東京大学玉原国際セミナーハウス
2010 年 9 月 18 日－ 20 日
群馬県教育委員会高校教育課
東京大学大学院数理科学研究科

平成２２年度群馬県高校生数学キャンプ
「複素数」

１．　９月１８日　１１：００－１２：００　（大島利雄）
数の体系　実数と作図

２．　９月１８日　１３：３０－１４：３０　（関口英子）
複素数平面　複素数と平面幾何

３．　９月１８日　１５：００－１６：００　（寺杣友秀）
作図問題（円積問題，立方倍積問題，角の３等分）　正多角形の作図
正５角形の作図

演習　９月１８日　１６：３０－１７：３０　（坪井　俊）
作図：　２人に１台のＰＣを使う（ＫＳＥＧ）

４．　９月１９日　　９：００－１０：００　（関口英子）
正１７角形の作図　作図問題の結論

５．　９月１９日　１０：３０－１１：３０　（寺杣友秀）
３次方程式の解法，４次方程式の解法

６．　９月１９日　１５：００－１６：００　（大島利雄）
多項式の定める写像

演習　９月１９日　１６：３０－１７：３０　（坪井　俊）
多項式の定める写像の様子を十進ＢＡＳＩＣを使って理解する

７．　９月２０日　　９：００－１０：００　（大島利雄）
曲線，閉曲線，原点の周りの回転数
代数学の基本定理

８．　９月２０日　１０：３０－１１：３０　（寺杣友秀）
オイラーの発見とゼータ関数

1． 数の体系

自然数，整数，有理数

小学校で最初に習う数は，$1, 2, 3, 4, \ldots$ という数であり，個数を数える，順番を表わすという役割を担っている数である．これらは自然数と呼ばれる．これらの自然数に対し，足し算（加法）を習い，次に掛け算（乗法）を習う．つまり，**自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ 上に加法 $+$ と乗法 $\times$ が定義される**ことを習っている．加法や乗法を**演算**と呼ぶ．集合上の演算とは，集合の 2 つの要素に対して，その集合上の 1 つの要素を与える対応のことである．加法 $+$ や乗法 $\times$ が演算であるというのは，2 つの自然数 a, b に対し，自然数 $a+b,\ a \times b$ が定まるということである．

さて，演算が定義されると，未知の数と既知の数に演算を行なってある数が得られたときに未知の数を求める問題が考えられる．未知の数を x と書くとき，x についての方程式と呼ばれる．たとえば，

$$x + 3 = 5, \qquad x \times 6 = 18$$

などが方程式である．この 2 つの方程式に現れている既知の数は自然数であり，$x+3 = 5$ を満たす x は，$x = 2$, $x \times 6 = 18$ を満たす x は，$x = 3$ となる．このような数は方程式の解と呼ばれるが，方程式の解は加法の逆演算の減法，乗法の逆演算の除法により計算される．

$$x = 5 - 3 = 2, \qquad x = 18 \div 6 = 3.$$

このような逆演算は，自然数の範囲でいつでも可能とは限らない．

$$x + 5 = 2, \qquad x \times 18 = 6$$

の解は，自然数の範囲にはない．自然数しか使えないと決めると不自由であることがわかる．

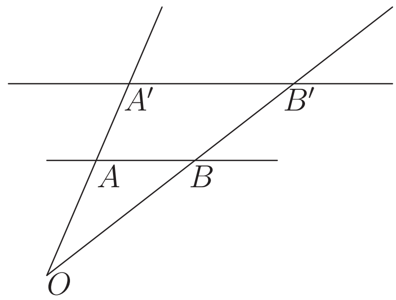
次のことに注意しよう．

- 自然数の集合に，自然数の加法についての方程式の解を付け加えると，整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ が得られる．特に，0 が定まる．
- 自然数の集合に，自然数の乗法についての方程式の解を付け加えると，正の有理数の集合が得られる．
- 整数の集合には，自然数の集合上の乗法と矛盾のない形で乗法が定義される．このときに $(-1) \times (-1) = 1$ となる．
- 整数の集合に，整数の乗法についての方程式の解を付け加えると，有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$ が得られる．

こうして得られた有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$ では，加減乗除ができ，さらに加法についての方程式も，乗法についての方程式も解を持つ．従って，有理数の集合は加減乗除という演算については理想的な集合である．この加減乗除という演算についての方程式が解けることは，ギリシャ時代の数学者たちにも実質的には知られていたようである．しかし，そのことが十分に意識されてくるのは，19 世紀になってからであると思われる．

正の有理数は，ギリシャ時代の数学者たちにとっては，常識的な存在だったと思われるが，負の数を人類が受け入れるのには，非常に長い時間がかかっている．座標を導入して，図形と数式の橋渡しをしたデカルトでさえも，彼が考えていた座標は，正の座標を持つものであり，今でいう第１象限であったらしい．

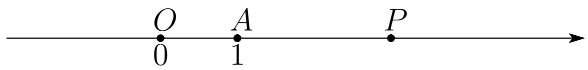
単位の長さの線分を定めると有理数の長さの線分が，定規とコンパスで作図できることも知られていた．作図における有理数の問題点は，２つの線分の長さの比の値が有理数で表されるとは限らないということであった．例えば正方形の対角線と一辺の長さの比は $\sqrt{2}$ であるが，これは有理数ではない．このことは多くの高等学校の数学の教科書に書かれている．



平行線と比例

実数と平面幾何

これから**２つの線分の長さの比を表すような数**を考える．これを，正の実数と呼ぶことにする．直線上に原点 O と単位の長さ OA をとり，直線上の１点 P に対し，実数 OP : OA を対応させることができる．OP が OA と重なるときには正の実数を対応させ，OP と OA が O について反対側にあるときには，比の値は負であると考えると都合が良い．こうして，１つの実数は，原点と単位の長さをとった直線の１点と同一視される．この対応を持つ直線は**数直線**と呼ばれ，直線上の点に対応する実数は，点の**座標**と呼ばれる．有理数の長さの線分が作図できるということは，有理数は実数に含まれることを意味している．



数直線

実数においても加減乗除ができる．その理由は，次のものであると当面認めることにする．長さ a の線分，長さ b の線分に対して，長さ $a+b$, $a-b$ 線分が定規とコンパスで作図できる．さらに，長さ１の線分が与えられている時，長さ $a \times b$, $\dfrac{b}{a}$ の線分が定規とコンパスで作図できる．

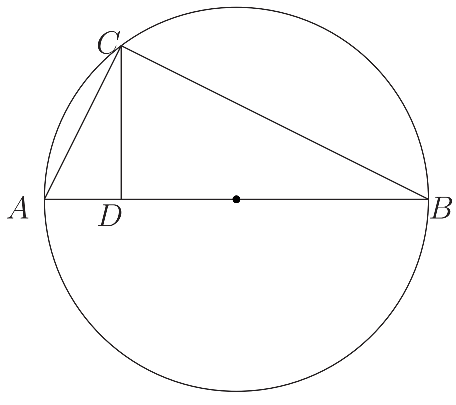
長さ１の線分が与えられている時，長さ $a \times b$ の線分が作図できることから，長さ x の線分に対して，長さ $x \times x = x^2$ の長さの線分を考えることができる．逆に，長さ y の線分に対して，$x^2 = y$ となる長さ x の線分を作図することができる．従って，正の

実数 y に対して，$x^2=y$ となる実数 x が存在する．そのような正の実数 x を y の平方根とよび，$\sqrt{y}$ と書く．0 に対し，$\sqrt{0}=0$ とする．

前に述べたように，y が有理数のときに，x が常に有理数となるかというと，そうとは限らない．平方数の商でない有理数は有理数の平方とはならないことが，背理法で示される．

練習問題

1. 平行線と比例の関係はどういうものだったか上の図について述べなさい．
2. 与えられた線分の整数倍の定規とコンパスによる作図の方法を述べなさい．与えられた直線とその上にない 1 点について，その点を通る平行線の定規とコンパスによる作図の方法を述べなさい．
3. 与えられた線分の $\dfrac{1}{3}$ の長さの線分を作図する方法を述べなさい．
4. 長さ 1 の線分が与えられている時，長さ a の線分，長さ b の線分に対して，長さ ab の線分，長さ a^2 の線分，長さ $\dfrac{b}{a}$ の線分の作図の方法を述べなさい．
5. AB を直径とする円周上の点 C に対し，C から AB に下ろした垂線の足 D の作図の方法を述べなさい．
6. こうして次の図のように書かれた点 A, B, C, D に対し，$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AC}^2$, $\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DB}=\mathrm{CD}^2$ を示しなさい．
7. 長さ 1 の線分が与えられている時，長さ y の線分に対して，$x^2=y$ となる長さ x の線分を作図することができることを示しなさい．



複素数

実数 x の 2 乗 x^2 を考えると，正の x の 2 乗も，負の x の 2 乗も，正になる．しかし，$x^2=-1$ という方程式を考えることに意味がないのであろうか？

$x^2=1$ という方程式の解を考えると，長さとしては $x=1$ が解であるが，実数としての解には $x=-1$ もある．$y=x^2-1$ のグラフと，実軸の交点を考えると $(-1,0)$, $(1,0)$ という点で交わる．

実数直線に対し，1 倍することは，座標を変えないので何もしないということである．実数直線に対し，-1 倍することは，座標の符号を変えることである．平面上に描いた実数直線では，原点を中心に 180 度回すことである．$(-1)^2 = 1$ という式は，2 回符号を変えると，元に戻ることを表わしている．あるいは，2 回 180 度回転すると，元に戻ることを表わしている．

そこで，$x^2 = -1$ という方程式を，2 回或る“ 操作 ”をすると座標の符号を変える，あるいは原点を中心に 180 度回すことになるこの“ 操作 ”は何かという問題と考える．そうすると，答えの一つに，“ 平面で原点を中心に 90 度回転する ”というものがあることがわかる．

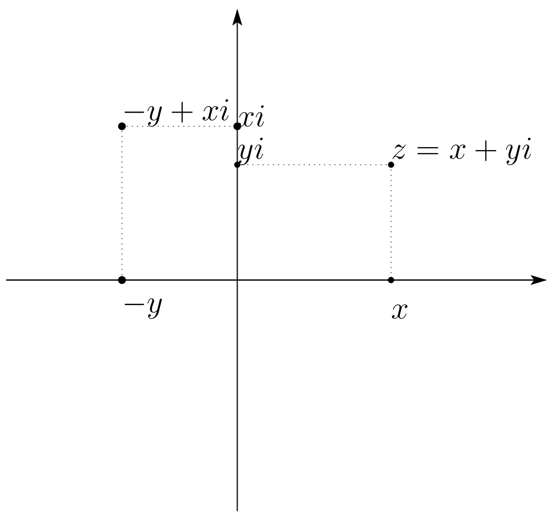
平面上に，実数直線を描き，$0, 1$ を書くと，-1 は 1 を原点について対称に移動した点にある．実数に対して -1 倍は，原点について対称な位置に移動することである．そこで，i という数が，1 を原点を中心として，90 度回転した位置にあるとし，i 倍することは，平面の点を原点を中心として 90 度回転することと定める．

そうすると，$i^2 = -1$ となる数 i が定まったことになる．このときに $-i$ は，1 を原点を中心として，-90 度回転した位置にあり，$-i$ 倍することは，平面の点を原点を中心として -90 度回転することになっている．従って，$(-i)^2 = -1$ となる．

平面に x 軸，y 軸をとり，平面上の点を 2 つの実数の組 (x, y) で表す．i という点は，y 軸上の y 座標が 1 の点 $(0, 1)$ である．平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ は，1 の x 倍と i の y 倍の和で表わされる数 $x + yi$ に対応すると考えられる．平面の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対応する数 $x + yi$ に i を掛けるとき，通常の積のように計算できるとすると，

$$i \times (x + yi) = i \cdot x + i \cdot yi = xi + i \cdot i \cdot y = xi + (-1)y = -y + xi$$

となって，$\mathrm{Q}(-y, x)$ に対応する数となる．Q は P を原点の周りに 90 度回転で移動した点である．



このあたりの事柄は，Jos Leys, Étienne Ghys, Aurelien Alvarez が作ったビデオ DIMENSIONS の第 5 章，第 6 章に説明されている．次のウェブページを参照されたい．

`http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/dim_jp/`

さて，**複素数**を，虚数単位 i, 実数 x, y により，$x+yi$ の形に書かれる数とし，複素数の加減乗除は，$i^2=-1$ に気をつけて通常の式のように計算することができるとする．

すなわち加法減法が,

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

により定義され，乗法は，$\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ に対して,

$$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

で定義される．また，計算により

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

がわかる．

複素数は 2 次方程式の解として現れる．実数係数の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

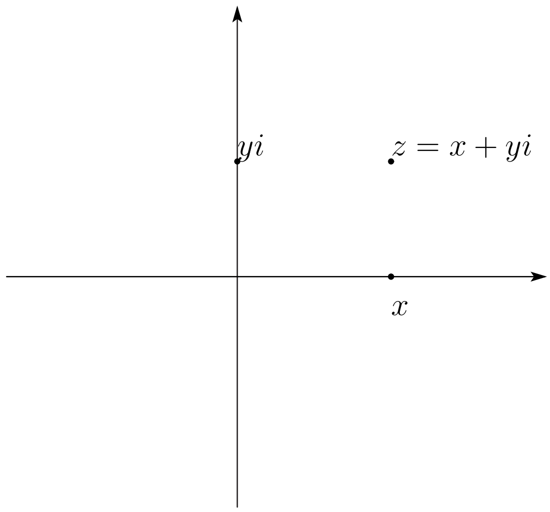
であり，$D=b^2-4ac>0$ のとき 2 実解，$D=0$ のとき重解，$D<0$ のとき共役複素数を解に持つ．

実数だけを考えると解がない方程式が，複素数の範囲では解を持つことにより，代数方程式の性質が統一的に理解されることになる．

2．複素数平面

xy 平面の座標 (x, y) を持つ点を複素数 $x + yi$ に対応させて考えるとき，この平面を**複素数平面**とよぶ．x 軸を**実軸**と呼ぶ．複素数平面の点は１つの複素数 $\alpha = a + bi$ により表される．a を α の実部 (real part) と呼び，$a = \mathrm{Re}\,\alpha$ のように表す．b を α の虚部 (imaginary part) と呼び，$b = \mathrm{Im}\,\alpha$ のように表す.

複素数平面上では，点 α, 線分 $\alpha\beta$, 三角形 $\alpha\beta\gamma$ というような表現も使うことができる.



複素数 $\alpha = a + bi$ に対し，$a - bi$ を $\alpha = a + bi$ の**共役** (きょうやく) **複素数**と呼び，$\overline{\alpha}$ で表す．すなわち $\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi$. 共役複素数 $\overline{\alpha}$ は，点 α の実軸に関する対称点に対応する.

複素数 $\alpha = a + bi$ と原点 0 との距離を複素数 $\alpha = a + bi$ の**絶対値**と呼び $|\alpha|$ で表す. $|\alpha| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ である．複素数 α, β に対し，$|\alpha - \beta|$ は，α, β を結ぶの線分の長さとなる.

複素数 $\alpha = a + bi$ とその共役複素数 $\overline{\alpha} = a - bi$ の積は $\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 = |\alpha|^2$ となり，0 または正の実数である．このことから

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}$$

である．$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$ であり，

$$|\alpha\beta|^2 = \alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\beta} = \alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta} = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2$$

だから，$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ が成立する.

複素数の和，複素数の積の図形的な意味

複素数平面上で複素数 α, β 和は線分 0α, 0β を２辺とする平行四辺形の４つ目の頂点を与える（ベクトルの和と同じ）.

複素数平面上で複素数 α, β の積は次のような意味を持つ.

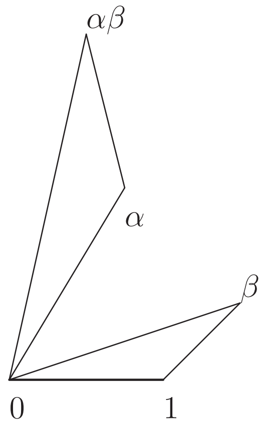
$\alpha = a + bi,\ \beta = c + di$ について，２つの三角形

$$\triangle 01\beta, \qquad \triangle 0\alpha(\alpha\beta)$$

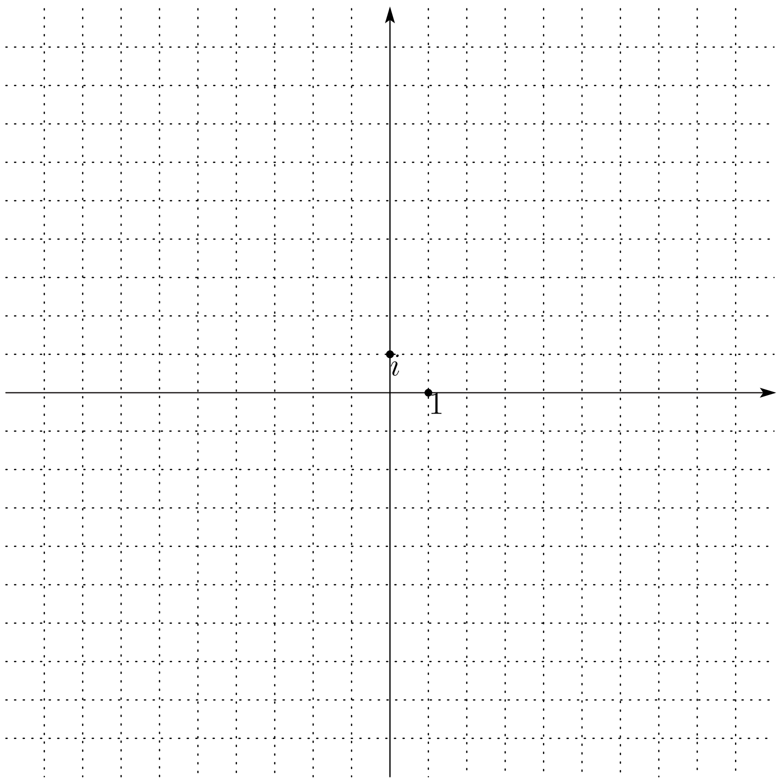
の辺の長さは，それぞれ

$$(1, |\beta - 1|, |\beta|), \qquad (|\alpha|, |\alpha\beta - \alpha|, |\alpha\beta|)$$

であるが，$|\alpha\beta - \alpha| = |\alpha(\beta - 1)| = |\alpha| \cdot |\beta - 1|,\ |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ だから，$\triangle 01\beta,\ \triangle 0\alpha(\alpha\beta)$ は相似である．



$\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$ が $y = \dfrac{b}{a}x$ のどちらにあるかを見ると，
$(ad + bc) - \dfrac{b}{a}(ac - bd) = \dfrac{d}{a}(a^2 + b^2)$ だから，$\triangle 01\beta,\ \triangle 0\alpha(\alpha\beta)$ は同じ向きに相似である．



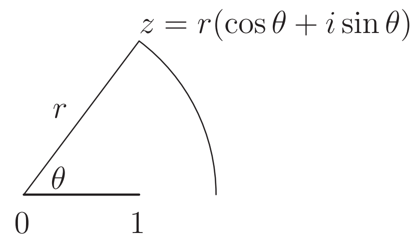
練習問題． $\alpha = 1 + \dfrac{3}{4}i$ に対して，$\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{10}$ を複素数平面に図示しなさい．$\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\alpha^2}$, $\dfrac{1}{\alpha^3}$ を図示しなさい．

参考：極形式

複素数 $z = x + yi$ に対し，$r = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおき，半直線 0α と実軸のなす角度を θ と書くと，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と書かれる．この角度 θ は，z の偏角と呼ばれ，$\arg z$ と書かれる：

$$\theta = \arg z$$

これを複素数 α の極形式による表示と呼ぶ．



上に述べた，複素数の積の図形的な意味から，2 つの複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対し，

$$\{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\}\{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\} = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

となる．$r_1 = r_2 = 1$ のとき，三角関数の加法定理が導かれる（あるいは，三角関数の加法定理を知っていれば，前に述べた複素数の積の図形的な意味も納得できるであろう）．実際，$r_1 = r_2 = 1$ のとき，上の式の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}&(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + (\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\end{aligned}$$

で，これが $\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$ と等しいから，

$$\begin{aligned}\cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2\end{aligned}$$

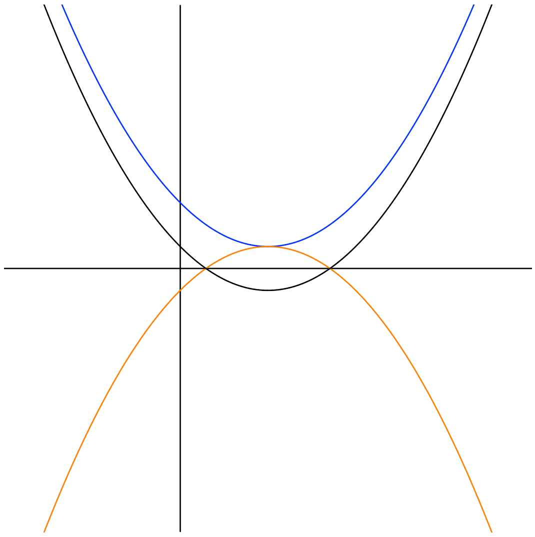
が導かれる．

計算練習

(1) $1 + \sqrt{3}i$ の 2 乗，3 乗を求め複素数平面上に図示せよ．
(2) $z = 1 + i$ を極形式に直せ．
(3) $z^2 = 1 + i$ を満たす複素数 z を求めよ．
(4) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し，z^n を極形式で求めよ．

３．複素数係数２次方程式，複素数係数多項式

実数係数の２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ について，$a>0$, $D=b^2-4ac>0$ とすると放物線 $y=ax^2+bx+c=a(x-\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{2a}$ のグラフは図の実線のようである．このとき，放物線 $y=a(x-\dfrac{b}{2a})^2+\dfrac{b^2-4ac}{2a}$ のグラフは太い点線で書いたものであり，実線の放物線を x 軸について対称に移したものと同じ頂点を持っている．



複数の範囲でどのようにして解を持つのかを見るために，複素数の範囲で $(z-1)^2-4$ の値を見る．図を描くために絶対値 $|(z-1)^2-4|$ の様子を見てみよう．

その次に，$|(z-1)^2+4|$ の様子を見てみよう．

`!abs_quad.BAS`	コメント：プログラムの名前
`OPTION ARITHMETIC COMPLEX`	複素数を用いる
`DEF f(z)=(z-1)^2-4`	$f(z)$ の定義
`LET h=5`	グラフィック画面の大きさ h
`SET WINDOW -h,h,-h,h`	グラフィック画面の設定（左, 右, 下, 上）
`SET POINT STYLE 1`	グラフィックスで点を打つ
`FOR px=0 TO PIXELX(h)`	グラフィック画面の点の範囲（左右）
`   FOR py=0 TO PIXELY(h)`	グラフィック画面の点の範囲（上下）
`      LET x0=PROBLEMX(px)`	グラフィック画面の点に対応する x 座標
`      LET y0=PROBLEMY(py)`	グラフィック画面の点に対応する y 座標
`      LET z=COMPLEX(x0,y0)`	$z=x+yi$
`      SET POINT COLOR MOD(INT(ABS(f(z))),256)`	点の色を決める
`      PLOT POINTS : x0, y0`	$\|f(z)\|$ の整数部分に対応する色の点を打つ
`   NEXT py`	次の点へ（上下）
`NEXT px`	次の点へ（左右）

これは十進ＢＡＳＩＣというソフトウェアのプログラムである．abs_quad.bas をクリックすると，これが書かれたプログラムが現れる．▶ をクリックしてみよう．

このＢＡＳＩＣのプログラムでは $|(z-1)^2-4|$ または $|(z-1)^2+4|$ の値の整数部分にしたがって色分けしている．実数部分 $-5 \leqq \mathrm{Re}\, z \leqq 5$, 虚数部分 $-5 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 5$ の部分を示している．

２次方程式

実数係数の２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の解の公式は次のようにして得られた．

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{(2a)^2}+\frac{c}{a}=0$$
$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

複素数係数の２次方程式 $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ $(\alpha \neq 0)$ に対してこの論法が正しいかどうか見ると，$z^2=\alpha$ の解が，$\pm\sqrt{\alpha}$ としてよいかどうかが問題となる．

しかし，z^2 は，三角形 $0\,1\,z$ と三角形 $0\,z\,z^2$ が相似であることにより与えられている．従って，$\alpha=z^2$ ならば，$|z|=\sqrt{|\alpha|}$, z の偏角は α の偏角の $\frac{1}{2}$ となっているはずである．ただし，実軸と半直線 0α との角の２等分線は，原点について対称な２つの半直線である．従って，このような z は２つあることになる．

極形式を用いて書くと以下のようになる．

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする．$\cos\theta+i\sin\theta$ は，複素数平面上で原点からの距離が 1 で，実軸の正方向との角度が θ の点を表わす．複素数の積の図形的な意味を考えると $z^2=\alpha$ を満たす z は，$z=\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$ または $z=\sqrt{r}(\cos(\frac{\theta}{2}+\pi)+i\sin(\frac{\theta}{2}+\pi))$ である．ここで，$\frac{\theta}{2}$, $\frac{\theta}{2}+\pi$ は，角 $1\,0\,\alpha$ の２等分線の方向の角度である．

$$-\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})=\sqrt{r}(\cos(\frac{\theta}{2}+\pi)+i\sin(\frac{\theta}{2}+\pi))$$

だから，

$$z=\pm\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$$

である．

複素数に対しては正の平方根というものはないので，$\sqrt{\alpha}$ は z の一方を表すことにすると，２次方程式の解の公式の導き方は複素数係数としても正しいことがわかる．すなわち，複素係数の２次方程式 $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ の解は $\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ となる．

平方根が作図できることと角の 2 等分線が作図できることから，複素数 α に対して，$\alpha = z^2$ となる 2 つの z は，定規とコンパスで作図できる．このことから，２次方程式 $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ の係数 α, β, γ が原点，1 の与えられた複素数平面上の点として与えられたとき，２次方程式 $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ の解は，それらの点から定規とコンパスで作図できることがわかる．

複素数係数多項式

複素数係数の多項式の間の和差積商は実数係数多項式のように行うことができる．すなわち，同じ次数の項の係数の和差をとったものが，多項式の和差であり，単項式 $\alpha x^m, \beta x^n$ の積は $\alpha\beta x^{m+n}$ であるとして，分配法則が成り立つとして多項式の積が定義される．

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ は複素数，$a_n \neq 0)$ を n 次複素数係数多項式と呼ぶ．n を $P(x)$ の次数と呼ぶ．$P(x) = 0$ を n 次方程式と呼ぶ．$P(\alpha) = 0$ となる複素数 α を n 次方程式 $P(x) = 0$ の解と呼ぶ．α を多項式 $P(x)$ の根と呼ぶ．

多項式 $P(x), Q(x)$ に対し，$P(x) = Q(x)R(x) + S(x)$ となる多項式 $R(x), S(x)$ で，$S(x)$ の次数が $Q(x)$ の次数よりも小なるものがただ一通り存在する．

x についての複素数係数多項式 $P(x)$ と複素数 α に対し，$P(\alpha) = 0$ ならば，$f(x)$ は $x - \alpha$ で割り切れる（因数定理）．なぜならば，多項式 $P(x)$ を $x - \alpha$ で割ると，多項式 $Q(x)$ と複素数 β で

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + \beta$$

を満たすものが定まるが，$P(\alpha) = \beta = 0$ であるから，$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ となる．ここで，$Q(x)$ の次数は $P(x)$ の次数より 1 少ない．このことから，n 次方程式 $P(x) = 0$ の解（n 次多項式 $P(x)$ の根）は，重複を許して高々n 個であることがわかる．

演習問題． 実数係数の多項式が複素数 α を根にもてば，$\overline{\alpha}$ も根になることを示せ．例えば $|z^3 - 3z + 4|$ を描いて確認してみよ．

演習問題． 多項式の係数をどのような範囲に取るかで，色々と興味ある現象が起こってくる．今回のテーマの複素数は直接は出てこないが，次のことが成り立つことを示してみよ．

整数係数の多項式 $P(x)$ が有理数の根 $\dfrac{a}{b}$ $(a, b$ は互いに素な整数）をもてば，$P(x)$ を $bx - a$ で割った商は整数係数の多項式となる．一般に，整数係数の多項式の間の関係式 $P(x) = Q(x)R(x)$ で，$P(x)$ の係数が共通の素因数を持たないならば，$Q(x)$ の係数も，$R(x)$ の係数も共通の素因数を持たない．

４．定規とコンパスによる作図　正５角形の作図

平面幾何は，ユークリッドの時代には非常に整備された理論体系を持つものになっていた．定規とコンパスによる作図は，その中でも重要な位置を占めるものであった．

- 定規は２点を通る直線を引くことができる道具である．
- コンパスは，１点を中心として与えられた点を通る円を描く道具である．また，与えられた長さの半径の円を描くこともできる．

今日の演習の時間には，ＫＳＥＧというソフトウェアを用いて，作図を行うので使い方の説明とともに，定規とコンパスで作図できることを考えていこう．

- 垂直２等分線の作図.
- 角の２等分の作図.
- 平行線の作図.
- 円の接線の作図.
- 平方根の作図.

難問とされた作図問題

- 円積問題
  与えられた半径の円の面積と同じ面積の正方形を作図せよ．
- 立方倍積問題
  与えられた立方体の倍の体積の立方体の辺の長さを元の辺の長さから作図せよ．
- 角の３等分
  任意に与えられた角の $\frac{1}{3}$ の角を作図せよ．
- 正多角形の作図
  正 n 角形を作図せよ．

正５角形の作図

１の５乗根は，正５角形の頂点となるからその点を求める．

$$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=(z-1)z^2\{(z+\frac{1}{z})^2+(z+\frac{1}{z})-1\}$$

だから，

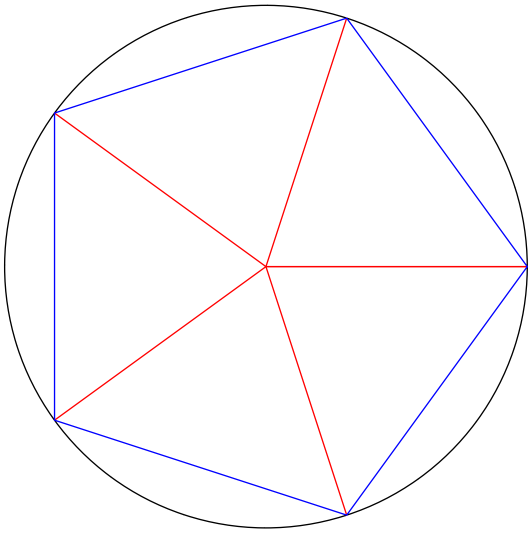
$$z+\frac{1}{z}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

したがって，

$$2z^2-(-1\pm\sqrt{5})z+2=0$$

を解いて

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{6\mp2\sqrt{5}-16}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{\mp2\sqrt{5}-10}}{4}$$



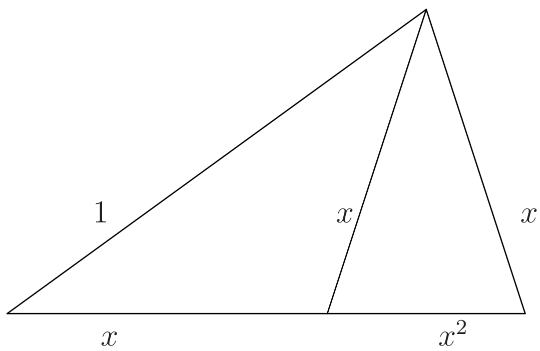
1 の 5 乗根は，1, $\cos\frac{2\pi}{5} \pm i\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5} \pm i\sin\frac{4\pi}{5}$ であり，$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ を求めたことになる．

この値は他の方法でも求まる．

$\theta = \frac{2\pi}{5}$ とすると，$\cos 2\theta = \cos 3\theta$ である．

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2(\cos\theta)^2 - 1,\\ \cos 3\theta &= 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta\end{aligned}$$

だから，$t = \cos\theta$ は $4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0$ を満たすが，左辺は $(t-1)(4t^2+2t-1)$ だから，$t = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ （$\pm$ は $+$ が題意を満たす）を得る．



角度が $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$ の 2 等辺三角形を使って，$x = 2\sin\frac{\pi}{10} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ が $x^2 + x = 1$ を満たすことから $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ （$\pm$ は $+$ が題意を満たす）を得る．

作図してみよう．

演習の時間

作図の課題：　３人に１台のＰＣを使う.（ＫＳＥＧ）

（１）正３角形を作図せよ.

（２）正４角形を作図せよ.

（３）正６角形を作図せよ.

（４）正８角形を作図せよ.

（５）正１２角形を作図せよ.

（６）長さ 1 と自然数 n を与えて，$\dfrac{1}{n}$ を作図せよ.

（７）長さ 1 と x を与えて，$\dfrac{1}{x}$ を作図せよ.

（８）長さ 1 と x を与えて，$\sqrt{x}$ を作図せよ.

（９）複素数 $0, 1$ と α を与えて，$\sqrt{\alpha}$ を作図せよ.

（１０）正５角形の作図.

（１１）余裕があれば，複素数 $0, 1, \alpha, \beta$ に対し，$\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \dfrac{\alpha}{\beta}$ が作図できることを示せ.

ＫＳＥＧはフリーソフトで，http://geom.math.metro-u.ac.jp/wiki/index.php?KSEG に情報がある．ウィンドウズ版は，http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html のなかに the windows executable, version 0.401 がある．

５．正１７角形の作図，作図問題

作図できる長さの意味を考える．作図できる長さを係数とする２次方程式を次々に解くことによって得られる複素数は複素数平面上で作図できる．

$\zeta_5 = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ として，z^5-1 の根は $\zeta_5, {\zeta_5}^2, {\zeta_5}^3, {\zeta_5}^4, 1$ である．ζ_5 は何故作図できたかを振り返ってみる．

$u=\zeta_5+{\zeta_5}^4, v={\zeta_5}^2+{\zeta_5}^3$ は，$u+v=-1, uv=-1$ を満たすから，u, v は $x^2+x-1=0$ の解．$u, v=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ となる.（図形的に見ると，$u=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, v=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ であることがわかる.）

次に，$\zeta_5, {\zeta_5}^4$ について，$u=\zeta_5+{\zeta_5}^4, \zeta_5{\zeta_5}^4=1$ だから，$\zeta_5, {\zeta_5}^4$ は，$x^2-ux+1=0$ の解である．$\zeta_5, {\zeta_5}^4=\dfrac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2}$.

ここでは，$\zeta_5, {\zeta_5}^2, {\zeta_5}^4, {\zeta_5}^8={\zeta_5}^3$ となっており，とびとびに組にして計算した．これをヒントに正１７角形を考えてみよう．

正１７角形の作図が可能であること

$\zeta^{17}=1$ とする．

ζ から順に２乗していくと

$$\zeta, \zeta^2, \zeta^4, \zeta^8, \zeta^{16}, \zeta^{32}=\zeta^{15}, \zeta^{64}=\zeta^{13}, \zeta^{128}=\zeta^9.$$

ζ^3 から順に２乗していくと

$$\zeta^3, \zeta^6, \zeta^{12}, \zeta^{24}=\zeta^7, \zeta^{48}=\zeta^{14}, \zeta^{96}=\zeta^{11}, \zeta^{192}=\zeta^5, \zeta^{10}$$

となる．

$$\begin{aligned} u &= \zeta+\zeta^2+\zeta^4+\zeta^8+\zeta^{16}+\zeta^{15}+\zeta^{13}+\zeta^9, \\ v &= \zeta^3+\zeta^6+\zeta^{12}+\zeta^7+\zeta^{14}+\zeta^{11}+\zeta^5+\zeta^{10} \end{aligned}$$

とすると，

$$u+v=-1, \quad uv=u+v+u+u+u+v+v+v=-4$$

である．だから，u, v は $x^2+x-4=0$ の解である．

さて，u を，一つとびにとって，

$$s_1=\zeta+\zeta^4+\zeta^{16}+\zeta^{13}, \quad s_2=\zeta^2+\zeta^8+\zeta^{15}+\zeta^9,$$

v を

$$t_1=\zeta^3+\zeta^{12}+\zeta^{14}+\zeta^5, \quad t_2=\zeta^6+\zeta^7+\zeta^{11}+\zeta^{10}$$

に分ける．このとき，

$$s_1+s_2=u, \quad s_1s_2=t_1+s_2+s_1+t_2=-1$$

だから s_1, s_2 は，$x^2-ux-1=0$ の解である．

さらに，$a_1=\zeta+\zeta^{16}, a_2=\zeta^4+\zeta^{13}$ とすると，$a_1+a_2=s_1, a_1a_2=t_1$ だから a_1, a_2 は，$x^2-s_1x+t_1=0$ の解である．

ζ は　$x^2-a_1x+1=0$ の解である．

こうして２次方程式を順に解いて正１７角形の作図ができることになる．

正 n 角形の作図

自然数 n に対し，1 から $n-1$ までの自然数で n と互いに素である（最大公約数が 1 である）ものの個数を $\varphi(n)$ であらわす．$\varphi(n)$ はオイラーの関数と呼ばれる．

$$\varphi(n) = |\{m \mid 1 \leqq m \leqq n-1,\ (m,n)=1\}|$$

ここで，(m,n) は m, n の最大公約数をあらわし，絶対値の記号は個数を表す．

素数 p については，$\varphi(p) = p-1$. $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ は $\bmod p$ の積について，巡回群をなす．$n = {p_1}^{e_1} \cdots {p_k}^{e_k}$ を素因数分解とすると

$$\varphi(n) = ({p_1}^{e_1} - {p_1}^{e_1-1}) \cdots ({p_k}^{e_k} - {p_k}^{e_k-1})$$

であるが，$\{m \mid 1 \leqq m \leqq n-1,\ (m,n)=1\}$ は $\bmod n$ の積について，位数 $\varphi(n)$ の可換群をなす．

オイラーの関数 $\varphi(n)$ が 2 の冪乗になることが正 n 角形が作図できるための必要十分条件である．以下に，オイラーの関数の値を並べてみる．作図できる正 n 角形が順にわかる．
$\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=2$, $\varphi(5)=4$, $\varphi(6)=4$, $\varphi(7)=6$, $\varphi(8)=4$, $\varphi(9)=6$, $\varphi(10)=4$, $\varphi(11)=10$, $\varphi(12)=4$, $\varphi(13)=12$, $\varphi(14)=6$, $\varphi(15)=8$, $\varphi(16)=8$, $\varphi(17)=16$, $\varphi(18)=12$, $\varphi(19)=18$, $\varphi(20)=8$, $\varphi(21)=12$, $\varphi(22)=10$, $\varphi(23)=22$, $\varphi(24)=8$, $\varphi(25)=20$, $\varphi(26)=12$, $\varphi(27)=18$, $\varphi(28)=12$, $\varphi(29)=28$, $\varphi(30)=8$, $\varphi(31)=30$, $\varphi(32)=16, \ldots$

$2^{2^n}+1$ の形の素数をフェルマー素数と呼ぶ．フェルマーがこの形の素数が無限個ある予想したが，5 個しか見つかっていない．$3 = 2^{2^0}+1 = 2^1+1$, $5 = 2^{2^1}+1 = 2^2+1$, $17 = 2^{2^2}+1$, $257 = 2^{2^3}+1 = 2^8+1$, $65537 = 2^{2^4}+1 = 2^{16}+1$ がそれであり，その後のいくつかの $2^{2^n}+1$ の形の数は合成数となることがわかっている．(2^m+1 の形の素数は，$m = 2^n$ で，$2^{2^n}+1$ の形になることがわかる．実際 $m = ab$, a が奇数ならば，$2^{ab}+1 = (2^b)^a+1 = (2^b+1)(2^{(a-1)b} - 2^{(a-2)b} + \cdots + 2^{2b} - 2^b + 1)$ となる.）

作図問題に戻ると正 257 角形, 正 65537 角形も作図可能である．

演習問題．
$z^7 - 1 = 0$ の解を根とする 3 次式を求めよ．
$z^{13} - 1 = 0$ の解を根とする 3 次式を求めよ．

作図問題

円積問題，立方倍積問題，角の 3 等分はいずれも不可能であることが示される．

- 円積問題
  単位円の面積 π は整数係数の代数方程式を満たさない（超越数である）ことが示されている [リンデマン (1882)].

- 立方倍積問題
  $\sqrt[3]{2}$ を作図する問題で，$x^3 - 2$ の根は平方根の組み合わせでは表されない [ワンツェル (1837)].
- 角の 3 等分
  $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ に対して，$z^3 = \alpha$ となる z を作図する問題．これも平方根の組み合わせでは書かれない [ワンツェル (1837)]．例えば $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$z^3 = \alpha$ となる z を作図することはできない．

６．３次方程式，４次方程式の解法．

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ で与えられる．これは，方程式の係数についての式として得られている．ここで式というのは，多項式，分数式，べき乗根を組み合わせて書かれるものである．

このような解の公式を３次方程式，４次方程式，より高次の方程式に対して求めることが研究された．

３次方程式の解法（カルダノ）

まず，$x^3+mx-n=0$ を考えればよい．$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$ に注意する．もしも a と bが，$3ab=m$, $a^3-b^3=n$ を満たせば，$a-b$が，$x^3+mx=n$ の解である．$b=\dfrac{m}{3a}$ だから，$a^3-\dfrac{m^3}{27a^3}=n$, すなわち，$a^6-na^3-\dfrac{m^3}{27}=0$ を解けばよいが，これは a^3 についての２次方程式である．$b=\dfrac{m}{3a}$ だから，b も解けて，$x=a-b$ が解である．

４次方程式の解法 (フェラーリ)

$x^4+px^2+qx+r=0$ を考えればよい．
$x^4+2px^2+p^2=px^2-qx-r+p^2$ だから，
$(x^2+p)^2=px^2-qx-r+p^2$ を得る．
任意の y に対して，

$$(*)\quad \begin{aligned}(x^2+p+y)^2&=px^2-qx-r+p^2+2y(x^2+p)+y^2\\&=(p+2y)x^2-qx+(p^2-r+2py+y^2)\end{aligned}$$

が成立する．

右辺は x について２次式だから，y をうまく選べば，平方の形にすることができる．すなわち，判別式 $=0$ にすればよいが，
$(-q)^2-4(p+2y)(p^2-r+2py+y^2)=0$ は y についての３次方程式
$(q^2-4p^3+4pr)+(-16p^2+8r)y-20py^2-8y^3=0$ であるから，解ける．

解と係数の関係

3次方程式，$x^3+a_1x+a_0=0$ の解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすると，

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0, \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=a_1, \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-a_0$ である．

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする．$\omega^2+\omega+1=0, \omega^3=1$ である．

$u=\alpha_1+\omega^2\alpha_2+\omega\alpha_3, v=\alpha_1+\omega\alpha_2+\omega^2\alpha_3$ とすると，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ を勘案して，
$\alpha_1=\dfrac{1}{3}(u+v), \alpha_2=\dfrac{1}{3}(\omega u+\omega^2 v), \alpha_3=\dfrac{1}{3}(\omega^2 u+\omega v).$

ここで，$uv=-3a_1, u^3+v^3=-27a_0$ と計算される．

$u^3v^3=-27{a_1}^3$ だから，u^3, v^3 は $x^2+27a_0x-27{a_1}^3=0$ の解である．

4次方程式 $x^4+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ の解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ とする．

$\beta_1=\dfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)=\alpha_1+\alpha_2,$

$\beta_2=\dfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)=\alpha_1+\alpha_3,$

$\beta_3=\dfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4)=\alpha_1+\alpha_4$ と置く．

このとき，$\alpha_1=\dfrac{1}{2}(\beta_1+\beta_2+\beta_3), \alpha_2=\dfrac{1}{2}(\beta_1-\beta_2-\beta_3),$

$\alpha_3=\dfrac{1}{2}(-\beta_1+\beta_2-\beta_3), \alpha_4=\dfrac{1}{2}(-\beta_1-\beta_2+\beta_3).$

$\beta_1\beta_2\beta_3=-a_1,$

${\beta_1}^2+{\beta_2}^2+{\beta_3}^2=-2a_2,$

${\beta_1}^2{\beta_2}^2+{\beta_2}^2{\beta_3}^2+{\beta_3}^2{\beta_1}^2={a_2}^2-4a_0$

だから，

$(x-{\beta_1}^2)(x-{\beta_2}^2)(x-{\beta_3}^2)=x^3+2a_2x+({a_2}^2-4a_0)x-a_1^2$

ガロワ理論

しかし，５次方程式以上は累乗根を用いて，解の公式を書くことはできない．

アーベルにより，５次方程式に対して示され，ガロワにより，どのような代数方程式が解けるかが，決定された．

しかし，ガウスにより，代数方程式に解があることは知られている．

代数学の基本定理．

$P(x)$ を複素数係数 n 次多項式とする．$P(\alpha)=0$ となる複素数 α が存在する．

7．多項式写像

多項式 $P(x)$ の根のある場所の見当をつけるためには $|P(z)|$ の値をプロットしてみればよい．十進 BASIC を使って描いてみよう．

「目」になっているところに根があることが予想される．

実際，そこに解が存在していることは，$|P(z)|$ の極小値は 0 になることが知られていることからわかる．これは複素関数論で最大値原理と呼ばれているもので，通常，コーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}$$

から示される．

複素数 z の多項式 $f(z)$ の値を考えると，$f(z)$ に対して，$f(z+r(\cos\theta+i\sin\theta))$ を考えると，r が十分小の時に，$f(z)$ の周りを何度か回るという振る舞いを示す．これもパソコンで確かめてみよう．

このことを用いて，$|P(z)|$ の極小値が 0 でないときには矛盾が導かれる．代数学の基本定理の証明法の一つが得られる．

数式では，

$$f(z) - f(z_0) = a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \cdots + a_n(z-z_0)^n$$

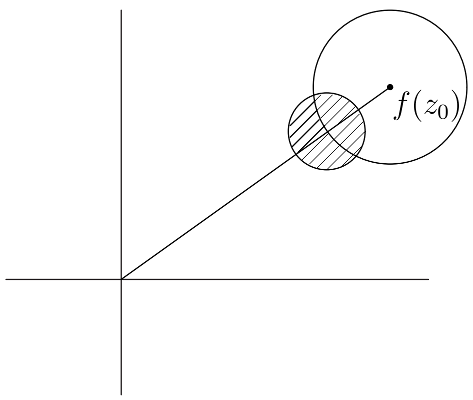
と書き換えて，$a_k \neq 0$ とする．$z - z_0 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると，

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) = a_k r^k \Big[&(\cos k\theta + i\sin k\theta) + \frac{a_{k+1}}{a_k} r(\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta) \\ &+ \cdots + \frac{a_n}{a_k} r^{n-k}(\cos n\theta + i\sin n\theta)\Big] \end{aligned}$$

$r < \dfrac{1}{2n}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|, \ldots, r < \left(\dfrac{1}{2n}\left|\dfrac{a_k}{a_n}\right|\right)^{\frac{1}{n-k}}$ とすれば，

$$f(z) - f(z_0) = a_k r^k\left[(\cos k\theta + i\sin k\theta) + g(r,\theta)\right]$$

で，$|g(r,\theta)| < \dfrac{1}{2}$ となる．



背理法で，$f(z)=0$ となる z が存在することを示す．

$f(z)$ が 0 にならないとする．$|f(z_0)|>0$ が最小値（極小値）となっているとする．すなわち,（z_0 の近くでの）$|f(z)|$ の値は，$|f(z_0)|$ 以上であるとする．このとき，前の議論に従って $\arg(\dfrac{f(z_0)}{a_k})=k\theta+\pi$ となるような θ をとれば，$|f(z)|$ の値は $|f(z_0)|$ の値よりも小になり，$|f(z_0)|$ が最小値（極小値）であるとしたことに矛盾する．

この証明を完成するには，最小値（極小値）を持つような z_0 が存在することを言えばよい．

これは，複素数平面上の関数 $|f(z)|$ は，複素数平面のどこかで，極小値をとるかという問題である．

これは，複素数平面の任意の半径の閉円板 $\{|z|\leqq r\}$ 上の連続関数は閉円板上で最小値をとることと，任意の正実数 a に対し，複素数平面の十分大きな円周 $\{|z|=r\}$ $(r\geqq r_0)$ 上での $|f(z)|$ の値は，a よりも大きいことからわかる．

演習の時間

多項式の定める写像の様子を十進ＢＡＳＩＣというソフトを使って理解しよう．

パソコン上で $f(z)=z^4+a_2z^2+a_3z+a_4$ について，$|f(z)|$ を色分けで書いてみよう．ここで a_2, a_3, a_4 を絶対値が 10 以下の複素数とする．

$|z|>4$ ならば，$|\frac{a_2}{z^2}|<\frac{10}{16}$, $|\frac{a_3}{z^3}|<\frac{10}{64}$, $|\frac{a_4}{z^4}|<\frac{10}{256}$ だから

$$|\frac{a_2}{z^2}|+|\frac{a_3}{z^3}|+|\frac{a_4}{z^4}|<\frac{210}{256}$$

従って，

$$|f(z)|\geqq\{1-(|\frac{a_2}{z^2}|+|\frac{a_3}{z^3}|+|\frac{a_4}{z^4}|)\}|z^4|>\frac{46}{256}|z|^4$$

次に，r の値を $0\leqq r\leqq 2.5$ に固定し，$f(r(\cos\theta+i\sin\theta))$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を描いてみよう．θ が増加するときに“ 反時計回りに ”ぐるぐる回る．r が増加すると，$|f(r(\cos\theta+i\sin\theta))|$ はどんどん増加する．その形は，円を４重にまいたものに近づく．

```
!abs_quart.BAS
OPTION ARITHMETIC COMPLEX
LET a2=COMPLEX(2,1)
LET a3=COMPLEX(2,-2)
LET a4=5
DEF f(z)=z^4+a2*z^2+a3*z+a4
LET h=4
SET WINDOW -h,h,-h,h
SET POINT STYLE 1
FOR px=0 TO PIXELX(h)
   FOR py=0 TO PIXELY(h)
      LET x0=PROBLEMX(px)
      LET y0=PROBLEMY(py)
      LET z=COMPLEX(x0,y0)
      SET POINT COLOR MOD(INT(ABS(f(z))),256)
      PLOT POINTS : x0, y0
   NEXT py
NEXT px

FOR rr=0.01 TO 2.5 STEP 0.01
   FOR th=0 TO 2*3.1416 STEP 0.00031416
      LET z=COMPLEX(cv,y0)
      SET POINT COLOR MOD(INT(rr/0.05),128)
      PLOT POINTS:rr*COS(th),rr*SIN(th)
```

```
      PLOT POINTS:RE(f(COMPLEX(rr*COS(th),rr*SIN(th)))),&
&                 IM(f(COMPLEX(rr*COS(th),rr*SIN(th))))
   NEXT th
NEXT rr
END
```

形が，円を４重にまいたものに近づいていくことはどのようなプログラムで見ることができるだろうか．

十進 BASIC は，フリーのソフトウェアでホームページ http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/ に情報があり，ダウンロードできる．

８．代数学の基本定理の証明

比較的容易に解の存在を示す方法．背理法で示す．

複素数平面の間の写像を考える．

$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ を考える．ここで $a_1, \ldots, a_n$ は複素数で $a_n\neq 0$ とする．

$f(z)=z^n\{1+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}\}$.

$z\longmapsto z^n$ は，$R(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を，$R^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$ に写す．半径 R^n の円を n 回まわる．

半径 R の円 $R(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ が，f によって，原点を通らない曲線に写るとする．半径 R の円を１回まわるときに，f による像の曲線が，原点の周りを何回まわるかを考える．

一般に，原点を通らない向きを持つ閉曲線に対し，回転数が定まる．

曲線が一つのパラメータに従って連続に変化するとき，原点を通過しない曲線である限り，回転数は不変である．

$f(z)=z^n\{1+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}\}$ について，$z=R(\cos\theta+i\sin\theta)$ について，$R>2n|a_1|$, $R>(2n|a_2|)^{\frac{1}{2}}, \ldots, R>(2n|a_n|)^{\frac{1}{n}}$ を満たす R をとると，

$$\begin{aligned}|1+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}| &\geqq 1-\{|\frac{a_1}{z}|+\cdots+|\frac{a_n}{z^n}|\}\\ &\geqq 1-\{\frac{|a_1|}{R}+\cdots+\frac{|a_n|}{R^n}\}\\ &\geqq 1-\{\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}\}\geqq\frac{1}{2}\end{aligned}$$

従って，

$$|f(z)|=R^n|1+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}|\geqq\frac{R^n}{2}$$

このような R に対して，$f(R(\cos\theta+i\sin\theta))$ は原点を通らない．

$0\leqq t\leqq 1$ に対して，

$$f_t(z)=z^n\{1+t(\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n})\}$$

とすると，$|f_t(z)|\geqq(1-\frac{t}{2})R^n$ だから，$f_t(R(\cos\theta+i\sin\theta))$ も原点を通らない．$f_0(R(\cos\theta+i\sin\theta))$ の回転数は n だから，$f_1(R(\cos\theta+i\sin\theta))=f(R(\cos\theta+i\sin\theta))$ の回転数も n である．

$f(z)=0$ となる z が存在しないとする．R を変化させたとき，$f(R(\cos\theta+i\sin\theta))$ は，$R=0$ となっても，回転数が n であるはずである．しかし，$R=0$ のとき $f(0)=a_n\neq 0$ への定値写像だから，$R=0$ のときの回転数は 0 である．これは矛盾．

９．多項式を超えて

代数学の基本定理により，多項式は複素数の範囲では１次式の積に書かれる．

x についての n 次多項式

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

に対して，$P(x) = 0$ の解を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とすると，

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$

となる．この１次式の積を展開すると，

$$\begin{aligned}
&a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)\\
=&\, a_n x^n - a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)x^{n-1} + \cdots\\
&\quad + (-1)^{n-1}a_n(\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n + \alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_n + \cdots + \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1})x\\
&\qquad + (-1)^n a_n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n
\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\\
&\cdots\\
a_1 &= (-1)^{n-1}a_n(\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n + \alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_n + \cdots + \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1})\\
a_0 &= (-1)^n a_n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n
\end{aligned}$$

などを得る．これらを n 次方程式の解と係数の関係，n 次多項式の根と係数の関係とよぶ．書き換えると，

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$$

$a_0 \neq 0$ のとき，

$$\frac{a_1}{a_0} = -\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}\right)$$

が得られる．

さて，多項式に対しての代数学の基本定理は，ガウス (1777–1855) により示されたものである．このころには，ニュートン (1643–1727)，ライプニッツ (1646–1716) により定式化された微分積分学は，一般に受け入れられていた．その発展を担った数学者の一人にオイラー (1707 - 1783) がいる．

オイラーの天才が世に知られるようになったのは，

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

の値が，$\dfrac{\pi^2}{6}$ となることを発表したことによるようである．

それは，現在，オイラー自身による精密な証明とともに知られている．しかし，より面白いのは，この値を最初に発見した方法である．このことについて，小林昭七先生による解説が，

`http://mathsoc.jp/publication/tushin/0504/kobayashi5-4.pdf`

にある．また，野海正俊先生による解説が，

`http://www.sci.kobe-u.ac.jp/seminar/pdf/noumi2007.pdf`

にある．

オイラーの時代

少しオイラーの時代１８世紀は，数学においてどのような時代だったかを復習しよう．

１６世紀には，三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, ネピア (1550 − 1617) によって発見された対数関数 $\log x$, それによって理解された指数関数 e^x など，実用的に非常に重要な関数が現れている．

ティコ・ブラーエ (1546 − 1601) は，天体の精密な観測をデンマーク王の援助のもとでベン島に天文台を建てて 1576 年から 1597 年まで観測を続けた．星の位置を 1 秒の誤差で決定するものであった．援助してくれたデンマーク王が亡くなり，プラハへ向かったティコ・ブラーエは神聖ローマ皇帝に雇われ，ケプラー (1571 − 1630) を助手にする．数学者であったケプラーは，ティコ・ブラーエの観測結果を数学の言葉でまとめ，1609 年（第１，第２法則）および 1619 年（第３法則）に公表した．

- 第 1 法則：惑星の軌道は太陽を焦点とする楕円である．
- 第 2 法則：惑星の運動の面積速度は一定である．
- 第 3 法則：惑星の軌道の楕円の長径の 3 乗と公転周期の 2 乗は比例する．

ケプラーは楕円の「焦点」という言葉を最初に使った数学者である．

そのころ，物が動くときには，押している力が存在しているという当時の常識に対して，ガリレオ (1564 − 1642) の慣性の法則が，実験によって示された．ガリレオは自由落下運動の落下距離が落下させた時間の 2 乗に比例することも実験で確かめている．(ガリレオは 1609 年に望遠鏡による星の観察を始めた．2009 年は世界天文年であった.)

一方，デカルト (1596 − 1650) は，座標を導入し，式で書かれる代数の世界と，図で書かれる幾何の世界は相互に翻訳できることを宣言した．

ニュートン (1643 − 1727) は，著書プリンピキアにおいて

- 万有引力の法則 $\|\vec{F}\| = G\dfrac{mM}{r^2}$
- 運動の第 1 法則＝慣性の法則
- 運動の第 2 法則＝運動方程式 $\vec{F} = m\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{q}}{\mathrm{d}t^2}$
- 運動の第 3 法則＝作用反作用の法則

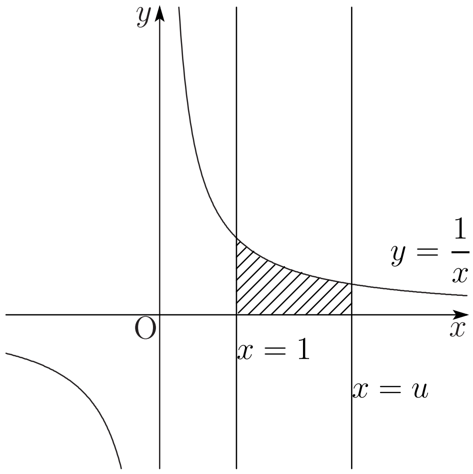
のもとで，ケプラーの法則を説明した．ニュートンは，微分の概念，加速度の概念にたどり着き，運動方程式を書いた．実際には，ニュートンは，微分の概念，加速度の概念を用いた文章を書き，図形的にそれを解いている．式は書かれているが，ほとんどが図形上の長さの関係に関するものである．

微分を $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, 積分を $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ と書き表したのは，ライプニッツ (1646 – 1716) （ライブニッツという発音がより正しい）である．積分 (integral) という語はヤコブ・ベルヌーイ (1654 – 1705) によるらしい．ライプニッツは「和 (summation)」という語を用い，記号 $\displaystyle\int$ は S を変形したものである．

対数関数と指数関数

ネピアが考案した対数表は，対数関数という正の実数に実数を対応させる関数として数学的に扱われるようになった．彼らの研究によって，$u > 0$ に対して，対数関数 $\log u$ を xy 平面に描いた $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフと x 軸，直線 $x = 1,\ x = u$ に囲まれた部分の面積（$0 < u < 1$ に対しては，-1 倍したもの）と定義すると扱いやすいことが分かってきた.

$$\log u = \int_1^u \frac{\mathrm{d}x}{x}$$



また,

$$\cdots,\frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^2},\frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 2^2,2^3,\cdots$$

あるいは,

$$\cdots,\frac{1}{3^3},\ \frac{1}{3^2},\frac{1}{3},\ 1,\ 3,\ 3^2,3^3,\cdots$$

のように定義される指数関数は，その底を $e = 2.7182818284590452354\ldots$ として定義すると数学的には扱いやすく，実際,

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

と定義されること，この指数関数 e^x は，対数関数 $\log x$ の逆関数であることなどが理解されるようになった.

無限和，無限積

極限の概念が理解されてくると，無限和や無限積が使われるようになってきた.

指数関数は,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

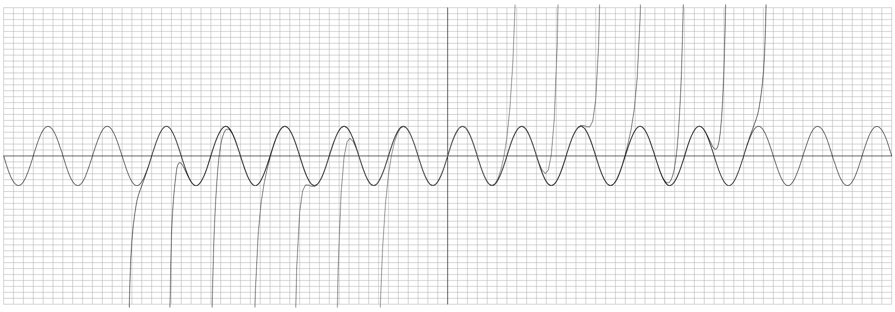
三角関数は,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

のようなテーラー展開（マクローリン展開）が得られている．

$\sin x$ のテーラー展開が収束する様子は，以下のようである．



この図は，テーラー展開の 13 次，25 次，37 次，
49 次，61 次，73 次，85 次までの部分和について
グラフを描いたものである

これらの関数は複素数を変数としても考えられるようになった．複素数の範囲では，単項式 z^n の定める写像は，複素数平面を原点を中心にして n 重に複素数平面に移している．

オイラーは，このような関数たちの間に，

$$e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{yi} + e^{-yi})$$

$$\sin y = \frac{1}{2i}(e^{yi} - e^{-yi})$$

という式が成り立つことを発見している．

指数関数 e^z が定める写像は，複素数平面の虚数部分が π の偶数倍の直線たちを，実軸の正の部分に，虚数部分が π の奇数の直線たちを実軸の負の部分に写し，0 を除く複素数平面を無限回覆うように写している．

この様子から，$\sin y$ が 0 になる y は，複素数の範囲でも π の整数倍に限られることが分かる．

問題． 複素数平面上で，写像 z^n, e^z の様子を図示せよ．複素数の範囲で考えた写像 $\sin z$ について，$\sin z = 0$ となる z は，π の整数倍であることを示せ．

オイラーが考えたこと

さて，オイラーが $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots$ の値をどのように求めようとしたかに戻ろう．

これまでの説明の流れからいうと次のような考え方である．ある $2n$ 次の多項式 $1+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$ が，$\pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm n$ を根にもっていたとする．そうするとその多項式は，次の多項式の定数倍である．

$$\begin{aligned}&(1+x)(1-x)(1+\frac{x}{2})(1-\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n})\\=&(1-x^2)(1-\frac{x^2}{2^2})\cdots(1-\frac{x^2}{n^2})\end{aligned}$$

これを展開すると，($u=x^2$ についての多項式になっているから）

$$1+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}$$

という形である．$u=x^2$ についての多項式

$$(1-u)(1-\frac{u}{2^2})\cdots(1-\frac{u}{n^2})=1+a_2u+a_4u^2+\cdots+a_{2n}u^n$$

の根は，$1,\ 2^2,\ \ldots,\ n^2$ であり，根と係数の関係から，

$$a_2=-(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})$$

となる．

そこで，n がどんどん大きくなるときに，多項式

$$P_n(x)=(1-x^2)(1-\frac{x^2}{2^2})\cdots(1-\frac{x^2}{n^2})$$

が，どう変化するかを考えて，その 2 次の係数 a_2 の変化を見れば，$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$ の値が，どう変化するかわかるはずである．

さて，問題の多項式 $P_n(x)$ に x を掛けた多項式 $xP_n(x)$ は，$-n$ から n までの整数を根にもつ．整数全体を根にもつような関数として $\sin\pi x$ がある．$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin\pi x}{x}=\pi$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{xP_n(x)}{x}=P_n(0)=1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}xP_n(x)$ と $\dfrac{\sin\pi x}{\pi}$ は，$x=0$ において，値は 0 で，接線の傾きは 1 である．そこで，

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$$

と予想される．一方，$\sin x$ のマクローリン展開（テーラー展開）は次のように書かれる．

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

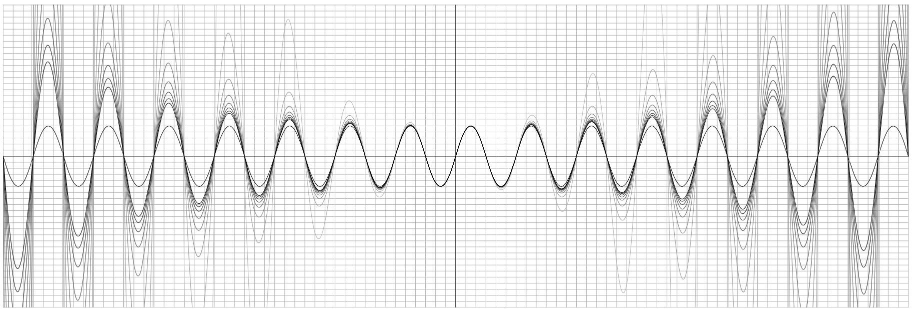
従って

$$\sin\pi x=\pi x-\frac{\pi^3}{3!}x^3+\frac{\pi^5}{5!}x^5-\cdots,$$

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=1-\frac{\pi^2}{3!}x^2+\frac{\pi^4}{5!}x^4-\cdots$$

が成り立つ．

従って，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$ であることが正しければ，$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots$ は $-a_2$ にあたる係数 $\dfrac{\pi^2}{6}$ に等しい．



この図は，P_{20}, P_{40}, P_{60}, P_{80}, P_{100},
P_{120}, P_{140}, P_{160} を描いたものである

ゼータ関数

さて，オイラーが

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

を上のように発見し，さらに正しい証明をつけた後に，任意の複素数 s に対し，

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$$

の研究がおこなわれるようになった．ここで，$n^s=e^{s\log n}$ である．オイラーは，上のように，$\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ だけでなく，すべての偶数 $2n$ に対し，$\zeta(2n)$ を求める公式を与えている．例えば，$\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6)=\dfrac{\pi^6}{945}$.

オイラーは，また，

$$\zeta(s)=\prod_{\substack{\text{素数}\\ p}}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}$$

を示している．正の偶数 $2n$ に対する $\zeta(2n)$ の値が円周率 π^{2n} の有理数倍になることを考えると，素数と円周率の間の不思議な関係を記述しているものである．複素数を変数とする $\zeta(s)$ は，リーマンにより深く研究され，リーマンのゼータ関数と呼ばれている．リーマン予想とは，負の偶数以外の点で $\zeta(s)=0$ ならば，s の実数部分は $\dfrac{1}{2}$ であるというものである．これは，ある正整数 n 以下の素数の割合がどういうものになるかという素数分布の研究に深くかかわっている．