対称移動は

$$z = x + yi \mapsto (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)\bar{z} = (x \cos 2\theta + y \sin 2\theta) + (x \sin 2\theta - y \cos 2\theta)i$$

とあらわされる。

- 円板 D の合同変換群 I_D は通常、行列の群として

$$O(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid {}^tAA = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

と書かれる。ここで、

$${}^tA = {}^t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

は A の転置行列と呼ばれ、

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

となるから、 ${}^tAA = I$ は、ベクトル (a, b) , (c, d) の長さが 1 で、直交していることを表しており、三角関数で書くと前に書いたように書かれる。

- この時、回転全体のなす群は、 $SO(2)$ と書かれる。

$$SO(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2) \mid \det A = ad - bc = 1 \right\}$$

3.5 平面の有界な図形 F の合同変換群

平面の有界な図形 F の合同変換群 I_F を考えると、前に述べたように I_F は $I_D = O(2)$ の部分集合で群である。そのことを部分群であるという。

円や円板の合同変換群は、 $O(2)$ であるが、“同心円”を除いて、平面の有界な図形 F の合同変換群 I_F は $O(2)$ の有限部分群となる。

このことを示すためには、 I_F が無限部分群であれば、 $O(2)$ 、 $SO(2)$ と一致することを示す必要があるが、ここでは、割愛する。

$O(2)$ の有限部分群 G は、 m 次巡回群 C_m および位数 $2m$ の 2 面体群 D_{2m} であることがわかる。

ここで、 C_m は、 $\frac{2\pi k}{m}$ (ラジアン) 回転 ($\frac{k \times 360^\circ}{m}$ 回転) ($k = 0, 1, \dots, m-1$) からなる群である。

また、 D_{2m} は、正 m 角形の合同変換の群で、 C_m の元および中心と頂点または辺の中点を結ぶ直線を軸とする対称移動 (m 通り) の全部で $2m$ 個の元からなる。

これを $O(2)$ の有限部分群の分類という。

以下で、分類を示すが、これを認めて先に進む方が良い。

$O(2)$ の有限部分群の分類は以下のように行う。 $SO(2)$ の有限部分群は、ある自然数 m に対し、 C_m に一致することを示す。

- $SO(2)$ の有限部分群 $G = \{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ に対し、 $g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (単位元) とし、各元 g_k , ($k = 1, \dots, n$) に対し、 g_k は、 θ_k ラジアン of 回転であるとする。ここで、 θ_k は、正で最小の実数として取る。
- これらを大きさの順に並べ、 $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$ とする。
- $\{\theta_1, 2\theta_1, \dots, n\theta_1\}$ と $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ について、 G は群だから、

$$\{\theta_1, 2\theta_1, \dots, n\theta_1\} \subset \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$$

であるが、逆向きの包含関係

$$\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\} \subset \{\theta_1, 2\theta_1, \dots, n\theta_1\}$$

が成立する。

- 実際、これが成立しなければ、 $(k-1)\theta_1 < \theta_\ell < k\theta_1$ となる k, ℓ が存在するが、 $\theta_\ell - (k-1)\theta_1$ 回転は $g_\ell(g_1^{-1})^{k-1} \in G$ であるから、 θ_1 が最小であることに反する。従って、

$$\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\} = \{\theta_1, 2\theta_1, \dots, n\theta_1\}$$

がわかった。

- $k\theta_1 < 2\pi$ であるような $k\theta_1$ は $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ に含まれている。従って、

$$\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\} = \{k\theta_1 \mid k\theta_1 < 2\pi\}$$

- ここで、 $(n+1)\theta_1 = 2\pi$ である。
なぜならば、
- $(n+1)\theta_1 < 2\pi$ ならば、 $(n+1)\theta_1 \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ であつたはずで元の個数が $n+1$ 個にならない。

- $(n + 1)\theta_1 > 2\pi$ ならば、 $n\theta < 2\pi$ だったから、 $(n + 1)\theta_1 < 2\pi + \theta_1$ であり、 $(n + 1)\theta_1 - 2\pi$ の回転が g_1^{n+1} として、 G に含まれ、 θ_1 の最小性に反する。

平面の有界な図形 F の合同変換群は、一般には、 $O(2)$ の有限部分群であるから、以下のように考える。

- $O(2)$ の有限部分群 G が与えられたとする。
- $G \subset SO(2)$ ならば、ある自然数 m に対し、 $G \cong C_m$ である。
- $G \not\subset SO(2)$ とすると、 $G \cap SO(2)$ は群となる。
- 従って、前節の結果によって、ある自然数 m に対し、 $G \cap SO(2) \cong C_m$ である。
- $B \in G \cap (O(2) \setminus SO(2))$ をとることができる。ここで、 \setminus は、集合の差を表す記号である。つまり、 B は、 G の元であり、かつ $SO(2)$ に属さない $O(2)$ の元である。 B は、原点を通るある直線を軸とする対称移動である。
- $A \in C_m$ に対し、 $AB \in G \cap (O(2) \setminus SO(2))$ であり、 $B_1, B_2 \in G \cap (O(2) \setminus SO(2))$ に対し、 $B_1 B_2^{-1} \in C_m$ である。
- 従って、 $B \in G \cap (O(2) \setminus SO(2))$ を一つとると、

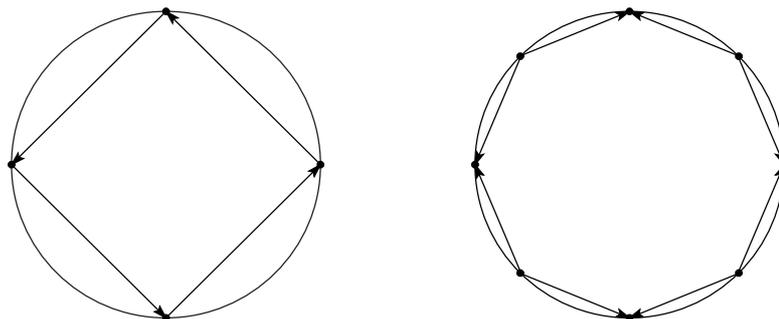
$$G \cap (O(2) \setminus SO(2)) = \{AB \mid A \in C_m\}$$

となる。

- この群は、 A_1 を $\frac{2\pi}{m}$ (ラジアン) 回転 ($\frac{360^\circ}{m}$ 回転) として、 $A_1^m = e$, $B \notin C_m = \{e, A_1, \dots, A_1^{m-1}\}$, $B^2 = 1$, $BA_1B^{-1} = A_1^{-1}$ によって定まっている。
- $A_1^{2k}B = A_1^kBA_1^{-k}$ は B の軸を $\frac{2k\pi}{m}$ (ラジアン) 回転 ($\frac{k \times 360^\circ}{m}$ 回転) した軸についての対称移動である。
- 従って、 G は D_{2m} となる。

4 円周への作用

- このごちゃごちゃした議論よりも、概念的ですっきりした証明が存在する。
- C_m は、 m 個の点を順に前向き矢印でつなぎ、最後の点を最初の点につないで得られる (抽象的な) 向きのついた m 辺形の合同変換群とする。



- D_{2m} は、 $2m$ 個の点を 1 つおきに前向き、後ろ向きの矢印でつなぎ最後の点を最初の点に後ろ向きの矢印でつないで得られる、辺に向きのついた (抽象的な) $2m$ 辺形の合同変換群とする。
- とともに円周と同相な図形である。
- この図形の 1 つの矢印を、任意の矢印に写す移動を考えると、円周上の回転移動または対称移動に対応している。
- 合同変換群で写りあう点をまとめると、 C_m の場合は、1 つの矢印の起点と終点をつないだ円周になるが、 D_{2m} の場合は、1 つの矢印になる。



- 合同変換群で写りあう点をまとめようとする、 C_m の場合には、常に m 個の異なる点をまとめていて、その結果、まとめたものは円周になる。 D_{2m} の場合には、 $2m$ 個の異なる点をまとめた点が、矢印の起点と終点以外の点になり、対称移動で固定されて m 個の異なる点にしかならない場合に起点あるいは終点となる。つまり、合同変換群の中に単位元以外に固定する元があるときに、直線を折り返すことにより端点が現れる。
- 直線の原点を固定する直線の合同変換は、恒等写像か -1 倍の写像 (対称移動) である。

このことから、有限個の元からなる円周の合同変換群が与えられると、この合同変換群で写りあう点をまとめると、対称移動が存在していなければ円になり、対称移動が存在していれば線分になることがわかる。

5 群の作用

群 G が、図形 F に作用することを次で定義する。

- 群 G の図形 F への作用とは、(連続) 写像

$$\begin{aligned} G \times F &\longrightarrow F \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

で、 $e \cdot x = x$, $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ をみたすもののことをいう。

- 任意の x に対し $g \cdot x = x$ となれば、 $g = e$ のときに、効果的な作用とよぶ。これは、 G が F の変換群 (同相写像の群) としてあらわされることと同じである。
- $x \in F$ に対し、 $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ を x の軌道とよぶ。

- 同じ軌道にあるという関係 \sim は同値関係である。
- すなわち、

$$\begin{aligned} x &\sim x \\ x \sim y &\implies y \sim x \\ (x \sim y) \text{ かつ } (y \sim z) &\implies x \sim z \end{aligned}$$

をみたす。

- 軌道の空間を F/G であらわす。
- 群 G が図形 F に作用しているとき、 $x \in F$ の等方群 (isotropy subgroup) を

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

で定義する。

- おなじ G 軌道上の点の等方群は同型である。
- F/G の点 $[x] = G \cdot x$ の近傍は、代表元 x の近傍への G_x の作用の軌道の空間の形をしている。

5.1 円周への等長作用

長さを変えない作用を等長作用、長さを変えない変換を等長変換と呼ぶ。等長変換と合同変換は同じものである。

- 円周への等長作用の円周の 1 点 x の等方群は、 $\{e\}$ または C_2 に同型である。
- ここで C_2 は、直線の原点の近傍における -1 倍の作用で生成される。
- 従って、円周 S^1 への有限群 G の作用に対し、軌道の空間 S^1/G は、円周または線分となる。
- 軌道の空間 S^1/G が円周となる場合、 $G \cong C_m$ 、
軌道の空間 S^1/G が線分となる場合、 $G \cong D_{2m}$ である。
ここで、 \cong は、群として同じ形をしていることを示す。

5.2 2つの応用

最初の応用は、円周への作用を、その円周を境界とする円板に作用させたものである。

- 円板 D^2 への有限合同変換群 G の作用の軌道の空間は次のものである。
 - $G \cong C_m$ のとき、 D^2/C_m は角度 (頂周角) $\frac{2\pi}{m}$ (ラジアン) $(\frac{360^\circ}{m})$ の円錐。
 - $G \cong D_{2m}$ のとき、 D^2/D_{2m} は頂角 $\frac{\pi}{m}$ (ラジアン) $(\frac{180^\circ}{m})$ の扇型。

2 番目の応用は、円周上の矢印を、直線上の矢印に置き換えたものである。

- 数直線 \mathbf{R} への合同変換群 G の作用で、 \mathbf{R}/G が、1 次元の図形 (多角形) になるならば、次の 2 つの場合がおきる。

- G は、ひとつの平行移動 t により生成される群 $C_\infty = \mathbf{Z}$ に同型である。

$$\dots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \dots$$

\mathbf{R}/C_∞ は円周と同相である。

- G は、2 つの対称移動 r_0, r_1 により生成される群 $C_2 * C_2 \cong \mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}_2$ に同型である。

$$\dots \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \dots$$

$\mathbf{R}/(C_2 * C_2)$ は線分と同相である。

6 周期性のある文様と 2 次元結晶群

6.1 演習

エッシャー (M.C. Escher 1898–1972) の絵や周期性のある文様をみて、その文様を作り出すための最小の型紙を文様の中に見つけよ。

エッシャーの対称性、周期性のある絵は、<http://www.mcescher.com/> の Picture Gallery, Symmetry; most of M.C. Eschers' Symmetry Drawings で見ることができる。

6.2 平面の合同変換

- 平面の合同変換は、1 つの三角形 ABC をそれと合同な三角形 $A'B'C'$ に写す写像として定まる。あるいは、有向線分 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ で定まる座標を、そのまま有向線分 $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ で定まる座標に写す写像である。

- 三角形 $A'B'C'$ を平行移動して、 $A''B''C''$ に写し、 $A = A''$ とすることができる。 $A''B''C''$ は、 A を中心とする回転あるいは A を通る直線を軸とする対称移動で、 ABC に写すことができる。

- A を原点とすると、三角形 ABC を三角形 $A'B'C'$ に写す合同変換は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, A \in O(2) \text{ と書かれる。}$$

ここで、 A は、 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ の形をしている。

6.3 2次元結晶群

- 2次元結晶群は周期性を持つ模様を記述するために以下のように定義される。
- 2次元の結晶群とは、ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 への合同変換群 G で、 G が、2つの方向への平行移動を含み、 \mathbb{R}^2/G が、2次元の図形(多面体)になるものである。
- 2次元結晶群は17種類ある。(群として、この17個の群のどれかと同型になる。)
- それらを分類するには、 \mathbb{R}^2/G を分類すればよい。
- $x \in \mathbb{R}^2$ に対し、 $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ とする。 G_x は次のいずれかに同型である。
 - $\{e\}$
 - C_2 (点対称), C_3, C_4, C_6
 - D_2 (線対称), D_4, D_6, D_{12}
- 従って $[x] \in \mathbb{R}^2/G$ の近傍は、次のいずれかに同型である。
 - 平面の原点
 - 角度 π (ラジアン) (180°), $\frac{2\pi}{3}$ (ラジアン) (120°), $\frac{\pi}{2}$ (ラジアン) (90°), $\frac{\pi}{3}$ (ラジアン) (60°) の円錐の頂点。
 - 半空間の $\{(x, y) \mid x \leq 0\}$ の原点、角度 $\frac{\pi}{2}$ (ラジアン) (90°), $\frac{\pi}{3}$ (ラジアン) (60°), $\frac{\pi}{4}$ (ラジアン) (45°), $\frac{\pi}{6}$ (ラジアン) (30°) の扇型の頂点。
- G_x が上のものに限られるのは次の理由による。(大学で線形代数を学べば、わかるようになるので、認めて進む方がよい)。
 - G_x という群が、 C_m あるいは D_{2m} の形をしていることは、 G_x の x の近傍への作用による軌道空間が2次元の図形 \mathbb{R}^2/G の一部に表れていることと同じことである。
 - C_m あるいは D_{2m} の m の値が制限される理由を以下に述べる。
 - G に含まれる平行移動の全体 T を考える。 T は G の部分群であり、 $g \in G$ に対し、 $\{gtg^{-1} \mid t \in T\} = T$ を満たす。
 - 実際、 $g \in G$ を $g \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ の形に書くとき、 $g \in T$ であるとは、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となること、すなわち $g \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ である。

一般に g が $g \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ で表されるとき、

$$g^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

であり、 $t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ に対し、

$$\begin{aligned} (gtg^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (gt) \cdot \left(A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= g \cdot \left(A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= A \left(A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

– G は 2 つの方向の平行移動を含むと仮定しているので、 T の元を表すベクトルの全体は、平面の格子をなしている。それらは、2 つのベクトル $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$ と整数 m, n で $m \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$ の形に書かれる。

– $g \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ と表される g に対し、

$$\left\{ A \left(m \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} \right) \mid m, n \in \mathbf{Z} \right\} = \left\{ m \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbf{Z} \right\}$$

– $A \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$ (ここで、 a, b, c, d は整数) とすると、

$$A \begin{pmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

となる。すなわち、 $\begin{pmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{pmatrix}$ の逆行列 $\begin{pmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{pmatrix}^{-1}$ を使えば、

$$\begin{pmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

となる。

- ここで、 A の $(1, 1)$ 成分と $(2, 2)$ 成分の和は、 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の $(1, 1)$ 成分と $(2, 2)$ 成分の和である $a + d$ に等しい。
- 一般の $n \times n$ 行列で、 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ に対し、 $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ という量を考える。トレース (trace) と呼ぶ。2つの行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ に対し、行列の積は $AB = (\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk})_{i,k=1,\dots,n}$ のように定義されているから、 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ である。実際、

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ji}a_{ij} = \text{Tr}(BA)$$

である。

- 従って、

$$\text{Tr}\left(\begin{pmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{pmatrix}\right) = \text{Tr}\left(\begin{pmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{pmatrix}^{-1} A\right) = \text{Tr}(A)$$

- だから、 $\text{Tr}(A)$ は、整数値をとることがわかったが、 A は、 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ の形だから、 $\text{Tr}(A)$ の取りうる値は、 $-2, -1, 0, 1, 2$ である。
- G_x という群が、 C_m の形であれば、 $\cos \theta$ の値は $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ であり、 $\theta = \pi, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{3}, 0$ ($180^\circ, \pm 120^\circ, \pm 90^\circ, \pm 60^\circ, 0^\circ$) となる。このような回転を含む C_m は、 $m = 2, 3, 4, 6$ である。
- G_x という群が、 D_{2m} の形であれば、それに含まれる C_m は、 $m = 2, 3, 4, 6$ であり、単純な折り返し D_2 以外のものは、 D_4, D_6, D_8, D_{12} になる。

7 2次元オービフォールド

7.1 オービフォールド

- \mathbb{R}^2/G は、2次元平坦オービフォールドとよばれる図形である。
- 2次元平坦オービフォールドは、その各点の近傍が、平面の一部、半平面の一部、 n を自然数として角度 $\frac{2\pi}{n}$ (ラジアン) $\frac{360^\circ}{n}$ の円錐、 n を自然数として角度 $\frac{\pi}{n}$ (ラジアン) $\frac{180^\circ}{n}$ の扇型からなるものである。
(折り紙でできる図形というように考えるとよい)。

- 辺（さらには扇型の頂点）を持つ2次元平坦オービフォールドに対して、そのダブルと呼ばれる対称な図形を貼り合わせて得られる辺を持たない（円錐の頂点は持ちうる）2次元平坦オービフォールドが、構成される。
- 辺（つまり境界）を持たない（円錐の頂点は持ちうる）2次元平坦オービフォールドを分類すれば、その対称線を探して、半分にすれば、辺を持つ2次元平坦オービフォールドも分類される。
- 辺を持たない（円錐の頂点は持ちうる）2次元平坦オービフォールドは、 T^2 , $K1$, $RP^2(2, 2)$, $S^2(2, 3, 6)$, $S^2(2, 4, 4)$, $S^2(3, 3, 3)$, $S^2(2, 2, 2, 2)$ の7種である。ここで、 T^2 , $K1$, RP^2 , S^2 は、それぞれ、トーラス、クラインの壺、射影平面、球面を表し、 (n_1, n_2) , (n_1, n_2, n_3) , (n_1, n_2, n_3, n_4) は、角度が $\frac{2\pi}{n_1}, \dots$ の円錐の頂点を持つことを表す。
- 辺を持たない2次元平坦オービフォールドが7種類であることは、2次元平坦オービフォールドのポアンカレ・オイラー標数がゼロであることから導かれる。

7.2 閉曲面

- 辺（境界）を持たない（円錐の頂点は持ちうる）2次元平坦オービフォールドは、円錐の頂点も円板と同相な近傍を持つから、位相的には閉曲面である。
- 閉曲面は、向き付け（裏表）を持つかどうかと、その曲面のオイラー数で分類される。
- 閉曲面 S のオイラー数 $\chi(S)$ は、閉曲面を三角形に分割したときに、
（頂点の個数） - （辺の個数） + （面の個数）
により定義される。
- 向き付けを持つ閉曲面のオイラー数は、 $2, 0, -2, -4, \dots$ の値を持ち、これらのオイラー数の曲面は順に、球面 S^2 、トーラス T^2 、種数2の向き付けを持つ閉曲面、種数3の向き付けを持つ閉曲面、...である。
- 向き付けを持たない閉曲面のオイラー数は、 $1, 0, -1, -2, \dots$ の値を持ち、これらのオイラー数の曲面は順に、射影平面 RP^2 、クラインボトル $K1$ 、種数3の向き付けを持たない閉曲面、種数4の向き付けを持たない閉曲面、...である。
- 分岐を持たない k 重の被覆写像 $S_k \rightarrow S_1$ に対し、 $\chi(S_k) = k \chi(S_1)$ である。

7.3 2次元平坦オービフォールドのオイラー数

- 辺（境界）を持たない（円錐の頂点は持ちうる）2次元平坦オービフォールドに対しては、その間の分岐被覆を考えるのが自然である。

- 分岐被覆とは、局所的には円板に回転として作用する m 次巡回群の作用による円板から円錐面への写像を許したものである。
- 境界を持たない2次元平坦オービフォールドは、位相的には閉曲面 S に有限個の錘点 p_1, \dots, p_k があって、それぞれの点は $\frac{2\pi}{n_1}, \dots, \frac{2\pi}{n_k}$ の角度になっていると記述される ($n_1 \geq 2, \dots, n_k \geq 2$)。そのような2次元平坦オービフォールドを $S(n_1, \dots, n_k)$ と表す。

境界を持たない2次元平坦オービフォールド $S(n_1, \dots, n_k)$ のオイラー数 $\chi(S(n_1, \dots, n_k))$ を定義しよう。

- 錘点が頂点になるように三角形分割すると、角度が $\frac{2\pi}{n}$ の錘点の頂点は、 n 重に分岐被覆したときに1個と数えるべきものであるから、 $\frac{1}{n}$ 個と数えるべきものである。
- そこで、境界を持たない2次元平坦オービフォールド $S(n_1, \dots, n_k)$ のオイラー数 $\chi(S(n_1, \dots, n_k))$ を

$$\begin{aligned}\chi(S(n_1, \dots, n_k)) &= \chi(S) - \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) - \dots - \left(1 - \frac{1}{n_k}\right) \\ &= \chi(S) - k + \left(\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_k}\right)\end{aligned}$$

で定義する。

- このように定義すると、分岐 m 重被覆写像 $S_m(n_1, \dots, n_k) \rightarrow S_1(n'_1, \dots, n'_{k'})$ に対し、

$$\chi(S_m(n_1, \dots, n_k)) = m \chi(S_1(n'_1, \dots, n'_{k'}))$$

である。

- 平坦オービフォールドに対しては、適当に分岐被覆をとると、2次元トーラスになり、 $\chi(S(n_1, \dots, n_k)) = 0$ を満たさなければならない。
- 従って、平坦オービフォールドを分類するには、

$$\chi(S) - k + \left(\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_k}\right) = 0$$

を満たす $S(n_1, \dots, n_k)$ を分類すればよい。

7.4 2次元平坦オービフォールドの分類

- まず、

$$\chi(S) = \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n_k}\right) \geq 0$$

で、等号は、 $k = 0$ のときであり、その時には $S = T^2$ または $S = \text{Kl}$ である。

- 不等号の場合、 $\chi(S) = 1$ または $\chi(S) = 2$ であり、 $\chi(S) = 1$ ならば $S = \mathbf{R}P^2$ であり、 $\chi(S) = 2$ ならば $S = S^2$ である。
- $\left(1 - \frac{1}{n_1}\right) \geq \frac{1}{2}$ だから、 $k \leq 2\chi(S)$ である。
- $\chi(S) = 1$ のとき、
 $k = 1$ とすると、 $1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ となる正整数 n は存在しない。
 $k = 2$ とすると、 $1 = \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{n_2}\right)$ となるのは、 $n_1 = n_2 = 2$ のときである。
- $\chi(S) = 2$ のとき、
 $k = 1$ とすると、 $2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ となる正整数 n は存在しない。
 $k = 2$ とすると、 $2 = \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{n_2}\right)$ となる正整数 n_1, n_2 は存在しない。
 $k = 3$ とすると、 $2 = \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{n_2}\right) + \left(1 - \frac{1}{n_3}\right)$ 、すなわち、 $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1$ となる正整数 n_1, n_2, n_3 を $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ として求めて、 $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$ が得られる。
 $k = 4$ とすると、 $2 = \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{n_2}\right) + \left(1 - \frac{1}{n_3}\right) + \left(1 - \frac{1}{n_4}\right)$ となるのは、 $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$ のときである。
- これで、求める 2 次元平坦オービフォールドは、 $T^2, \mathbf{K}l, \mathbf{R}P^2(2, 2), S^2(2, 3, 6), S^2(2, 4, 4), S^2(3, 3, 3), S^2(2, 2, 2, 2)$ の 7 種であることがわかった。
- 境界を持つ 2 次元平坦オービフォールドを分類するには、上に得られた 7 種のオービフォールドがどのような線対称の軸を持つかを考察する。
- T^2 は 1 通り、 $\mathbf{K}l$ は 1 通り、 $\mathbf{R}P^2(2, 2)$ は軸を持たない、 $S^2(2, 3, 6)$ は 1 通り、 $S^2(2, 4, 4)$ は 2 通り、 $S^2(3, 3, 3)$ は 2 通り、 $S^2(2, 2, 2, 2)$ は 3 通りの軸を持つ。
- 従って、境界を持つ平坦オービフォールドは 10 種ある。

次の図は、17 種の 2 次元平坦オービフォールドの間の分岐被覆の関係を表したものである。

8 3次元の結晶群

3次元結晶群にも分類の結果はあるが、説明も易しくない。219通りあり、鏡像を区別すると230通りあることは、19世紀の終わりごろには証明されていた。前の節で述べたような分類の方法は、Thurstonという数学者によるもので、3次元の場合の論文は2001年に出されている。John H. Conway, Olaf Delgado Friedrichs, Daniel H. Huson, William P. Thurstonの共著として、「On Three-Dimensional Space Groups」という題名でContributions to Algebra and Geometry, Volume 42 (2001), No. 2, 475–507に出版されている。（「On Three-Dimensional Space Groups」で検索して論文を読むことができる。）

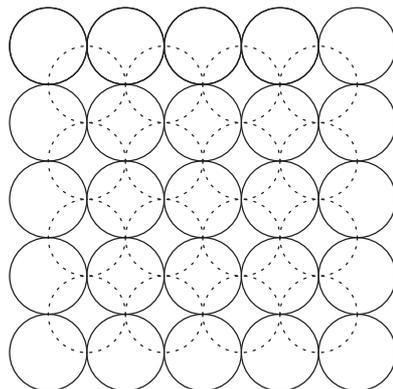
3次元の対象を扱うこと自体、容易ではないので、いくつかの典型的な結晶を理解することを目標にする。

8.1 演習：格子の作成

- 立方体を積み上げたような格子を、ゾムツールで作成してみよ。
- 頂点が $4 \times 4 \times 4$ の格子を組んで、その頂点のなす正多角形には、どのようなものがあるか観察せよ。
- 1つの頂点から、それを中心とする正8面体の頂点の位置に新しい頂点をつくり、この操作を繰り返して得られる格子を作成してみよ。
この格子と、最初に作った格子の形と関係があるか観察せよ。
- 1つの頂点から、それを中心とする正4面体の頂点の位置に新しい頂点をつくり、この操作を繰り返して得られる格子を作成してみよ。

8.2 演習：ビー玉による空間の充填1

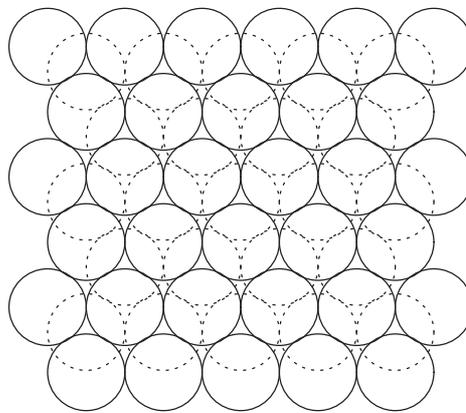
- 次のようにビー玉を充填する。
- 第1層に正方形の格子を作るように並べ（図の実線）、第2層に第1層の正方形の中心をなす格子を作るように並べる（図の点線）。第3層は第1層と同じように並べる。



- このように充填していったときに、1個のビー玉には、いくつのビー玉が接しているか調べよ。
- 1個のビー玉に接しているビー玉の位置関係を表現してみよ。

8.3 演習：ビー玉による空間の充填2

- 次のようにビー玉を充填する。
- 第1層に正三角形の格子を作るように並べ（図の実線）、第2層に第1層の1つの正三角形の中心を含む格子を作るように並べる（図の点線）。第3層の並べ方に2通りあることを観察せよ。



- このように充填していったときに、1個のビー玉には、いくつのビー玉が接しているか調べよ。
- 1個のビー玉に接しているビー玉の位置関係を表現してみよ。

8.4 基本領域

- 3次元の結晶群も3次元空間に群 G が作用していると表現できる。このような群の作用あるいは軌道の空間を考える際には、基本領域と呼ばれる集合を考えると都合が良いこともある。
- 基本領域とは、3次元空間の部分集合 P で、3次元空間の任意の点は、群 G のある元 g の作用により、 P に写すことができ、 P の境界（表面）の点は以外では g は一意的であるというものである。
- つまり、任意の点 $x \in \mathbb{R}^3$ に対し、ある元 $g \in G$ で、 $g \cdot x \in P$ となるものが存在し、 P の内部の点 x に対しては、 e と異なる元 $g \in G$ に対し、 $g \cdot x \notin P$ となるようなものである。
- これだけの条件であれば、基本領域は多面体にもならないものをとることもできる。

8.5 ディリクレ基本領域

- 合同変換群の作用を考えているので、ディリクレ基本領域というものをとることができる。
- 点 x に対し、 $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ であったが、 $G_x = \{e\}$ となる x をとる。このとき、

$$D_x = \{y \in \mathbf{R}^3 \mid \forall g \in G, \|y - x\| \leq \|y - g \cdot x\|\}$$

と定める。すなわち x と $g \cdot x$ の垂直 2 等分面をとり、それがわける半空間のうち x を含むものの共通部分とする。

- ディリクレ基本領域 D_x は、 x の取り方に依存して決まっているが、常に凸多面体である。
- ディリクレ基本領域 D_x は、 G が平行移動だけからなる群の場合は、 x の取り方によらず定まる。
- 結晶のモデルの作り方から、 x が原子のある点として指定され、その原子が支配している領域として D_x を考えることも多い。

8.6 演習：平面の 2 つの方向の平行移動のディリクレ基本領域

- 平面上で 2 つのベクトル \vec{a}, \vec{b} により得られる格子 $\{\ell\vec{a} + m\vec{b} \mid \ell, m \in \mathbf{Z}\}$ を考える。この集合に含まれるベクトルの平行移動からなる合同変換群と考えているといっても良い。
- 基本領域としては、 \vec{a}, \vec{b} を 2 辺とする平行四辺形がある。しかし、これは長方形となる場合を除いてディリクレ基本領域ではない。
- この場合、 x のディリクレ基本領域は、長方形か円に内接する平行 6 角形になる。
- ベクトル $\ell\vec{a} + m\vec{b}$ ($(\ell, m) \neq (0, 0)$) のうち、その大きさ $\|\ell\vec{a} + m\vec{b}\|$ が最も小さいものを $\pm(\ell_0\vec{a} + m_0\vec{b})$ とする。 $\ell_0\vec{a} + m_0\vec{b}$ の整数倍ではない $\ell\vec{a} + m\vec{b}$ の形のベクトルのうち、その大きさが最も小さいものを $\pm(\ell_1\vec{a} + m_1\vec{b})$ とする。
- $\ell_0\vec{a} + m_0\vec{b}, \ell_1\vec{a} + m_1\vec{b}$ が直交しているときは、 $\vec{0}, \pm(\ell_0\vec{a} + m_0\vec{b})$ を結ぶ線分の垂直 2 等分線および $\vec{0}, \pm(\ell_1\vec{a} + m_1\vec{b})$ を結ぶ線分の垂直 2 等分線で定まる長方形が、原点 $\vec{0}$ のディリクレ基本領域である。
- $\ell_0\vec{a} + m_0\vec{b}, \ell_1\vec{a} + m_1\vec{b}$ が直交していないときは、 $(\ell_1 \pm \ell_0)\vec{a} + (m_1 \pm m_0)\vec{b}$ の土の一方が、 $\ell_0\vec{a} + m_0\vec{b}$ の整数倍ではない $\ell\vec{a} + m\vec{b}$ の形のベクトルのうち、その大きさが 2 番目に小さいものとなる。それが $\ell_2\vec{a} + m_2\vec{b}$ であるとする。 $\vec{0}, \pm(\ell_0\vec{a} + m_0\vec{b})$ を結ぶ線分の垂直 2 等分線、 $\vec{0}, \pm(\ell_1\vec{a} + m_1\vec{b})$ を結ぶ線分の垂直 2 等分線、 $\vec{0}, \pm(\ell_2\vec{a} + m_2\vec{b})$ を結ぶ線分の垂直 2 等分線が 6 角形を定める。これが、原点 $\vec{0}$ のディ

リクレ基本領域である。六角形の頂点は、 \pm をうまくとると、 $\vec{0}$, $\pm(\ell_0\vec{a} + m_0\vec{b})$, $\pm(\ell_1\vec{a} + m_1\vec{b})$ などを頂点とする三角形の外心であるから、この六角形は円に内接する。

- このようにしてできる基本領域のうち、特に対称性が高いものが、正方形と正六角形である。

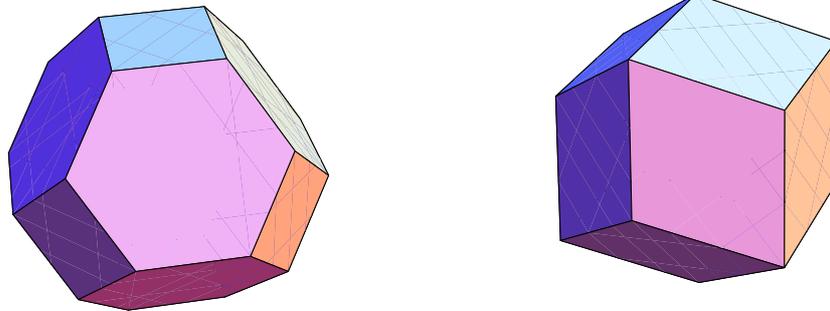
8.7 空間の3つの方向の平行移動のディリクレ基本領域

- 3次元空間内で3つのベクトル \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} により得られる格子 $\{\ell\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} \mid \ell, m, n \in \mathbb{Z}\}$ を考える。
- この集合に含まれるベクトルの平行移動からなる合同変換群を考えているとしても良い。
- このとき \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を辺とする平行六面体は、基本領域であるが、これは、直方体となる場合を除いて、ディリクレ基本領域ではない。
- このときのディリクレ基本領域は、あまり易しくない。多くの場合、六角形8個と四角形6個の14面体になる。
- この14面体の大まかな形は、正八面体から、それぞれの頂点の四角錐を取り除いた形である。
- ここで得られるディリクレ領域の中で対称性が高いものとして次のものがあげられる。
 - 立方体、
 - 切頂八面体
(正八面体からそれぞれの頂点の四角錐を除き、正方形と正六角形の面を持つようにしたもの)
 - 菱形12面体
(立方体の各対面の重心を結ぶ直線上にある6個の頂点と立方体の頂点を頂点とする各面が菱形の図形)

8.8 演習：基本領域の作成と基本領域による空間の充填

- 5つの正多面体、正四面体、立方体、正八面体、正十二面体、正二十面体のうちで、1つだけを使って隙間なく空間を充填できるものは、立方体だけであることを示せ。
- 正四面体と正八面体の両方を使って空間を充填してみよ。
必要ならポリドロンで正四面体と正八面体をいくつか作って組み立てよ。

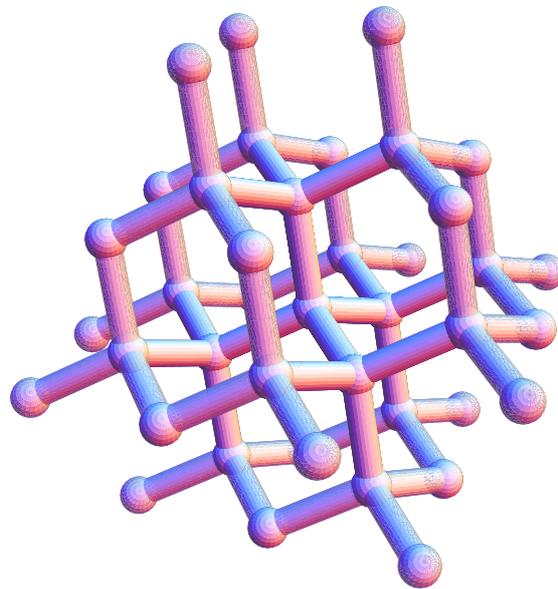
- 切頂 8 面体および菱形 12 面体は以下の図のものである。



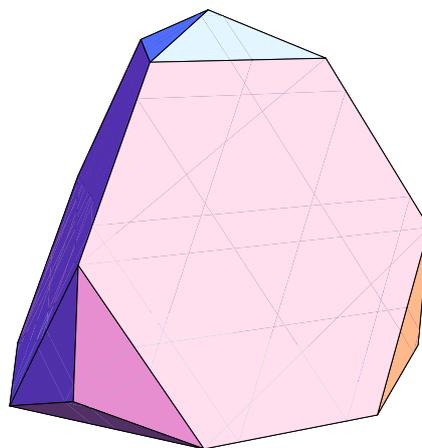
- 切頂 8 面体および菱形 12 面体の展開図を描け。
面の形の定規を作って描くとよい。
- 切頂 8 面体および菱形 12 面体の展開図から、切頂 8 面体および菱形 12 面体をいくつか作り、空間を充填することを確認せよ。
- 菱形 12 面体を正 6 角形で、ちょうど半分の部分に分け、正 6 角形に沿って、60 度回転して貼り付けた図形を考える。
この展開図をつくり、この図形も空間を充填することを確認せよ。

8.9 演習：基本領域の作成と基本領域による空間の充填 2

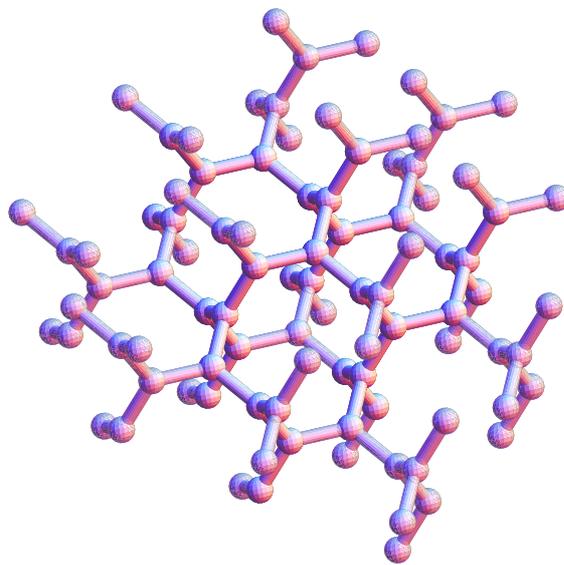
- 1 つの頂点から、それを中心とする正 4 面体の頂点の位置に新しい頂点をつくり、この操作を繰り返して得られる格子を作成したが、これはダイヤモンド格子と呼ばれる。



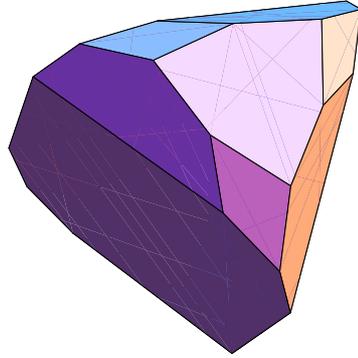
- ダイヤモンド格子の基本領域を考えよう。
- 隣り合う頂点との2等分面を考えると4面体ができるが、その次の頂点との2等分面を考えると4面体の頂点の部分削られることがわかる。
- この結果、図のような図形が基本領域として得られる。



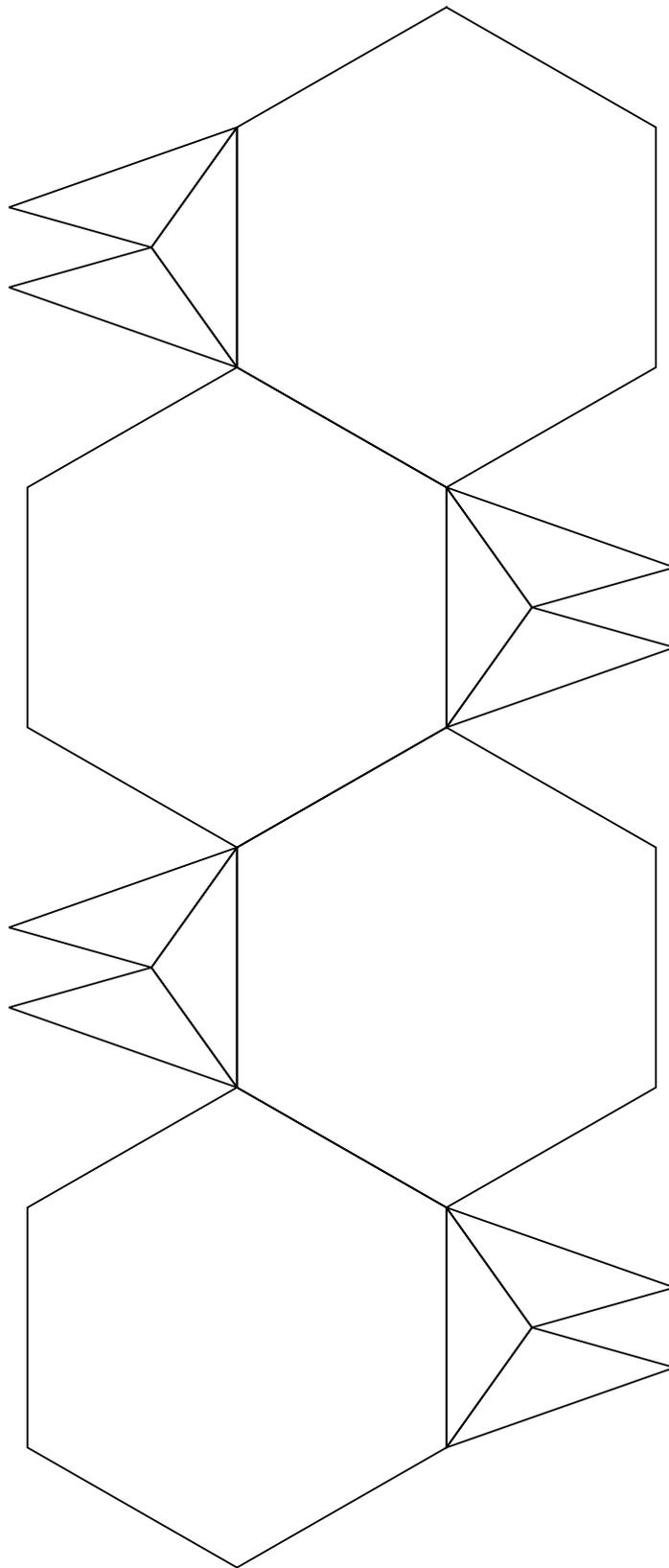
- ダイヤモンド格子は、任意の頂点の周りで、任意の2つの辺を他の辺を固定したまま入れ替える合同変換があり、任意の辺をそれ自身に逆向きに写す合同変換があるという、非常に対称性の高い格子である。
- 任意の頂点の周りで、任意の2つの辺を他の辺を固定したまま入れ替える合同変換があり、任意の辺をそれ自身に逆向きに写す合同変換があるという格子は、砂田利一により研究され、最近、ダイヤモンド格子以外にK4格子と呼ぶ格子があることが示された。Toshikazu Sunada, 「Crystals that nature might miss creating」 Notices of the AMS, Volume 55, Number 2, 208–215.

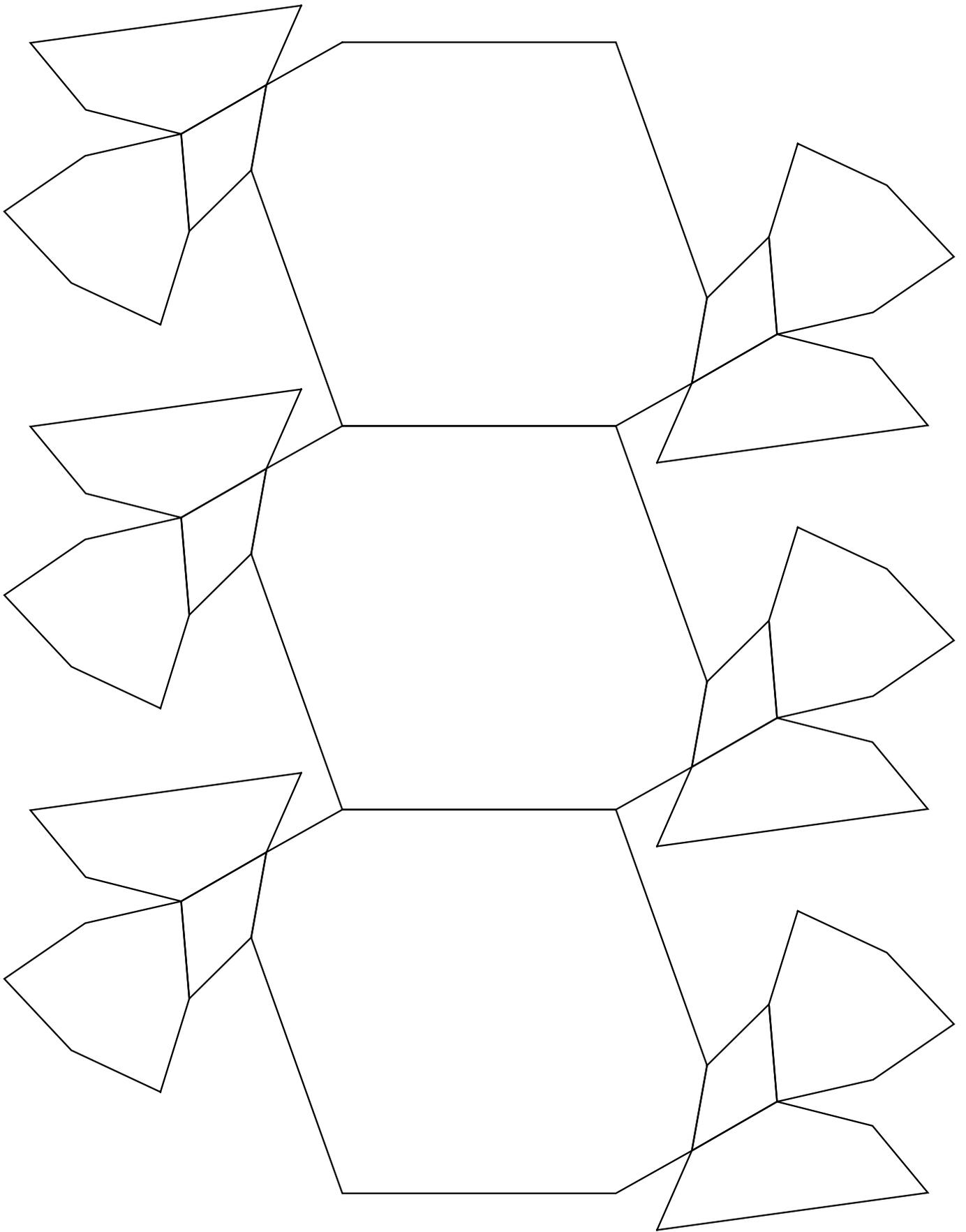


- K4格子は、図ではわかりにくいですが、各頂点に3つの辺が集まっている格子である。
- K4格子の基本領域は、17面体で図のようなものである。



- 以下のダイヤモンド格子の基本領域の展開図、K4格子の基本領域の展開図を用いて、基本領域模型を作り、空間を充填することを確認よ（K4格子の基本領域の展開図では、左右の6角形のうち2つずつは不要である）。





8.10 演習：GeoGebraによる基本領域の展開図の作成

展開図を定規とコンパス等で描くのは実際には易しくない。ここでは、GeoGebraを用いて、いくつかの図形を平面の上で対称移動して展開図を書く方法を述べる。

GeoGebraは、幾何、代数、解析を結びつけた動的な教育機関向け数学ソフトウェアである。まず、ブラウザ(インターネット・エクスプローラ)で、GeoGebraを検索し、

<http://www.geogebra.org/cms/ja>

の[ダウンロード]をクリックし、さらに[Webstart]をクリックし[プログラムで開く]とする。これで、GeoGebraが起動される。デスクトップにGeoGebra Webstartというアイコンがあれば、それをクリックして起動させることもできる。

GeoGebraには、多くの機能があるが、今回、使いたい機能は、正多角形を描くこと、多角形を対称移動することなどである。

- 切頂8面体の展開図を描くには次のようにする。切頂8面体の展開図のデッサンはあるものとする。
- (0) GeoGebraを起動する。矢印、点、直線、などのアイコンメニューの上にマウスを持っていくと、それぞれが大体どういうものかの説明が出る。そのメニューの右下隅をクリックすると関連した他の操作ができる。
- (1) GeoGebraのアイコンメニュー[新規の点]を左クリックして、座標(0, 0), (1, 0)で左クリックすると、A, Bという2点がマークされる。
- (2) アイコンメニュー[多角形]の右下隅をクリックすると、[正多角形]があるので、それをクリックする。
- (3) A, Bを順にクリックして、辺の数6を入力すると、線分ABを1辺とする正6角形が書かれる。
- (4) B, Aを順にクリックして、辺の数4を入力すると、線分BAを1辺とする正方形が書かれる。
- (5) ここで、展開図を印刷するときのために、[表示]メニューをクリックして、軸をクリックすると、座標軸は消せる。左のオブジェクト欄の をクリックして、 に変えると、A, Bの文字が消せる。
- (6) 左のオブジェクト欄の[多角形1]を右クリックして、[プロパティ]をクリックする。その中のオブジェクト欄の、[点]をクリックし、 をクリックして、 に変える。[色]のタブで、「黒」(他の色でもよい)を選び、[スタイル]のタブの[塗り]を0にする。(他の色にしたときには、適当な数値にする)。このオブジェクト欄に、4角形もあるので同様の操作をする。[基本]のタブで、[オブジェクトの表示]がチェックされていることを確認して[プロパティ]を閉じると、正6角形と正方形だけが書かれているはずである。
- (7) アイコンメニュー[直線に関する鏡映]をクリックし、正6角形をクリックして、その一つの辺をクリックすると、対称移動した正6角形が描かれる。

- (8) アイコンメニュー [新規の点] の右下隅をクリックすると [中点または中心] があるのでそれをクリックし、辺の1つをとると適当な辺の中点をとることができる。
- (9) アイコンメニュー [直線に関する鏡映] の右下隅をクリックすると [点に関する鏡映] があるのでそれをクリックし、正方形をクリックして点をクリックすると、点対称の位置に移動した正方形が描かれる。
- (10) 不要な点の名前は消しておく。
- (11) 以上の操作を繰り返して、展開図が描ける。
- (12) この展開図は、[ファイル] メニューの [印刷] から、大きさを調整してプリントアウトすることができる。また [ファイル] メニューの [エクスポート] から、適当な画像ファイルとして保存できる。
- 菱形 1 2 面体の展開図を描くのは、最初に菱形を座標で描くことを除いて前に述べた対称移動を用いる。菱形 1 2 面体の展開図のデッサンはあるものとする。
- (1) GeoGebra のアイコンメニュー [新規の点] を左クリックして、座標軸上ではない適当なところをクリックすると、点 A が打たれる。アイコンメニュー [移動] を左クリックして、オブジェクト欄の A を右クリックして、[プロパティ] をクリックすると、座標の値が変更できる。ここで、例えば $(1, 0)$ に変更する。
- (2) 同様に、 $(-1, 0)$, $(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$ の点を取ることができる。 $\sqrt{2}$ は 1.4142 とする。
- (3) ここで、展開図を印刷するときのために、[表示] メニューをクリックして、軸をクリックすると、座標軸は消せる。
- (4) アイコンメニュー [多角形] をクリックして、頂点を順にクリックし、菱形を作ることができる。
- (5) 左のオブジェクト欄の  をクリックして、 に変えると、A, B などの文字が消せる。
- (6) 左のオブジェクト欄の [多角形] を右クリックして、[プロパティ] をクリックする。[色] のタブで、「黒」(他の色でもよい) を選び、[スタイル] のタブの [塗り] を 0 にする。(他の色にしたときには、適当な数値にする)。[基本] のタブで、[オブジェクトの表示] がチェックされていることを確認して [プロパティ] を閉じると、菱形だけが書かれているはずである。
- (7) この菱形を対称移動して、菱形 1 2 面体の展開図を描くことができる。

このテキストについて参考となるウェブページなど

伊藤由佳理著「鏡の国に行ってみよう！ 対称性のはなし」数学通信 15 巻 4 号
(2010 年秋に名古屋大学で開催された市民講演会の講演)

<http://mathsoc.jp/publication/tushin/1504/1504ito.pdf>

2次元結晶群についての、ト部東介氏のページ

<http://mathinfo.sci.ibaraki.ac.jp/open/mathmuse/patrn/Pattern.html>

内藤久資著「数学で結晶を探そう」(次のファイルの5枚目と6枚目)

<http://www.sci.nagoya-u.ac.jp/kouhou/20/20.pdf>

奈良知恵著「ダイヤモンドの立体をつくろう」(女子中高生夏の学校 2010 科学・技術者のたまごたちへ 実習記)(先生向け)

<http://mathsoc.jp/publication/tushin/1503/1503nara.pdf>

松本 圭司著「格子めぐり」数学通信 9 巻 4 号 (2004 年度秋に北海道大学で開催された市民講演会の講演)

<http://mathsoc.jp/publication/tushin/904/matsumoto.pdf>

Dimensions 日本語版のページ

http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/~dim_jp/