

東京大学玉原国際セミナーハウス
2009年9月19日－21日

科学技術振興機構（JST）
「サイエンス・パートナーシップ・
プロジェクト事業（講座型学習活動）」
群馬県教育委員会高校教育課
東京大学大学院数理科学研究科

平成21年度群馬県高校生数学キャンプ 「面積と体積」

1. 9月19日 11:00－12:00 （関口英子）
面積と平面幾何
2. 9月19日 13:30－14:30 （古田幹雄）
平面のベクトルと多角形的面積
3. 9月19日 15:00－16:00 （大島利雄）
分解合同の定理
- 演習9月19日 16:30－17:30 （坪井 俊）
図形の重心 GeoGebra で楕円を焦点から24等分
4. 9月20日 9:00－10:00 （大島利雄）
放物線，円（アルキメデス，関孝和）
5. 9月20日 10:30－11:30 （古田幹雄）
関数のグラフと面積，積分
6. 9月20日 15:00－16:00 （関口英子）
多面体の体積 カバリエリの原理 球の体積 球面の面積
- 演習9月20日 16:30－17:30 （坪井 俊）
運動方程式 BASICによる軌道の計算
7. 9月21日 9:00－10:00 （大島利雄）
微分積分学の基本定理
8. 9月21日 10:30－11:30 （古田幹雄）
惑星の楕円軌道

面積と体積

1 面積の概念

面積の定義，性質については，ユークリッドの「原論」にも書かれている．面積は平面幾何の根幹をなす概念の一つである．普段はよくわかっていると思って使っている概念であるが，その数学的な本質は，単純なものではなく，それをとらえようとする研究は現代の数学につながっている．

数学が，公理から論理によって構成されるということは，ユークリッドの「原論」以後確立した考え方となっている．しかし，何を公理とするか，数学が何を表現しているかという議論は，現在でも続いている．ユークリッドの「原論」においては，2つの三角形や平行四辺形の面積が等しいことをいろいろな場合に証明している．そのときには，合同な図形は面積が等しいこと，図形 X, X' の面積が等しく，図形 Y, Y' の面積が等しいときに，交わりのない和集合 $X \cup Y, X' \cup Y'$ の面積は等しいことなどを使っている．このことは，20世紀に入りルベーグが面積の概念をまとめたときに重要な指針となった．

1.1 ユークリッドの面積

ユークリッドの「原論」において整備された平面幾何を高等学校までに学ぶのであるが，そこでは，多角形に面積があることは，公理の一部として考えられている．そのうえで，面積という量（つまり平面図形に対して定義される数値）は，量の一般法則（等号，不等号の公理）に従うこととされる．面積に対して，特に要請される性質は，「合同な図形は面積が等しいこと」と「多角形を2つの多角形に分割すると，もとの面積は，分割して得られる2つの多角形の面積の和になること」である．

この性質を用い，長方形の面積を，直角を挟む2辺の長さの積と定義すると，平行四辺形の面積は，1辺の長さとし高さの積であることが導かれ，三角形の面積は， $\frac{1}{2}$ (底辺 $\times$ 高さ)であることが導かれる．実際，図1の左の図において，平行四辺形 $ABD'C'$ と長方形 $ABDC$ について，それらに合同な三角形 $AC'C$ と三角形 $BD'D$ を加えれば，同じ台形を得る．従って，平行四辺形の面積は，1辺の長さとし高さの積である．また，図1

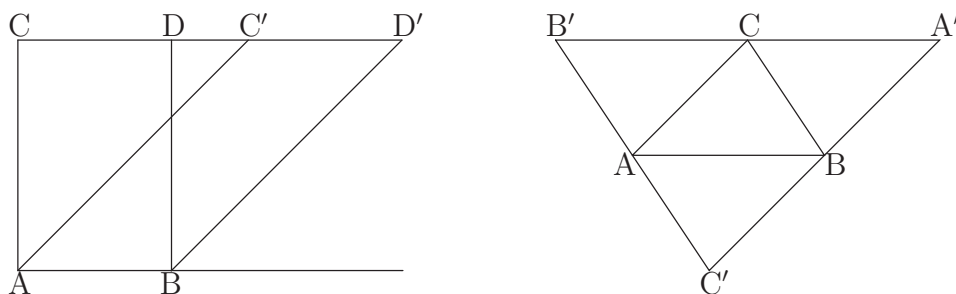


図 1: 左：平行四辺形の面積．右：三角形の面積．

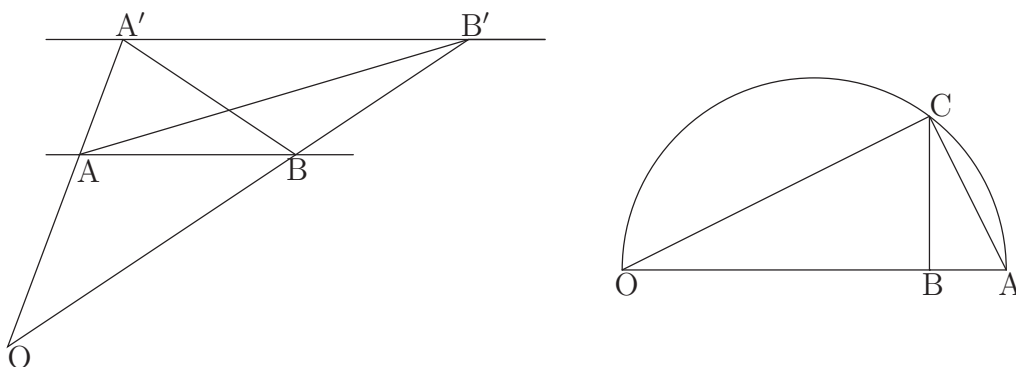


図 2: 左：平行線と比例. 右：長方形と等しい面積を持つ正方形（比例中項）.

の右の図において，三角形 ABC と合同な三角形を加えれば，平行四辺形を得る．合同な三角形の取り方は 3 通りあるが，得られた 3 つの平行四辺形の面積は等しい．従って，三角形の面積は， $\frac{1}{2}(\text{底辺} \times \text{高さ})$ である．

ユークリッドの「原論」の中で注目されるのは，平行線についての比例の性質は，面積を用いて導かれていること，長方形と同じ面積の正方形の作図の仕方が述べられていることなどである（有理数の比についての平行線の比例の性質は，有限個の合同な三角形に分割して示すことができるが，そのことから無理数の比についての平行線についての比例の性質を導くためには，デデキンド (1831–1916) の切断に対応する議論が必要となる）．

実際，図 2 の左の図において，直線 $A'B'$ と直線 AB が平行ならば，三角形 ABA' と三角形 ABB' の面積は等しい．線分の長さの比 $OA : AA'$ は，三角形の面積の比 $\triangle ABO : \triangle ABA'$ に等しく，線分の長さの比 $OB : BB'$ は，三角形の面積の比 $\triangle ABO : \triangle ABB'$ に等しい．従って， $OA : AA' = OB : BB'$ ．

また，図 2 の右の図において，線分 OA, OB に対し， $OA > OB$ とする． OA を直径とする半円を描き， B における垂線と半円との交点を C とする．このとき直角三角形の相似により， $OA : OC = OC : OB$ ，すなわち， $OC^2 = OA \cdot OB$ である．

1.2 座標と面積

座標により点の位置を表すことは，17 世紀の初めにデカルト (1596–1650) により始められた．我々は，座標を使った議論により，面積を考えよう．

平面の点を (x, y) という座標で表す．原点 $O(0, 0)$ ，点 (x, y) を与えると，座標軸に平行な辺をもつ平面上の長方形を考えることが出来る．この長方形の頂点は $(0, 0)$ ， $(x, 0)$ ， (x, y) ， $(0, y)$ である．この長方形の面積は， $|xy|$ であるとする． $(0, 0)$ ， $(x, 0)$ ， (x, y) を頂点とする直角三角形， $(0, 0)$ ， $(0, y)$ ， (x, y) を頂点とする直角三角形の面積は， $\frac{|xy|}{2}$ であるとする．これら 2 つの三角形は合同であるから，合同な図形の面積は等しいとすると，このように定めることが必要である．

2 点 $P(x, y)$ ， $Q(u, v)$ を与えると原点 $O(0, 0)$ とともに，三角形 OPQ を考えることが出来る．この三角形の面積を $\frac{|xv - yu|}{2}$ と定めると，この定義は上の直角三角形の場合の拡張になっている．

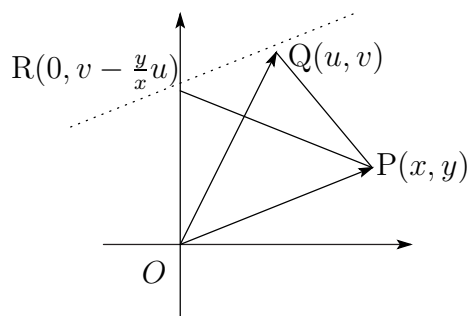


図 3: 三角形 OPQ の面積.

この書き方には、高校生でも大学生でも違和感があるに違いない。「三角形 OPQ の面積を計算すると、 $\frac{|xv - yu|}{2}$ になる」というほうがしっくりくるだろう。「三角形 OPQ の面積を計算すると $\frac{|xv - yu|}{2}$ になる」というためには、面積の定義が先になければならない。これまでに長方形、直角三角形の面積しか定義されていなければ、それ以外の図形の面積については、前節で説明したように、『多角形を 2 つの多角形に分割すると、もとの面積は、分割して得られる 2 つの多角形の面積の和になる』という公理を認めて計算することになる。認めればよいという考え方もあるが、この公理が矛盾を導く可能性があるという問題がおこる。それを議論しようとする、この公理のなかに「多角形」、「多角形の面積」、「分割」というまだ定義されていない言葉が使われていることに気がつくのである。従って、上のように三角形 OPQ の面積を座標を用いて定義したのである。

念のため、普通の三角形の面積と合っていることを確認はしておこう（面積を数値的に定義すると言う立場では、不要である）。図 3 のように、 $P(x, y)$, $Q(u, v)$ が与えられているときに、 Q を通り、 OP に平行な直線と、 y 軸との交点 R は $(0, v - \frac{y}{x}u)$ で与えられる。ここで、底辺 OP に対する高さが等しい三角形 OPQ と三角形 OPR の面積は等しい。一方、三角形 OPR の底辺 OR に対する高さは x であり、三角形 OPR の面積は、 $\frac{1}{2}(v - \frac{y}{x}u)x = \frac{1}{2}(xv - yu)$ となる。

一般に、 $P(x, y)$, $Q(u, v)$, $R(z, w)$ によって定まる三角形 PQR の面積を

$$\frac{|(x - z)(v - w) - (y - w)(u - z)|}{2} = \frac{|xv - yu + zy - xw + uw - zv|}{2}$$

とおくと、これもこれまでの定義の拡張になっており、さらに平行移動で不変である。平行移動で不変であることは後で一般の多角形について示す。

1.3 座標を成分とするベクトル

$xv - yu$ は、点 P と Q の座標をならべた行列 (matrix) $\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ の行列式 (determinant)

と呼ばれる。これを $\det \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ と書く。この 2 行 2 列の場合の行列式は、座標を成分

とするベクトル $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{Q} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の**ベクトル積**とも呼ばれ、このテキストでは、 $\vec{P} \times \vec{Q}$ と書く。

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \det \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = xv - yu$$

点 P と Q の座標を成分とするベクトル $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{Q} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は、点 P と Q の**位置ベクトル**と呼ばれる。これらは、原点 O を始点、点 P あるいは点 Q を終点とする矢印で表わされる。有向線分 OP, 有向線分 OQ と呼ばれる。

$\frac{1}{2}\vec{P} \times \vec{Q}$ は、半直線 OP を平角未満の正の回転で半直線 OQ に重ねることが出来るときに正で、平角未満の負の回転でそう出来るときに負になる。 $\frac{1}{2}\vec{P} \times \vec{Q}$ は、三角形 OPQ の符号付きの面積であると考えられる。

この 2 次元のベクトル積については、次の 2 つの計算法則が成立する。

- 実数 a_1, a_2 , 平面のベクトル $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}$ に対し、

$$(a_1\vec{P}_1 + a_2\vec{P}_2) \times \vec{Q} = a_1(\vec{P}_1 \times \vec{Q}) + a_2(\vec{P}_2 \times \vec{Q})$$

- $\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$

これらの法則は、定義式 $\vec{P} \times \vec{Q} = xv - yu$ からすぐにわかる。さらに、行列式あるいはベクトル積は、 x 軸方向の定数倍あるいは y 軸方向の定数倍に対して、同じ定数倍となり、 k 倍の相似変換に対しては、 k^2 倍となる。

上で定義した三角形 PQR の面積は、

$$\frac{1}{2}|\vec{P} \times \vec{Q} + \vec{Q} \times \vec{R} + \vec{R} \times \vec{P}|$$

となっている。この式は、原点 O が三角形の内部にあるときには、3 つの三角形 $\triangle OPQ$, $\triangle OQR$, $\triangle ORP$ の面積の和として $\triangle PQR$ の面積を表している。原点 O が三角形の外部で辺の延長上にないときには、 $\triangle OPQ$, $\triangle OQR$, $\triangle ORP$ のうちの 2 つの三角形と 1 つの三角形の面積の差として $\triangle PQR$ の面積を表している。図 4 参照。

さらに、 $\vec{P} \times \vec{Q} + \vec{Q} \times \vec{R} + \vec{R} \times \vec{P}$ が正であるのは、三角形の辺上を頂点 P, Q, R の順にたどるとき三角形が辺の左側にあるときで、負であるのは、右側にあるときである。 $\frac{1}{2}(\vec{P} \times \vec{Q} + \vec{Q} \times \vec{R} + \vec{R} \times \vec{P})$ は三角形 PQR の符号付き面積と考えられる。

1.4 行列

ベクトル $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と行列 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ に対して、その積は、

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$$

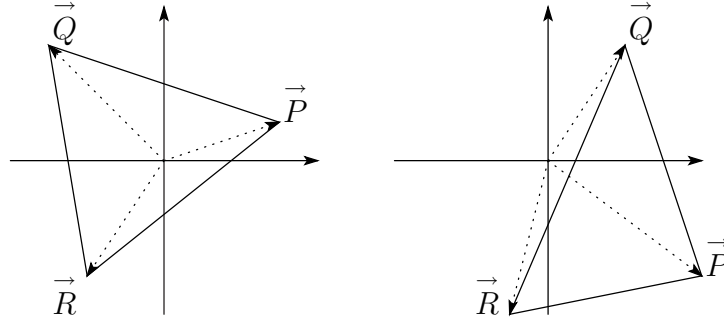


図 4: 三角形 PQR の面積.

で定義され, 行列 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ の積は,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy & au + cv \\ bx + dy & bu + dv \end{pmatrix}$$

で定義される.

行列式は,

$$\det \left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$$

を満たす. 実際, 左辺は

$$(ax + cy)(bu + dv) - (bx + dy)(au + cv),$$

右辺は,

$$(ad - bc)(xv - yu)$$

で, 左辺を展開して整理すると右辺を展開したものに等しいことがわかる.

平面上の回転移動は, 行列で表される. 図5参照. (s, t) を原点からの距離が1の点とする. $(1, 0)$ を (s, t) に移動する原点を中心とする回転で, $(x, 0)$ は (sx, tx) に移動する. また, $(0, 1)$ は $(-t, s)$ に移動するから, $(0, y)$ は, $(-ty, sy)$ に移動する. 従って, ベクトルの和の取り方を考えると, (x, y) は, $(sx - ty, tx + sy)$ に移動する. これは,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} sx - ty \\ tx + sy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書かれる.

三角形の面積が回転で不変であることが行列式の性質からわかる. すなわち, 原点 $O(0, 0)$, 点 $P(x, y)$, $Q(u, v)$ を頂点とする三角形 OPQ に対して, その面積は,

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \right|$$

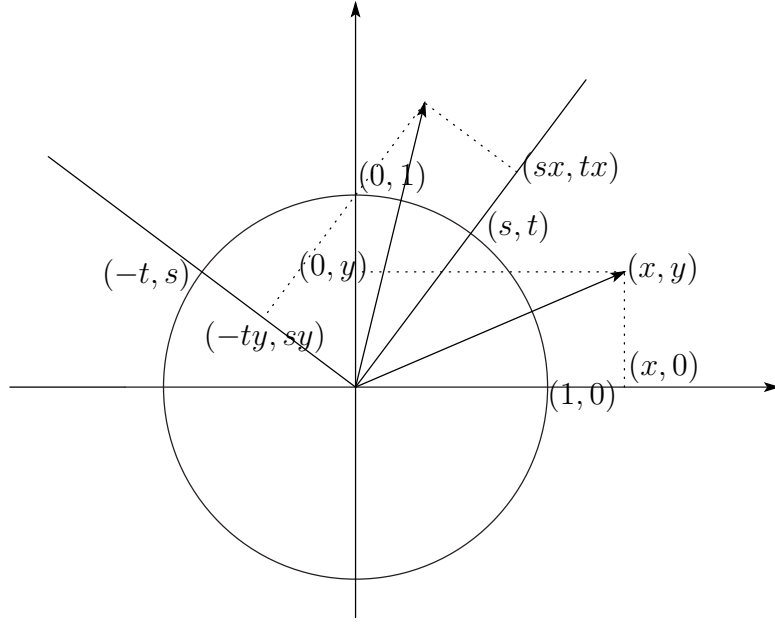


図 5: ベクトルの回転.

である. $(1, 0)$ を (s, t) に移動する原点を中心とする回転で, P は, 座標 (x', y') が

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられる点 P' に移動し, Q は, 座標 (u', v') が

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

で与えられる点 Q' に移動する. このとき, 2つの点 P', Q' の座標をならべた行列は,

$$\begin{pmatrix} x' & u' \\ y' & v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$$

となる. 三角形 $OP'Q'$ の面積は,

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x' & u' \\ y' & v' \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \left(\begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \right) \right|$$

となる.

上で計算した行列式の性質から, この値は, $\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \det \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \right|$ となる.

ここで, (s, t) は原点からの距離が1の点であるから $\det \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix} = s^2 + t^2 = 1$ であ

る. 従って, $\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x' & u' \\ y' & v' \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \right|$ である.

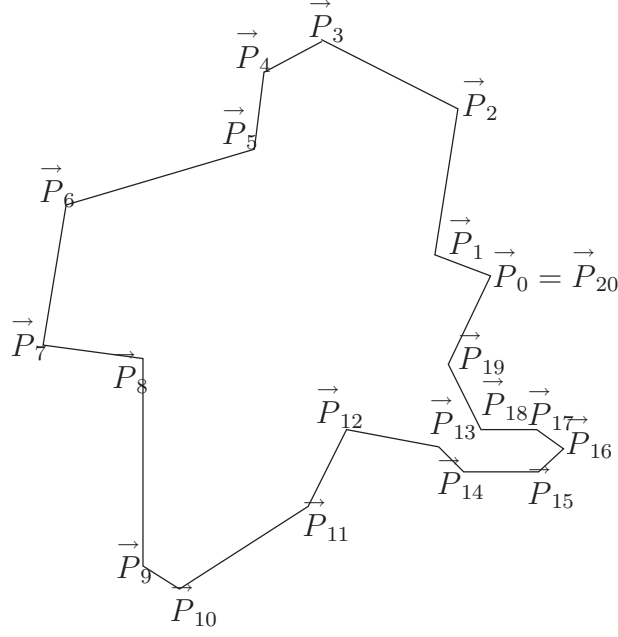


図 6: 多角形 $(P_0, P_1, \dots, P_{19}, P_{20} = P_0)$

この計算は、ベクトル

$$\vec{P}' = \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix} \vec{P}, \quad \vec{Q}' = \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix} \vec{Q}$$

に対して,

$$\vec{P}' \times \vec{Q}' = \vec{P} \times \vec{Q}$$

であるということを述べている. 従って, 任意の三角形 PQR に対して, 回転移動して得られる三角形の面積はもとの三角形の面積と等しい. 実際, $\vec{R}' = \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix} \vec{R}$ として,

$$\vec{P}' \times \vec{Q}' + \vec{Q}' \times \vec{R}' + \vec{R}' \times \vec{P}' = \vec{P} \times \vec{Q} + \vec{Q} \times \vec{R} + \vec{R} \times \vec{P}$$

となり, 両辺の絶対値をとって, $\frac{1}{2}$ 倍したものは, もちろん等しい.

1.5 多角形の面積

平面の多角形は, 有限個の点 $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$ ($k \geq 3$) とそれを順に結ぶ線分 $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{k-1}P_k$ ($P_k = P_0$) によって定義される図形である. ただし, 2つの線分 $P_{i-1}P_i, P_{j-1}P_j$ が共通部分をもてば, その点は, $i = j - 1$ の場合の $P_i = P_{j-1}$, $j = i - 1$ の場合の $P_j = P_{i-1}$, $P_0P_1, P_{k-1}P_k$ の場合の $P_k = P_0$ にかぎるとする.

$P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$ を位置ベクトル $\vec{P}_0, \vec{P}_1, \dots, \vec{P}_{k-1}$ ($\vec{P}_k = \vec{P}_0$) で表し, その面積を

$$\frac{1}{2} |\vec{P}_0 \times \vec{P}_1 + \vec{P}_1 \times \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_{k-2} \times \vec{P}_{k-1} + \vec{P}_{k-1} \times \vec{P}_k|$$

で定義する.

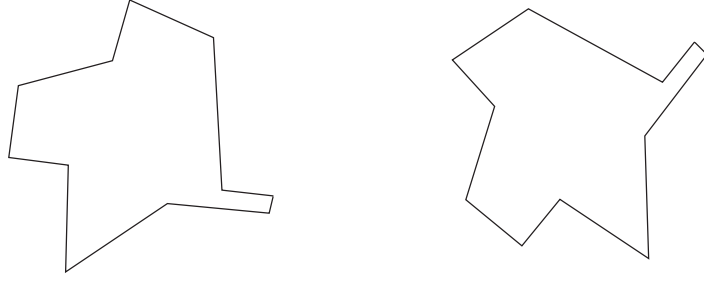


図 7: 多角形の面積は, 回転と平行移動で不変である.

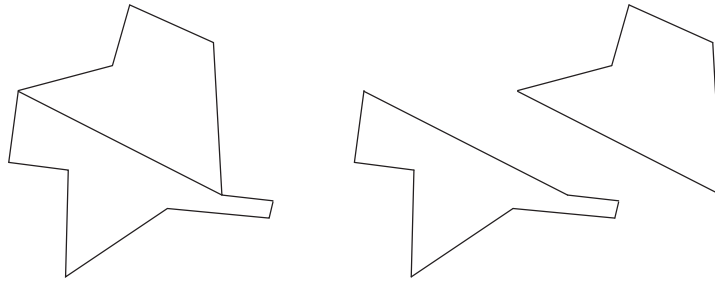


図 8: $S(X) = S(X_1) + S(X_2)$

ここで, 面積を正にするために絶対値をとっているのが, $\vec{P}_0 \times \vec{P}_1 + \vec{P}_1 \times \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_{k-2} \times \vec{P}_{k-1} + \vec{P}_{k-1} \times \vec{P}_k$ の値が正になるのは, 多角形の内部が P_0 から P_1 に向かう線分の左側の時であり, 負になるのは右側の時である. $\frac{1}{2}(\vec{P}_0 \times \vec{P}_1 + \vec{P}_1 \times \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_{k-2} \times \vec{P}_{k-1} + \vec{P}_{k-1} \times \vec{P}_k)$ を多角形 $(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, P_k = P_0)$ の符号付き面積と呼ぶ.

多角形の符号付き面積の定義は, 次のようなものである. $P_0(x_0, y_0), \dots, P_k(x_k, y_k) = P_0(x_0, y_0)$ の座標を, まず 2 行 $k+1$ 列に書き並べる.

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & x_1 & \cdots & x_{k-1} & x_k \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_{k-1} & y_k \end{array}$$

ここで, 左上右下の積の和から左下右上の積の和を引いたものの $\frac{1}{2}$ を計算するのである.

多角形の面積は, 2 つの性質を持つ.

平面上の多角形 $X = (P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, P_k = P_0)$ の面積 $S(X)$ は, 次の性質を持つ.

- (1) $S(X)$ は, 平面上の回転と平行移動で不変である (図 7).
- (2) 多角形 X_1, X_2 が辺のみを共有するときには, それらを合わせた多角形 $X = X_1 \cup X_2$ に対して, $S(X) = S(X_1) + S(X_2)$ となる (図 8).

これら 2 つの性質は, 上の定義式から証明される.

- (1) の主張のうち, 平行移動で不変であることについては, ベクトル $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{Q} =$

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ のベクトル積 $\vec{P} \times \vec{Q} = \det \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ の前に述べた次の性質を使う.

- $\vec{Q} \times \vec{P} = -\vec{P} \times \vec{Q}$

- $\vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ に対し,

$$(\vec{P} + \vec{A}) \times (\vec{Q} + \vec{B}) = \vec{P} \times \vec{Q} + \vec{P} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{Q} + \vec{A} \times \vec{B}$$

多角形 $X = (P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, P_k = P_0)$ を (a, b) だけ平行移動して得られた多角形 $X' = (P'_0, P'_1, \dots, P'_{k-1}, P'_k = P'_0)$ の頂点の位置ベクトルは,

$$\vec{P}'_0 = \vec{P}_0 + \vec{A}, \vec{P}'_1 = \vec{P}_1 + \vec{A}, \dots, \vec{P}'_{k-1} = \vec{P}_{k-1} + \vec{A}, \vec{P}'_k = \vec{P}_k + \vec{A}$$

となる. そこで, $\vec{P}'_0 \times \vec{P}'_1 + \vec{P}'_1 \times \vec{P}'_2 + \dots + \vec{P}'_{k-2} \times \vec{P}'_{k-1} + \vec{P}'_{k-1} \times \vec{P}'_k$ に上の式を代入して計算する.

$$\begin{aligned} & (\vec{P}_0 + \vec{A}) \times (\vec{P}_1 + \vec{A}) + (\vec{P}_1 + \vec{A}) \times (\vec{P}_2 + \vec{A}) \\ & + \dots + (\vec{P}_{k-2} + \vec{A}) \times (\vec{P}_{k-1} + \vec{A}) + (\vec{P}_{k-1} + \vec{A}) \times (\vec{P}_k + \vec{A}) \\ & = \vec{P}_0 \times \vec{P}_1 + \vec{P}_0 \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{P}_1 + \vec{A} \times \vec{A} \\ & + \vec{P}_1 \times \vec{P}_2 + \vec{P}_1 \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{P}_2 + \vec{A} \times \vec{A} \\ & + \dots + \vec{P}_{k-2} \times \vec{P}_{k-1} + \vec{P}_{k-2} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{P}_{k-1} + \vec{A} \times \vec{A} \\ & + \vec{P}_{k-1} \times \vec{P}_k + \vec{P}_{k-1} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{P}_k + \vec{A} \times \vec{A} \end{aligned}$$

ここで, $\vec{A} \times \vec{A} = 0, \vec{P}_i \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{P}_i, (i = 0, \dots, k; \vec{P}_k = \vec{P}_0)$ だから, 最後の式は, $S(X)$ に等しい.

(1) の主張のうち, の原点を中心とする回転で不変であることは, 三角形の場合と同様である. 三角形 OPQ について計算したことから, P_i を回転移動した頂点を P'_i とするとき, その位置ベクトルについて, $\vec{P}_i \times \vec{P}_{i+1} = \vec{P}'_i \times \vec{P}'_{i+1} (i = 0, \dots, k-1)$ である. 従ってこれらの和は等しく, 絶対値をとり, $\frac{1}{2}$ 倍したものも等しい.

(2) については, まず状況を式で表すことが大切である.

$$\begin{aligned} X_1 &= (P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, P_k = P_0), \\ X_2 &= (Q_0, Q_1, \dots, Q_{\ell-1}, Q_\ell = Q_0) \end{aligned}$$

で $P_{k-1} = Q_0, Q_{\ell-1} = P_0$ であり,

$$X_1 \cup X_2 = (P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, Q_0, Q_1, \dots, Q_{\ell-1} = P_0)$$

が多角形であると言うのが仮定である. このとき, $S(X)$ を計算して, $S(X_1) + S(X_2)$ と等しいことを示せばよい.

ここで, 符号の問題が生じる. ここまでは, 多角形をひとつながりの線分としてきたことに注意する.

次のことがわかる.

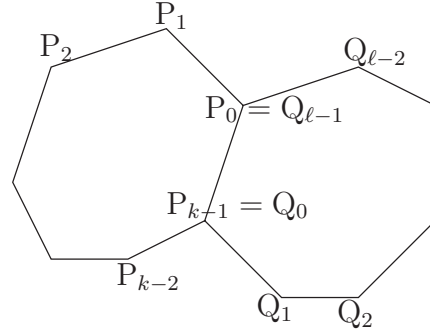


図 9: $X_1 = (P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, P_k = P_0)$, $X_2 = (Q_0, Q_1, \dots, Q_{l-1}, Q_l = Q_0)$

- 多角形は、平面を有界な**内部**と無限に広がっている**外部**に分けている。

実際の多角形で計算してみると、多角形 $X = (P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, P_k = P_0)$ の边上を、 $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, P_k = P_0$ の順にたどるとき、内部が辺の左側にあるときに

$$\frac{1}{2}(\vec{P}_0 \times \vec{P}_1 + \vec{P}_1 \times \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_{k-2} \times \vec{P}_{k-1} + \vec{P}_{k-1} \times \vec{P}_k)$$

の値は正であり、内部が辺の右側にあるときにこの値は負である。

このことを認めると、「多角形 X_1, X_2 が辺のみを共有する」とは、 X_1 の内部と X_2 の内部が交わらないことを意味している。従って、上のように名付けた頂点を順にたどるとき、 X_1 の内部、 X_2 の内部はともに辺の左側にあるか、ともに辺の右側にあるかのどちらかである。従って、それらの符号付き面積

$$\frac{1}{2}(\vec{P}_0 \times \vec{P}_1 + \vec{P}_1 \times \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_{k-2} \times \vec{P}_{k-1} + \vec{P}_{k-1} \times \vec{P}_k),$$

$$\frac{1}{2}(\vec{Q}_0 \times \vec{Q}_1 + \vec{Q}_1 \times \vec{Q}_2 + \dots + \vec{Q}_{l-2} \times \vec{Q}_{l-1} + \vec{Q}_{l-1} \times \vec{Q}_l)$$

の符号は等しい。また、 $\vec{P}_{k-1} = \vec{Q}_0 = \vec{Q}_l$, $\vec{P}_k = \vec{P}_0 = \vec{Q}_{l-1}$ だから、 $\vec{P}_{k-1} \times \vec{P}_k + \vec{Q}_{l-1} \times \vec{Q}_l = 0$ となる。従って、

$$\begin{aligned} S(X_1) + S(X_2) &= \frac{1}{2}|\vec{P}_0 \times \vec{P}_1 + \vec{P}_1 \times \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_{k-2} \times \vec{P}_{k-1} + \vec{P}_{k-1} \times \vec{P}_k| \\ &\quad + \frac{1}{2}|\vec{Q}_0 \times \vec{Q}_1 + \vec{Q}_1 \times \vec{Q}_2 + \dots + \vec{Q}_{l-2} \times \vec{Q}_{l-1} + \vec{Q}_{l-1} \times \vec{Q}_l| \\ &= \frac{1}{2}|\vec{P}_0 \times \vec{P}_1 + \vec{P}_1 \times \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_{k-2} \times \vec{P}_{k-1} + \vec{P}_{k-1} \times \vec{P}_k \\ &\quad + \vec{Q}_0 \times \vec{Q}_1 + \vec{Q}_1 \times \vec{Q}_2 + \dots + \vec{Q}_{l-2} \times \vec{Q}_{l-1} + \vec{Q}_{l-1} \times \vec{Q}_l| \\ &= \frac{1}{2}|\vec{P}_0 \times \vec{P}_1 + \vec{P}_1 \times \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_{k-2} \times \vec{P}_{k-1} \\ &\quad + \vec{Q}_0 \times \vec{Q}_1 + \vec{Q}_1 \times \vec{Q}_2 + \dots + \vec{Q}_{l-2} \times \vec{Q}_{l-1}| \\ &= S(X_1 \cup X_2) \end{aligned}$$

ここまでは、多角形 X_1, X_2 が、1つの辺のみを共有するときを問題にしたが、この証明は、多角形 X_1, X_2 が、内部では交わらず、いくつかの辺を共有するときにも通用するものである。

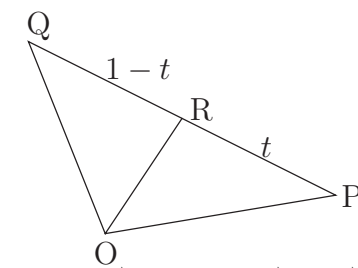


図 10: $\vec{R} = (1-t)\vec{P} + t\vec{Q}$

多角形 X に対して、面積を定義して、性質 (1), (2) を満たすことをみた。多角形を内部と辺をあわせた集合としてみると、辺の上に平角の頂点をつくるとどうなるかが、少し問題となる。すなわち、多角形が2つの多角形の和集合であるとき、面積が和になるという (2) の性質を、辺上の点で分割することを考えると、この点を新たに頂点と考えても面積は変わらないことを示せばよい。

R が PQ の内分点であるとき、三角形 OPQ の面積が三角形 OPR と三角形 ORQ の和になることを示すことである。我々の立場では、 $\vec{R} = (1-t)\vec{P} + t\vec{Q}$ ($0 \leq t \leq 1$) であることから、

$$\begin{aligned}\vec{P} \times \vec{R} + \vec{R} \times \vec{Q} &= \vec{P} \times ((1-t)\vec{P} + t\vec{Q}) + ((1-t)\vec{P} + t\vec{Q}) \times \vec{Q} \\ &= (1-t)\vec{P} \times \vec{P} + t\vec{P} \times \vec{Q} + (1-t)\vec{P} \times \vec{Q} + t\vec{Q} \times \vec{Q} \\ &= \vec{P} \times \vec{Q}\end{aligned}$$

となるということである。

1.6 平面の多角形の内部と外部

多角形は、平面を2つの部分（有界な部分と非有界な部分）に分ける。その有界な部分を多角形の内部と呼ぶ。この2つの部分は、その部分に属する任意の2点を、多角形と交わらない折れ線で結ぶことが出来、内部の点と外部の点を結ぶ折れ線は多角形と必ず交わるという性質を持っている。

これは、平面上の単純閉曲線（円周からの1対1連続写像の像）に対して成立することが証明されている。ジョルダン (1838 – 1922) の閉曲線定理と呼ばれるこの定理は、ポアンカレ (1854 – 1912) の予想を定式化し証明したトポロジーの研究につながっている。

多角形が、平面を2つの部分に分けることは、頂点の個数についての数学的帰納法で次のように示す。

$k = 3$ の三角形の場合は、内部と外部に分けている。頂点の個数が $k - 1$ 以下の多角形に対してこの命題が正しいとして、 k 角形 $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_k = P_0)$ に対して考える。この k 角形に平角をもつ頂点があれば、頂点の個数が少ない多角形が平面を内部と外部に分けているという帰納法の仮定により正しい。

三角形 $P_{k-1}P_0P_1$ をとる。もしも、三角形 $P_{k-1}P_0P_1$ が、辺 $P_{k-1}P_0$, P_0P_1 だけを多角形と共有し、ほかの部分と交わらないならば、多角形 $(P_{k-1}, P_1, P_2, \dots, P_{k-1})$ を考え

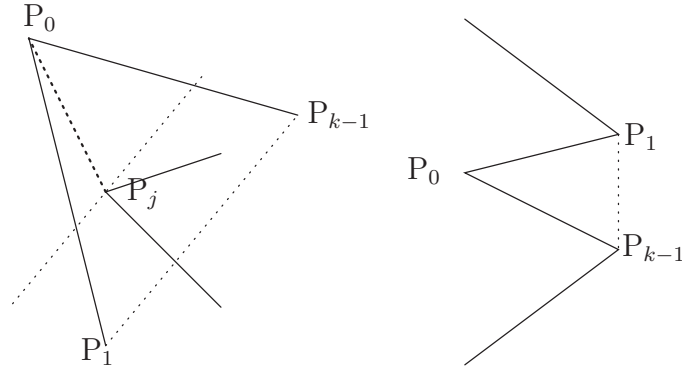


図 11: 多角形の内部, 外部

る. 三角形 $P_{k-1}P_0P_1$ の内部が, 多角形 $(P_{k-1}, P_1, P_2, \dots, P_{k-1})$ の外部にあれば, 三角形 $P_{k-1}P_0P_1$ の内部, 線分 $P_{k-1}P_1$ の内部, 多角形 $(P_{k-1}, P_1, P_2, \dots, P_{k-1})$ の内部を合わせたものが, 多角形 $(P_0, \dots, P_k = P_0)$ の内部となる. 三角形 $P_{k-1}P_0P_1$ の内部が, 多角形 $(P_{k-1}, P_1, P_2, \dots, P_{k-1})$ の内部にあれば, 多角形 $(P_{k-1}, P_1, P_2, \dots, P_{k-1})$ の内部から, 三角形 $P_{k-1}P_0P_1$ を除いたものが, 多角形 $(P_0, \dots, P_k = P_0)$ の内部となる. 図 11 の右図参照.

三角形 $P_{k-1}P_0P_1$ に多角形の他の辺が交わるとする. 三角形 $P_{k-1}P_0P_1$ の内部または辺上に他の頂点が存在する. それらの頂点の中で, 辺 $P_{k-1}P_1$ からの距離が最大のものをとり, それを P_j とすると, 線分 P_0P_j は, 多角形の辺と交わらない. もしも交わったとするとその辺の一方の頂点は, 三角形 $P_{k-1}P_0P_1$ 内にあり, $P_{k-1}P_0P_1$ からの距離が, P_j よりも大きいからである. 図 11 の左図参照.

さて, 2つの多角形 $(P_0, P_1, \dots, P_j, P_0)$, $(P_0, P_j, \dots, P_k = P_0)$ を考えると, $j \neq 1$, $j \neq k-1$ だから, この2つの多角形の頂点の個数は $k-1$ 以下である. 帰納法の仮定から, この2つの多角形は平面を内部と外部に分ける. まず, $(P_0, P_1, \dots, P_j, P_0)$ の内部と $(P_0, P_j, \dots, P_k = P_0)$ の内部が, 交わりを持たないとすると, $(P_0, P_1, \dots, P_j, P_0)$ の内部, 線分 P_0P_j の内部, $(P_0, P_j, \dots, P_k = P_0)$ の内部の和集合が, 多角形 $(P_0, \dots, P_k = P_0)$ の内部となる.

多角形 $(P_0, P_1, \dots, P_j, P_0)$ の内部と多角形 $(P_0, P_j, \dots, P_k = P_0)$ の内部が, 交わるとする. 折れ線 $P_1P_2 \dots P_{j-2}P_{j-1}$ は, 多角形 $(P_0, P_j, \dots, P_k = P_0)$ の辺と交わらないから, この多角形の内部にあるか, 外部にあるかどうかである. 内部にあるとき, 多角形 $(P_0, P_1, \dots, P_j, P_0)$ の内部は, 多角形 $(P_0, P_j, \dots, P_k = P_0)$ の内部に含まれる. このとき, 多角形 $(P_0, P_j, \dots, P_k = P_0)$ の内部から, 多角形 $(P_0, P_1, \dots, P_j, P_0)$ を除いたものが, 多角形 $(P_0, \dots, P_k = P_0)$ の内部となる.

折れ線 $P_1P_2 \dots P_{j-2}P_{j-1}$ が, 多角形 $(P_0, P_j, \dots, P_k = P_0)$ の外部にあるとき, 内部は交わるとしたから, 多角形 $(P_0, P_j, \dots, P_k = P_0)$ の内部は, 多角形 $(P_0, P_1, \dots, P_j, P_0)$ の内部に含まれる. このとき, 多角形 $(P_0, P_1, \dots, P_j, P_0)$ の内部から, 多角形 $(P_0, P_j, \dots, P_k = P_0)$ を除いたものが, 多角形 $(P_0, \dots, P_k = P_0)$ の内部となる. 証明終わり.

内部と外部に分かれることがわかると, k 角形 $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_k = P_0)$ の内部は, 頂点を結ぶ三角形で分割できること示すことができる.

これも頂点の個数に関する帰納法で示す. 帰納法の仮定として, $k-1$ 角形以下の頂

点を持つ多角形に対して、多角形の内部は頂点を結ぶ三角形で分割できると仮定する。

内角が平角よりも小さい頂点 P_i をとる。このような頂点が取れることは、多角形の外部に任意の直線を取り、その直線からの距離が最小であるような頂点の 1 つをとると、その頂点における内角が平角よりも小さいことからわかる。

三角形 $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ が多角形の内部にあれば、この三角形をとりのぞいた $k-1$ 角形を考える。帰納法の仮定により、 $k-1$ 角形

$$(P_0, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_{k-1}, P_k = P_0)$$

は頂点を結ぶ三角形で分割できるから、三角形 $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ と合わせて、 k 角形 $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_k = P_0)$ の内部を頂点を結ぶ三角形で分割できる。三角形 $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ が多角形の内部に描けないとすると、三角形 $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ の内部またはその辺 $P_{i-1}P_{i+1}$ 上に多角形の頂点が存在する。その中で、辺 $P_{i-1}P_{i+1}$ との距離が最大のもののひとつ P_j をとる。線分 P_iP_j は、多角形の辺と交わらないから、 P_iP_j で多角形の内部を 2 つに分割する。 P_iP_j で分割されて得られた 2 つの多角形の頂点の数は $k-1$ 以下だから、それぞれ三角形に分割できる。それらを合わせて、 k 角形 $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_k = P_0)$ の内部を頂点を結ぶ三角形で分割できる。証明終わり。

このことから、 k 角形は、 $k-2$ 個の三角形に分割できることがわかる。従って、 k 角形の内角の和は、 $(k-2)\pi = (k-2) \times 180^\circ$ である。

1.7 分解合同

多角形の面積が性質 (1), (2) をもつことから、2 つの多角形を多角形のピースに分割してそのピースの間に、合同による 1 対 1 対応があるとすると、2 つの多角形の面積は等しい。

それならば、2 つの多角形の面積が等しいならば、それらを同じ数の多角形のピースに分割して、合同による 1 対 1 対応をつくることができるかという問題「分解合同の問題」が考えられる。

この平面上の多角形に対する問題の解答は、「出来る」である。同じ問題は、3 次元ユークリッド空間の 2 つの体積の等しい多面体に対して考えることが出来るのだが、3 次元の場合には、体積の等しい正 4 面体と立方体は、合同な有限個の多面体のピースに分割することができないことが分かっている。20 世紀の初めに、数学者ヒルベルト (1862 – 1943) が国際数学会議において、23 個の問題を提出したが、そのひとつがこの 3 次元の分解合同の問題であった。ドイツの数学者デーネ (1878 – 1952) により、分解合同により多面体の体積を特徴づけることは出来ないことが示された。

2 次元の場合の分解合同の定理、すなわち、2 つの多角形は面積が等しければ分解合同であることの証明をしよう。次の 2 つを示せばよい。

- (1) 多角形 X, Y が分解合同で、 Y, Z が分解合同ならば、 X, Z は分解合同である。
- (2) 三角形は、1 辺の長さが 1 の長方形に分解合同である。

実際、多角形は、三角形に分割でき、(2) により、その三角形は 1 つの辺の長さが 1 の長方形に分解合同であるから、多角形全体が 1 つの辺の長さが 1 の長方形に分解合

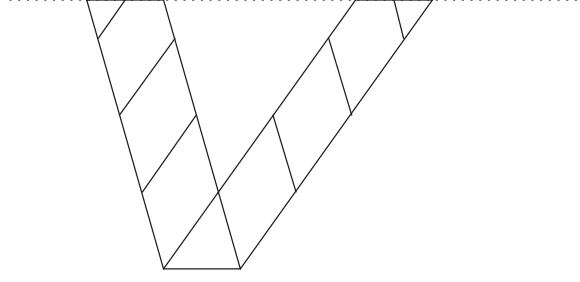


図 12: 平行四辺形の分解合同.

同となる. 2つの多角形の面積が同じならば, ともに同じ面積の, 1つの辺の長さが1の長方形に分解合同となり, それらは合同である. 従って, (1)により, 2つの多角形は分解合同となる.

(1)が成立する理由は, Y を2つの方法で多角形のピースに分割したとき, 「それを合わせた分割」を考えると, 1つの方法で分割して得られた多角形をさらに分割したものになっている. 細かく分割したピースを合わせると, もう一方の分割になる, ということである.

通常の証明は次のように書かれる. 多角形 X, Y については, $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$, $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_\ell$ と多角形に分割されて, 合同

$$X_i \cong Y_i \quad (i = 1, \dots, k),$$

が存在し, 多角形 X, Y については, $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_\ell$, $Y = Y'_1 \cup \dots \cup Y'_\ell$ と多角形に分割されて, 合同

$$Z_j \cong Y'_j \quad (j = 1, \dots, \ell)$$

が存在するとする. $Y_i \cap Y'_j$ は (連結とは限らない) 多角形, 1次元の図形, 0次元の図形, 空集合になりうるが, (連結成分の個数は有限個であり,) 多角形になるもの以外は無視することにして,

$$\begin{aligned} Y_i &= (Y_i \cap Y'_1) \cup \dots \cup (Y_i \cap Y'_\ell) \quad (i = 1, \dots, k), \\ Y'_j &= (Y_1 \cap Y'_j) \cup \dots \cup (Y_k \cap Y'_j) \quad (j = 1, \dots, \ell) \end{aligned}$$

が成立する. 従って, X, Z はこの $Y_i \cap Y'_j$ を合同 $X_i \cong Y_i$, $Z_j \cong Y'_j$ で写した多角形で分割される. ゆえに, X, Z は分解合同である.

(2)が成立することは, 2次元の幾何を使ってわかる (2次元でのみ成立する). まず, 三角形は, 平行四辺形に分解合同である. 平行四辺形の面積は

$$\text{底辺の長さ} \times \text{高さ}$$

で与えられる. 実際, OPQR を原点 O, OP と RQ は平行, OR と PQ は平行となる平行四辺形とすると, 面積は

$$\frac{1}{2} |\vec{0} \times \vec{P} + \vec{P} \times (\vec{P} + \vec{R}) + (\vec{P} + \vec{R}) \times \vec{R} + \vec{R} \times \vec{0}| = |\vec{P} \times \vec{R}|$$

となる．これは， $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{R} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とするとき， $xv - yu$ である．長さ $\sqrt{x^2 + y^2}$ の辺 OP を底辺としたときの高さは， $R(u, v)$ と直線 $yX - xY = 0$ (X, Y が変数である) の距離で， $\frac{|yu - xv|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ だから，平行四辺形の面積は「底辺の長さ×高さ」で与えられることがわかる．

底辺と高さの等しい 2 つの平行四辺形は分解合同である (図 12 参照)．2 つの平行四辺形 X_1, X_2 に対し，それぞれの 2 組の平行線の距離がともに d より大であるとする． X_1, X_2 はともに，高さが d の平行四辺形と分解合同になる．図 12 において平行四辺形の左右の平行線の距離をちょうど d にすることができるからである．従って，2 つの平行四辺形は面積が等しければ分解合同になる．

こうして，(2) がわかった．

2 曲線が囲む面積

多角形の面積について、ユークリッドの面積の定義をみたす定義を数値的に与えることができた。(実数の存在から平面の面積の公理を示した.)

我々が興味を持つ平面図形は、多角形だけではない。円、楕円、放物線、双曲線という図形も当然面積をもつものとして、面積を考えたい。アルキメデス (287 BC – 212 BC) が考えた定義も関孝和 (1642 – 1708) が考えた定義も、曲線を多角形で近似していくというものであった。

2.1 放物線の切片の面積についてのアルキメデスの計算

放物線と直線で囲まれる図形の面積が、交点における接線と直線で得られる三角形の面積の $\frac{2}{3}$ であることを次のように示した。

注意：アルキメデスの当時の放物線の定義は、 $y = x^2$ のグラフではなかった ($y = x^2$ のグラフといえるようになるのはデカルトの座標が導入されてからである)。円錐とその母線に平行な平面との交わりとして描かれる曲線 (円錐曲線のひとつ)、あるいは準線と呼ばれる直線と焦点と呼ばれる点から等距離にある点の軌跡であった。放物線の軸は、焦点から準線への垂線のことである。放物線 (放物面) は、太陽光を反射して 1 点に集めるためにもよく研究されていた。放物線の接線、放物線の弦などについては、よく知られていたようである。放物線は、ギリシャ時代からパラボラ (parabola) と呼ばれて研究されている。これが、打球の軌跡の放物線と一致することは、ずっと後になってガリレオ (1564–1642) の実験によりわかることである。

放物線上の A_0, A_1 を結ぶ線分と平行な直線が $A_{1/2}$ で放物線に接するとする。 A_0, A_1 の中点と $A_{1/2}$ を結ぶ直線は、軸と平行になる。 A_0, A_1 における接線の交点を B とする。三角形 A_0A_1B の面積は、三角形 $A_0A_1A_{1/2}$ の面積の 2 倍である。また、 $A_{1/2}$ における接線は、三角形 A_0A_1B の 2 辺の中点を結ぶ。同様に $A_{1/4}, A_{3/4}$ をとって、議論を続けると、放物線の外側の面積は A_0A_1B の面積の

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} + 2\frac{11}{84} + 4\frac{111}{884} + \cdots \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

であることがわかる。放物線の内側の面積は A_0A_1B の面積の、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + 2\frac{11}{82} + 4\frac{111}{882} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

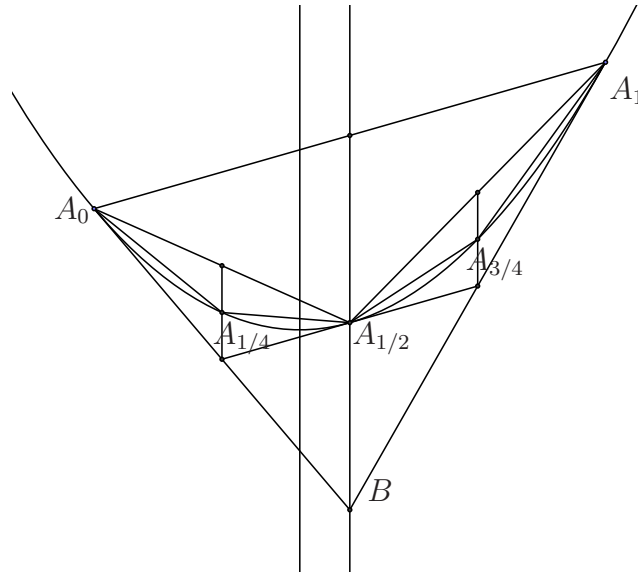


図 13: 放物線と弦の囲む面積

となる.

ここで、幾何級数の和の公式を使っている. $0 < r < 1$ に対して, $S = 1 + r + r^2 + \dots$ という和を考える. これが通常に加減乗除の法則を満たすとする, $rS = r + r^2 + r^3 + \dots$ となる. S から rS を引くと, $(1 - r)S = 1$ だから, $S = \frac{1}{1 - r}$ となる. このような幾何級数の収束自体は, 逆理で有名なゼノン (490 BC–425 BC) の頃には知られていたようである.

2.2 円の面積

円の面積は, 円周を底辺, 半径を高さとする三角形の面積に等しい. このことはアルキメデスの時代には知られていた. 理由を考えると, 次のようになる. 円周の上に点 $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, P_k = P_0$ をとり, その点で内接する多角形 $X_{\text{内接}}$, 外接する多角形 $X_{\text{外接}}$ を作ると

$$S(X_{\text{内接}}) < \text{円の面積} < S(X_{\text{外接}})$$

となる. ここで, 点 P_{i-1}, P_i の間の角度を $2\theta_i$ とする. 円の面積は, 今の言葉では,

$$\min_{1 \leq i \leq k} \{\cos \theta_i\} \sum_{i=1}^k \sin \theta_i < \text{円の面積} < \sum_{i=1}^k \tan \theta_i$$

と表される. 実際, 図 14 において, 隣り合う点の間での, 内接多角形の面積は, $2 \cdot \frac{1}{2}(\cos \theta_i \cdot \sin \theta_i)$, 外接多角形の面積は, $2 \cdot \frac{1}{2}(1 \cdot \tan \theta_i)$ で与えられる. $\cdot$ は積 $\times$ の記号として使っている. $\min_{1 \leq i \leq k} \{\cos \theta_i\}$ は中心から内接多角形の辺への距離の最小値である.

($\sin, \cos, \tan, \pi$ という記号を使い始めたのはオイラーである. ここで, $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ は, 角度 θ をもつ直角三角形の辺の比で, それぞれ, 正弦, 余弦, 正接と呼ばれる. 初めて聞いた人は, 図 14 から意味を理解してください.)

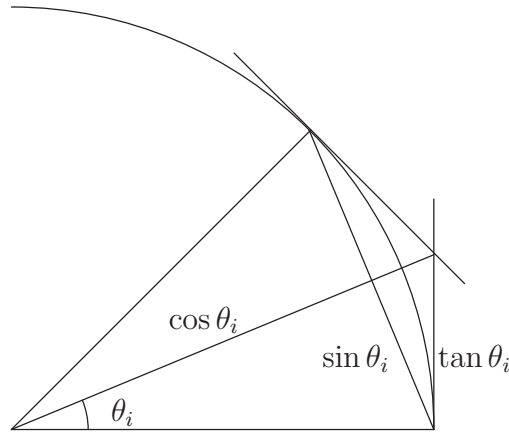


図 14: 円に内接する多角形と外接する多角形.

点を密になるように付け加えると $\min_{1 \leq i \leq k} \{\cos \theta_i\}$ は単調に増加（非減少）で、1 に近づく.

三角不等式から、 $\sum_{i=1}^k \sin \theta_i$ は単調に増加する. 直角三角形では斜辺の長さが最長であることから、 $\sum_{i=1}^k \tan \theta_i$ は単調に減少する. さらに、

$$\tan \theta_i = \frac{\sin \theta_i}{\cos \theta_i} \leq \frac{\sin \theta_i}{\min_{1 \leq i \leq k} \{\cos \theta_i\}}$$

だから、 $\sum_{i=1}^k \sin \theta_i$, $\sum_{i=1}^k \tan \theta_i$ は、ある値 π に近づく（「収束する」という）. これは円周の長さの半分である.

これにより、円の面積は、円周を底辺、半径を高さとする三角形の面積に等しい.

現実には、円の面積を正方形、正 8 角形、正 16 角形、正 32 角形…に対して、 π を計算することは、半角の公式と開平法により筆算でも行うことが出来る.

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707107...,$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707107... \text{ だから,}$$

$$\text{半径 1 の正方形の半周は, } 4 \sin \frac{\pi}{4} = 2.82843...$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \cos 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = 0.92388...,$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = 0.382683... \text{ だから,}$$

$$\text{半径 1 の正 8 角形の半周は, } 8 \sin \frac{\pi}{8} = 3.06147...$$

$$\cos \frac{\pi}{16} = \cos 11.25^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{8}}{2}} = 0.980785...,$$

$$\sin \frac{\pi}{16} = \sin 11.25^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{8}}{2}} = 0.19509... \text{ だから,}$$

半径 1 の正 16 角形の半周は, $16 \sin \frac{\pi}{16} = 3.12145\dots$

$$\cos \frac{\pi}{32} = \cos 5.625^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{16}}{2}} = 0.995185\dots,$$

$$\sin \frac{\pi}{32} = \sin 5.625^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{16}}{2}} = 0.0980171\dots \text{だから,}$$

半径 1 の正 32 角形の半周は, $32 \sin \frac{\pi}{32} = 3.13655\dots$

$$\cos \frac{\pi}{64} = \cos 2.8125^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{32}}{2}} = 0.998795\dots,$$

$$\sin \frac{\pi}{64} = \sin 2.8125^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{32}}{2}} = 0.0490677\dots \text{だから,}$$

半径 1 の正 64 角形の半周は, $64 \sin \frac{\pi}{64} = 3.14033\dots$

というようになる. ここに書いた 180° を π と書く角度の表し方は, 弧度法と呼ばれる. 半径 1 の円の中心角を対応する弧の長さで表すものである.

関孝和 (1642 – 1708) は, 正 131072 角形 ($131072 = 2^{17}$) を使い, 円周率を小数第 11 位まで計算したとのことである. 去年は, 関孝和没後 300 年の年であった.

2.3 関数のグラフと面積

$f(x) = ax + b$ を 1 次関数, $f(x) = ax^2 + bx + c$ を 2 次関数とよぶ. n 次多項式 $a_0x^n + \dots + a_n$ により定義される多項式関数, 多項式の商 $\frac{a_0x^n + \dots + a_n}{b_0x^m + \dots + b_m}$ により定義される分数関数 (大学では有理関数と呼ぶ), 平方根などを用いて表される無理関数 (大学では代数関数と呼ぶ), さらに, 三角関数 $\sin x, \cos x, \tan x$, ネピア (1550 – 1617) によって発見された対数関数 $\log x$, それによって理解された指数関数 e^x など, 実用的に非常に重要な関数がある.

関数 $f(x)$ によって, xy 平面上に $y = f(x)$ という曲線を考えると x 軸上の区間 $[a, b]$, 直線 $x = a, x = b$ および $y = f(x)$ によってかこまれる部分の面積が考えられる. デカルト (1596–1650) により座標が考えられるようになって, このような面積を考えることができるようになった.

実際, $y = \frac{1}{x}$ について, x 軸, 直線 $x = 1, x = t$ ($t > 0$) とにより囲まれる面積が対数 $\log t$ になるというというのは, かなり早くから気づかれていたようである.

正の値をとる (連続な) 関数 $f(x)$ に対して, 区間 $[a, b]$ に $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ のように点を取り, 平面上の点 $P_0(x_0, f(x_0)), P_1(x_1, f(x_1)), \dots, P_k(x_k, f(x_k))$ を順に結ぶ折れ線を考える. 点 $A(a, 0), B(b, 0)$ とともに, 多角形 $X = (A, B, P_k, P_{k-1}, \dots, P_1, P_0, A)$ を考え, この面積が, 点 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ の個数を密になるように増やしていくと, 求める面積になることが期待される.

この多角形の面積は, 直線 $x = x_1, \dots, x = x_{k-1}$ で切って得られる台形の面積

$$\frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_1))(x_1 - x_0) + \dots + \frac{1}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k))(x_k - x_{k-1})$$

と等しい. 図 15 参照. この値は, 関数 $f(x)$ が連続で, 点 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ が十分に密であれば, $x_{i-1} \leq z_i \leq x_i$ となる z_k をどのようにとっても,

$$f(z_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(z_k)(x_k - x_{k-1})$$

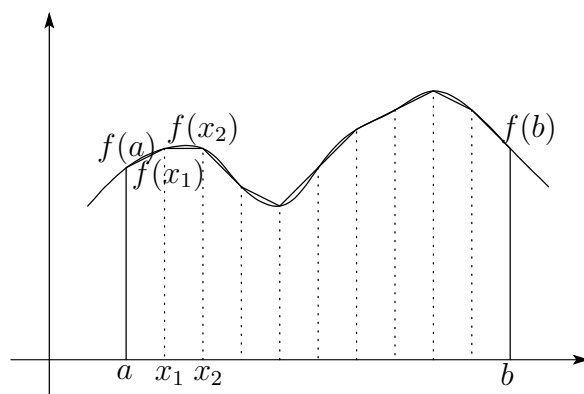


図 15: グラフを折れ線で近似する

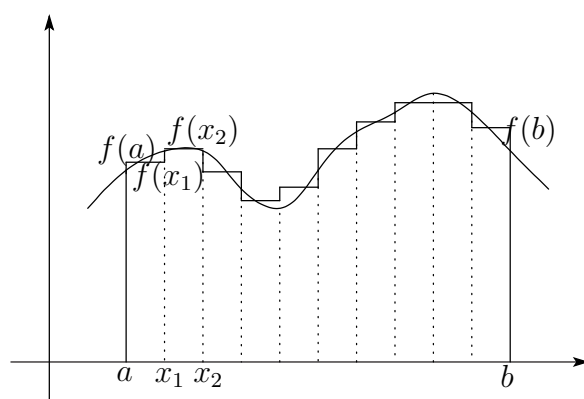


図 16: グラフを棒グラフで近似する

の値に非常に近い値である．点 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ の個数を密になるように増やしていくと，同じ値に収束する．図 16 参照．(面積を考えるととき，台形で近似しても，棒グラフで近似しても同じ値に近づくが，曲線の長さを考えるととき，台形を描いた折れ線での近似でなければならないことに注意しよう．)

このとき，この面積の値を $\int_a^b f(x)dx$ と書き表したのは，ライプニッツ (1646 – 1716) (ライプニッツという発音がより正しい) である．積分 (integral) という語はヤコブ・ベルヌーイ (1654 – 1705) によるらしい．ライプニッツは「和 (summation)」という語を用い，記号 $\int$ は S を変形したものである．

2.4 参考：面積計，積分器

図形の面積を実際に求める道具，関数の積分を計算する道具は色々と考案されている．歴史的道具として売られているものもあるが，現在でも制作されているものもあるようである．このような道具で面積や積分が得られるのには，数学的な理由がある．以下のホームページを参照されたい．

2.5 面積体積にかかわる問題

曲線で囲まれた図形には面積が定義されるように考えられるが、本当にそうだろうか。高木貞治は、来年2月に没後50年になるが、高木貞治の名著「解析概論」には、面積を持つ曲線が紹介されている。

次のような問題が、基本的な問題である。

- どのような平面図形にも面積はあるか（定義できるか）？
- 面積が等しいとき、2つの図形はどのような関係にあるか？

同じように

- どのような立体図形にも体積はあるか（定義できるか）？
- 体積が等しいとき、2つの立体図形はどのような関係があるか？

どちらも現代の数学者にとっても難問である。

平面上の図形についての模範的な答えのひとつはすでに紹介した次のものである。

- 任意の多角形には面積が定義できる。
- 2つの多角形 P_1, P_2 の面積が等しいならば、 P_1 と P_2 を有限個の同じ個数の多角形に分割し、分割して得られる多角形の間に全単射があり、全単射で対応する多角形は合同である。

これに対応する体積についての命題は、成立しないことが知られている。

- 任意の多面体には体積が定義できる。
- しかし、たとえば、同じ体積の立方体と正4面体は、合同な多面体の集まりになるように分割することは出来ない。

この問題は、ヒルベルト (1862 – 1943) の23の問題のひとつであった。この結果は現代の抽象的な代数学によって、テンソル積という概念を使って、定式化すれば、容易に示すことができる。デーネ (1878 – 1952) の定理という。

他の答え方は次のようなものである。ここでは、すべての図形に面積を定義することは考えず、矛盾なく面積が定義できるのはどういうときかを述べ、我々が数学上必要となる多くの図形には、面積が定義できるというものである。ルベグ (1875 – 1941) というフランスの数学者の研究から始まっている。面積が定義できる図形は、次のようなものである。

1. 長方形には面積が定義され、それは2辺の長さの積である。
2. 開集合の面積は、それに含まれる互いに交わらない長方形の集合についての長方形の面積の和の上限である。

3. 閉集合の面積は、それを含む内部を持つ長方形の和集合についての、長方形の面積の和の下限である.
4. 図形 F が、面積が定義できている可算個の集合の直和（交わりを持たない和集合）ならば、図形 F の面積は定義され、可算個の集合の面積の和である.

例えば、座標平面上の1辺の長さが1の正方形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ の部分集合で、一方の座標が有理数であるような点からなるものを考えると、その面積は0である.

3 体積

3.1 多面体の体積

さて、体積はどのように定義すれば良いであろうか。

直方体の体積は、「縦 × 横 × 高さ」で与えられると考えるのは自然である。

多角形に対応して、空間図形として多面体を考えることができる。多角形を構成する要素は三角形であると考えても良かったように、多面体を構成する要素は4面体である。

立方体は、6個の鏡像を含めて合同な4面体に分割することができる（図17参照）。従って、それぞれの体積は、立方体の体積の $\frac{1}{6}$ である。これは、 $\frac{1}{3}$ (底面積 × 高さ) となっている。

さらに、平面図形の面積が図形を一つの方向にだけ a 倍引き延ばすと、 a 倍になったように、立体図形の体積も、一つの方向にだけ a 倍引き延ばすと、 a 倍になると考えられる。そうすると少なくとも直角三角形上の一つの頂点の上の垂線上に頂点を持つ4面体（三角錐）に対して、その体積は $\frac{1}{3}$ (底面積 × 高さ) となる。

座標軸方向とは異なる方向への引き延ばし等も考えると、4面体の体積は一般に $\frac{1}{3}$ (底面積 × 高さ) と考えると良いことが納得される。

これを面積の時に行ったように、数値的に定義することも出来る。原点 O , $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ を頂点とする4面体の体積は

$$\frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right|$$

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1 \end{aligned}$$

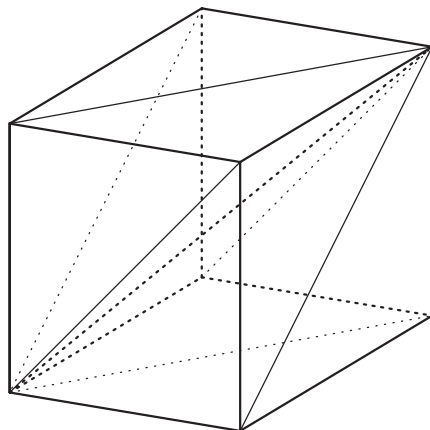


図 17: 立方体は、6個の4面体の和である。

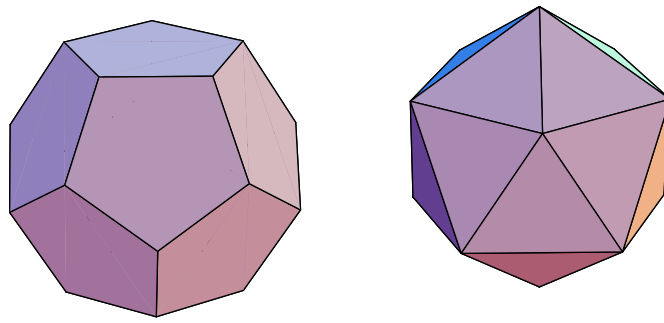


図 18: 多面体の体積は 4 面体に分割して計算できる

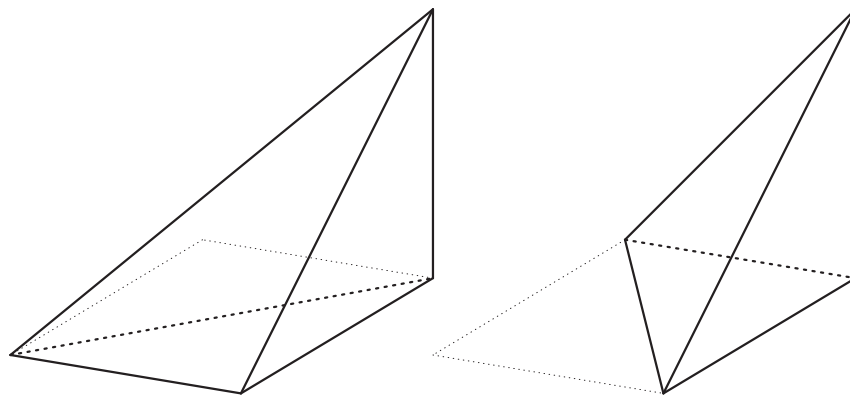


図 19: この 2 つの 4 面体は，分解合同とならない

である．この和は，3 行 3 列の

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix}$$

が左右に繰り返り続いているものを考えて，「左上から右下への積」の符号は +，「右上から左下への積」の符号は - として和をとったものである．

多角形の辺が線分の和集合として折れ線で表わされたように，多面体の面が三角形に分割されているときに，多面体の体積を原点と三角形により定義される 4 面体の体積の符号を考慮した和として定義できる．これを使って，定義した多面体の体積は，回転，平行移動で不変，分割して得られる多面体の体積の和がもとの体積に一致するという性質を持つ．また，一つの方に k 倍すると，体積も k 倍となり， k 倍の相似変換で，体積は k^3 倍になる．

3.2 カバリエリの原理

多面体の体積の定義を前節のように与えると，図 19 の 2 つの 4 面体（三角錐）の体積が等しいことになる．この 2 つは，残念ながら分解合同とはならないことがわかる

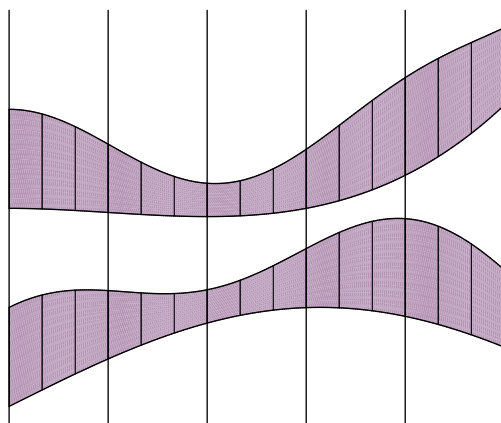


図 20: カバリエリの原理 $1 + 1$

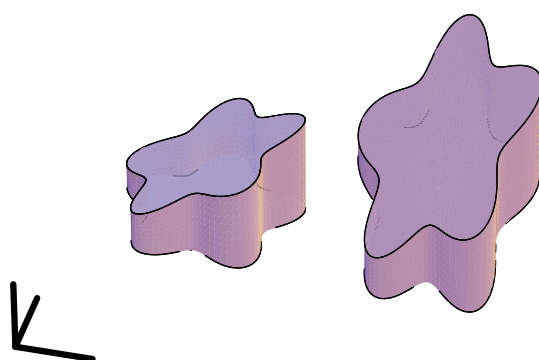


図 21: カバリエリの原理 $2 + 1$

ので，合同だけを基礎にして体積が等しいことを「証明する」ことは出来ない．

これらの体積が等しいことを，次のように考えていくのがカバリエリの原理である．これは，面積，体積を，「積分」と考えることを推し進める役割を担った．

カバリエリは，図形の面積，体積をとりあつかう次のような命題を提唱した．それらをカバリエリの原理という．17世紀に活躍したカバリエリ (1598–1647) はガリレオ (1564–1642) と多くの手紙のやりとりをしている．

- (1 + 1) 平面上の図形 A, B について，直線 $x = a$ との交わりの長さが等しければ， A, B の面積は等しい．図 20 参照．
- (2 + 1) 3次元の立体図形 A, B について，直線 $x = a, y = b$ との交わりの長さが等しければ， A, B の体積は等しい．図 21 参照．
- (1 + 2) 3次元の立体図形 A, B について，平面 $x = a$ との交わりの面積が等しければ， A, B の体積は等しい．図 22 参照．

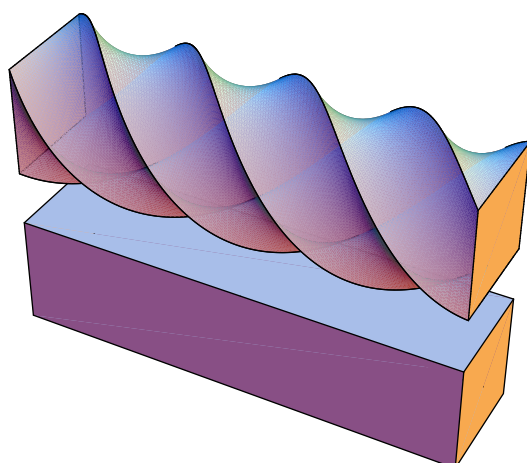


図 22: カバリエリの原理 1 + 2

3.3 球の体積

カバリエリ (1598 – 1647) は 17 世紀の数学者であるが、紀元前 3 世紀のアルキメデス (287 BC – 212 BC) は、球とそれに外接する円柱、この円柱と底面と高さが等しい円錐の体積の間に、

$$\text{球の体積} + \text{円錐の体積} = \text{円柱の体積}$$

が成立することを発見している。

また、球面の面積を底面とし、半径を高さとする錐の体積は球面の体積と一致することも発見した。

上の式は現代的に書くと

$$\frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}2r \times \pi r^2 = \pi r^2 \times 2r$$

$$\frac{1}{3}4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

となる。

最初の等式は、次のようにして得られる (図 23 参照)。半径 r の球、直線 $z = x$ を z 軸の周りに回転して得られる円錐 (の $|z| \leq r$ の部分)、半径 r の円の上の円柱に対し、 $z = h$ ($|h| \leq r$) の平面による切り口の面積を考えると、半径 r の球の切り口は半径 $\sqrt{r^2 - h^2}$ の円で、その面積は、 $\pi(r^2 - h^2)$ である。円錐の切り口は半径 $|h|$ の円で、その面積は、 πh^2 である。円柱の切り口は半径 r の円で、その面積は、 πr^2 である。球の切り口の面積と円錐の切り口の面積の和は、円柱の切り口の面積に等しい。この切り口に極薄い厚みをつけるとその体積は等しい。従って、

$$\text{球の体積} + \text{円錐の体積} = \text{円柱の体積}$$

が成立することがわかる。

なわち、 $CD \times AB = OC \times AF$ である．これを用いると、円錐上の面積について、 $2\pi CD \times AB = 2\pi OC \times AF$ である． OC は球の半径であることに注意すると、これは、図 24 において、 OE から半径の距離にある $A'B'$ を、直線 OE の周りに回転して得られる円柱の側面の面積に等しい．

この AB の位置を半円周上で動かしてみると、球面の面積と円柱の側面の面積が等しいことがわかる．

3.4 重心

平面図形 F の重心は、図形が一様な厚さと密度をもつ板で出来ていると考えたとき、その点で支えたと水平のまま動かないと考えられる点である．

三角形の重心は、3つの中線（辺の midpoint と、対角を結ぶ線）が1点で交わる、その交点として定義されてもいる．実際に実験してみると、頂点で三角形の板をぶら下げると、重心はその頂点を通る鉛直線上にある．さらに、どの点で三角形の板をぶら下げても重心はその点を通る鉛直線上にあることがわかる．

こんどは、任意の図形を切り取って、2点でぶら下げ、鉛直線を描き、その交点を求める．他の点でぶら下げると、この交点は、その点を通る鉛直線上にあることがわかる．

こうして求めた点が重心であるが、この点で図形を支えると、傾かないで支えることが出来る．

図形に重心があることが、実験からわかったとして、このような点の座標を求めるためにはどうすればよいか考えよう．

天秤の釣り合いは、次のように考えた．天秤の支点から左側の距離 a のところに質量 m_a があり、支点から右側の距離 b のところに質量 m_b があるとき、 $am_a = bm_b$ ならば釣り合う． $am_a \neq bm_b$ のときは、 c という点を $c > 0$ ならば右に、 $c < 0$ ならば左にとることにして、 $(a+c)m_a = (b-c)m_b$ となるようにすれば、（モーメントがつり合えば、） c の点でつりあう．すなわち、 $c = \frac{bm_b - am_a}{m_a + m_b}$ にとればよい．

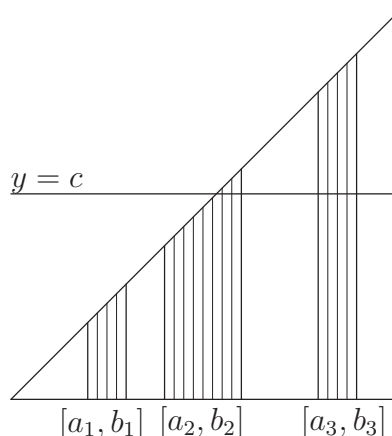


図 25: 線分 $[a_i, b_i]$ の座標 c を持つ点に対するモーメント

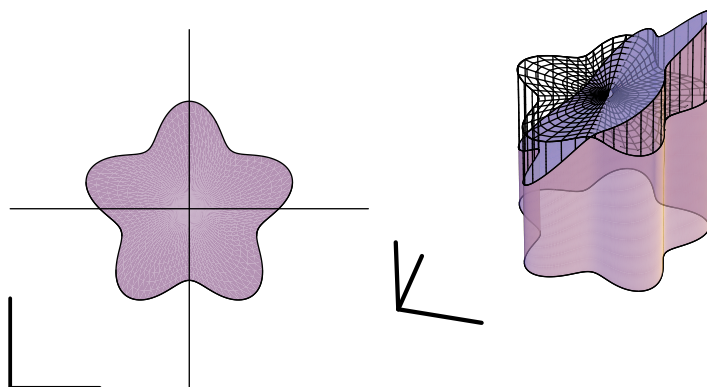


図 26: この図形について, x 軸方向について, 釣り合う直線は, 体積 V_x を面積 S で割った平均の高さと同じ x 成分 $\frac{V_x}{S}$ を持つ直線 $x = \frac{V_x}{S}$ である.

座標 $x_1, \dots, x_k$ の点に質量 $m_{x_1}, \dots, m_{x_k}$ があるとする, 重心の座標は,

$$b = \frac{\sum_{i=1}^k x_i m_{x_i}}{\sum_{i=1}^k m_{x_i}}$$

で与えられる. 実際,

$$\sum_{i=1}^k (x_i - b) m_i = \sum_{i=1}^k x_i m_i - b \sum_{i=1}^k m_i = 0$$

となる.

単位長さあたりの質量が d で与えられているとき, それが, 線分 $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_k, b_k]$ にあれば, 総質量は $d \sum_{i=1}^k (b_i - a_i)$ である. 線分 $[a_i, b_i]$ の座標 c を持つ点に対するモーメントは, $(a_i + b_i - 2c) \times d(b_i - a_i)$ であり, その和は,

$$\sum_{i=1}^k (a_i + b_i - 2c) \times d(b_i - a_i) = \sum_{i=1}^k (a_i + b_i) \times d(b_i - a_i) - 2c \sum_{i=1}^k d(b_i - a_i)$$

であり, それが 0 になる重心の座標は

$$c = \frac{\sum_{i=1}^k (a_i + b_i)(b_i - a_i)}{2 \sum_{i=1}^k (b_i - a_i)}$$

で与えられる. この分母は, $y = x$ のグラフと x 軸, 直線 $x = a_i, x = b_i$ でかこまれる面積の和である.

さて, 2次元の板の重心を考えよう. こんどは, ある2次元の図形 X に単位面積あたりの質量 d が与えられているのである. この X は3次元空間内の xy 平面上にあるとする.

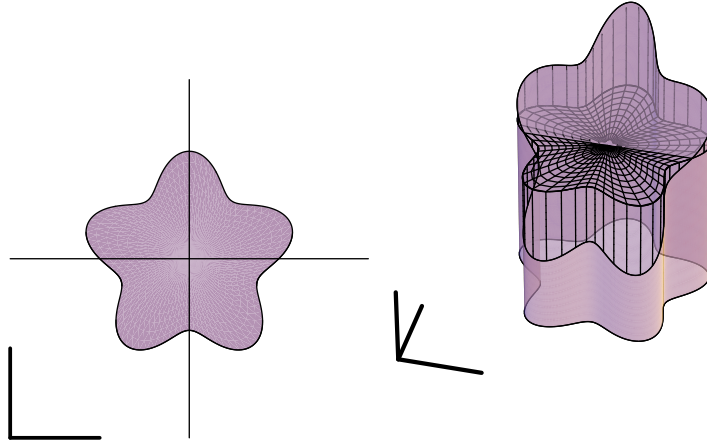


図 27: この図形について, y 軸方向について, 釣り合う直線は, 体積 V_y を面積 S で割った平均の高さと同じ y 成分 $\frac{V_y}{S}$ を持つ直線 $y = \frac{V_y}{S}$ である.

このとき, 直線 $x = c$ に対するモーメントは, 板の上に $z = x$ という平面と $z = c$ という平面を考え, X を底面とする柱体の 2 つの平面の間の部分の体積を量るとき, 2 つの面角の間の体積の差として表される. これを, $\int_X (x - c) dx dy$ と書くのである. こ

の値が 0 となる c_x は, $c_x = \frac{\int_X x dx dy}{\int_X dx dy}$ と表される (図 26 参照).

また, 直線 $y = c$ に対するモーメントは, 板の上に $z = y$ という平面と $z = c$ という平面を考え, X を底面とする柱体の 2 つの平面の間の部分の体積を量り, 2 つの面角の間の体積の差として表される. これを, $\int_X (y - c) dx dy$ と書く. この値が 0 となる c_y

は, $c_y = \frac{\int_X y dx dy}{\int_X dx dy}$ と表される (図 27 参照).

こうして, 直線 $x = c_x$, 直線 $y = c_y$ については, モーメントが 0 になることがわかった. このとき, (c_x, c_y) が重心の座標である. 実際, 点 (c_x, c_y) を通る直線に対するモーメントが 0 となることが次のようにしてわかる. 直線は x, y の 1 次式で表されるから, (c_x, c_y) を通る直線は, $sx + ty = sc_x + tc_y$ と書くことが出来る. ただし, $s^2 + t^2 = 1$ である. この直線 $sx + ty = sc_x + tc_y$ に対するモーメントは, 板の上に $z = sx + ty$ という平面と $z = sc_x + tc_y$ という平面を考え, X を底面とする柱体の 2 つの平面の間の部分の体積を量り, 2 つの面角の間の体積の差として表される. これは, $\int_X (sx + ty - sc_x - tc_y) dx dy$ と書かれ,

$$\begin{aligned} & \int_X (sx + ty - sc_x - tc_y) dx dy \\ &= s \int_X (x - c_x) dx dy + t \int_X (y - c_y) dx dy = 0 \end{aligned}$$

となり, モーメントは 0 となる.

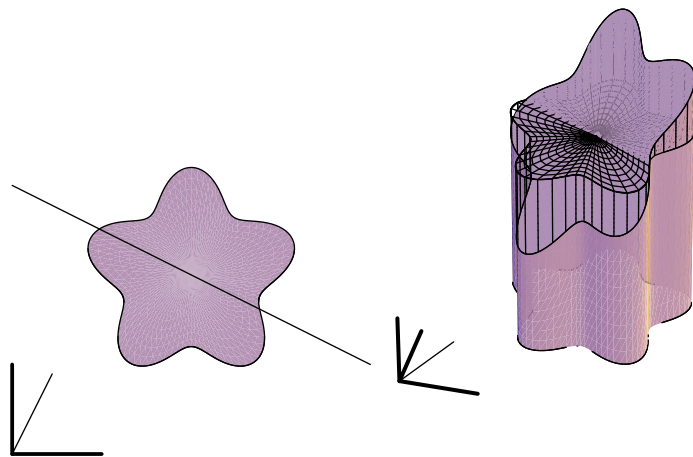


図 28: 方向 (s, t) ($s^2 + t^2 = 1$) について, 釣り合う直線は体積 $V_{s,t}$ を面積 S で割った平均の高さ $h = \frac{V_{s,t}}{S}$ について $sx + ty = h$ で表される直線である.

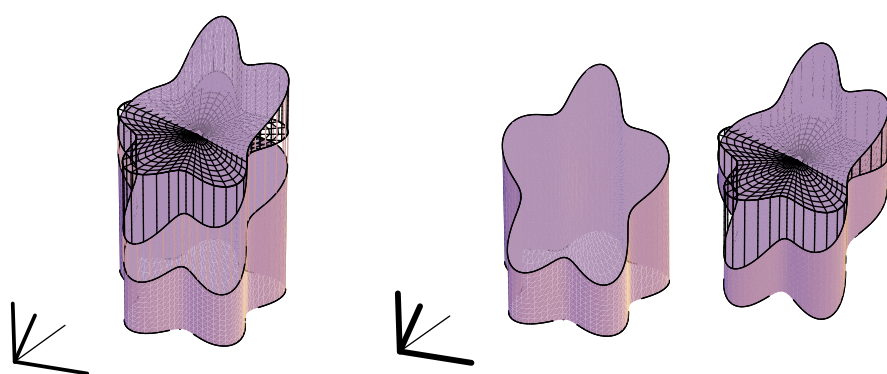


図 29: 図形 $V_{s,t}$ の (x, y) 上の部分は長さ $sx + ty$ の線分だが, これは sV_x の長さ sx の部分と tV_y の長さ ty の部分の和である.

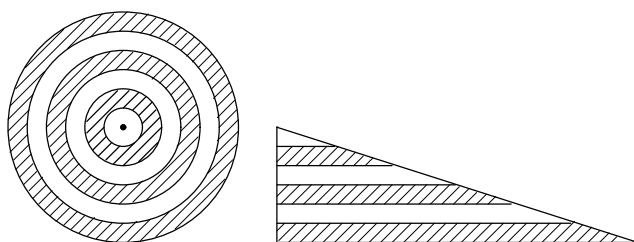


図 30: 面積 = 3つの線分の長さの和 × 重心の軌跡の長さ

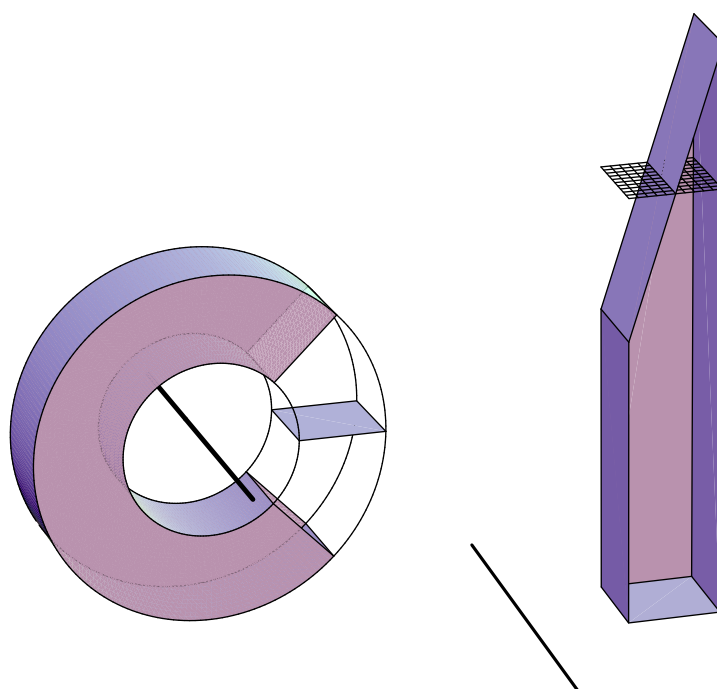


図 31: 正方形を回転した回転体の体積は、切り口の面積と重心の軌跡の長さの積

図 28, 図 29では, (カバリエリの原理により) $V_{s,t} = sV_x + tV_y$ となることを説明している. 平均の高さについては, $h = \frac{V_{s,t}}{S} = s\frac{V_x}{S} + t\frac{V_y}{S}$ となる. 直線 $sx + ty = s\frac{V_x}{S} + t\frac{V_y}{S}$ は, $(x, y) = (\frac{V_x}{S}, \frac{V_y}{S})$ を通る.

3.5 参考：回転体の体積

図 30 の同心円の斜線の部分の面積と右の三角形の中の斜線の部分の面積は等しい. ただし, 三角形は円周の長さを底辺とし, 半径を高さとしている. 重心を考えると,

$$\text{面積} = 3\text{つの線分の長さの和} \times \text{重心の軌跡の長さ}$$

が成立している.

これと同じように考えて,

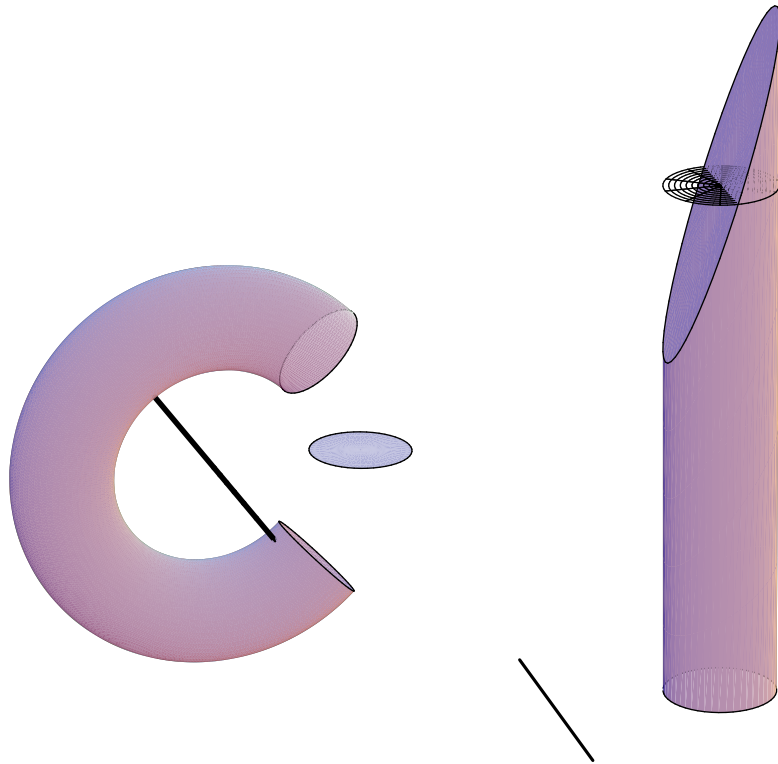


図 32: 円を回転した回転体の体積は，切り口の面積と重心の軌跡の長さの積

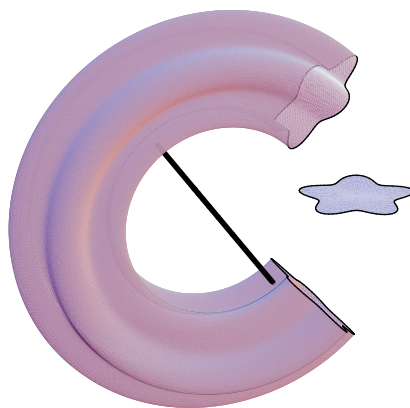


図 33: 図形を回転した回転体の体積は，切り口の面積と重心の軌跡の長さの積

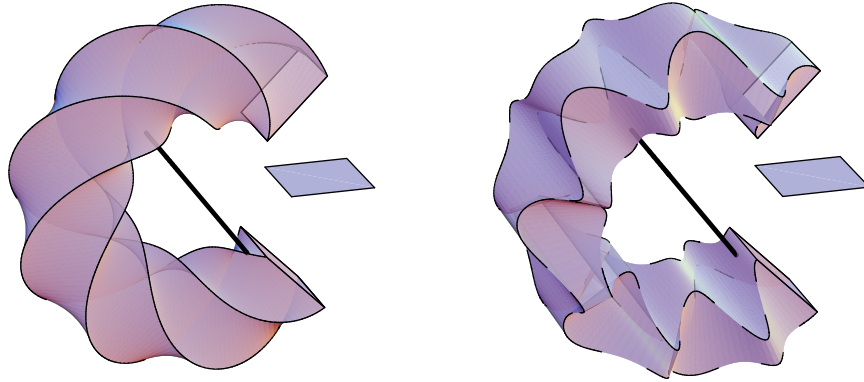


図 34: 断面積が一定で，重心までの距離も一定ならば，切り口の面積と重心の軌跡の長さの積

$$\text{回転体の体積} = \text{断面積} \times \text{重心の軌跡の長さ}$$

がわかる．まず，図 30 の考察に平面と垂直な方向の成分を考えると，図 31 のようになるので，この場合に「回転体の体積＝断面積×重心の軌跡の長さ」であることがわかる．この考え方は，図 32，図 33 のような一般の回転体に対して正しい．さらに，回転軸の周りの半平面との交わりの面積が一定で，重心と回転軸の距離が一定ならば図形の体積は，

$$\text{断面積} \times \text{重心の軌跡の長さ}$$

となる．図 34 参照．

4 変化の割合，接線，速度

グラフの接線をどのように求めるかという問題は，もともと円，円錐曲線など特別な曲線に対して個別に議論されていたようである．座標の導入ののち，対数関数のグラフやレムニスケートなどの新しい曲線に対して，例えば，対数関数 $\log x$ のグラフの点 $(x, \log x)$ における傾きは， $\frac{1}{x}$ となることなどが発見された．ニュートン (1643–1727) の研究の前にも，接線が，平均変化率の極限の傾きを持つことは認識され始めている．

現代の暮らしの中では，時速 60 キロの自動車，時速 200 キロの列車，時速 800 キロのジェット機などがあるが，17 世紀には，馬車，帆船というような乗り物が主流であった．速度というものはそれでも理解されていたと思われるが，加速度については，必ずしも理解されていたわけではない．現代の我々は自動車がアクセルを踏んで加速するときに，後ろ向きの力を感じ，ブレーキを踏んで減速するときに，前向きの力を感じることを知っている．

物が動くときには，押している力が存在しているという当時の常識に対して，ガリレオ (1564–1642) の慣性の法則，物体は力が加わらないときに等速直線運動をするという法則が，実験によって示されたことは，真理とは何かを求めてきた人々に強い衝撃を与えたに違いない．ガリレオは自由落下運動の落下距離が落下させた時間の 2 乗に比例することも実験で確かめている．

時刻 t に依存する量 $f(t)$ の時刻 t から $t+s$ までの間の平均変化率は， $\frac{f(t+s) - f(t)}{s}$ で定義される． s が 0 に近づいた極限で，この値がある値 ($f(t)$ の t における変化率) に近づくことが多くの関数で観察される．この値は，グラフ $y = f(t)$ を描いたときには，グラフ上の点 $(t, f(t))$ における接線の傾きとなる．トリチェリ (1608–1647)，バーロー (1630–1677) は，このことに気がついていたという．微積分学の基本定理「グラフ $y = f(x)$ と x 軸と直線 $x = a$, $x = t$ によって囲まれる面積を t の関数 $S(t)$ と考えるとき， $S(t)$ の t における変化率は， $f(t)$ に等しいこと」にも，ニュートン (1643–1727) がそれを述べる前に気付いていたようである．

ニュートンが，微積分学の基本定理を述べたのは，1666 年であるらしい．ライプニッツ (1646–1716) が，微分積分の記号法にたどりついて $\int y dy = \frac{y^2}{2}$ というようにかけるようになったのは，1675 年の少し前であったらしい．このあたりのことは，いろいろな本にも書かれている．The MacTutor History of Mathematics archive の <http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Newton.html>, <http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Leibniz.html> をみて見ると良い．

微積分学の基本定理は，微分と積分の関係を述べているものであるが，関数 $f(x)$ のグラフにより定義される面積は，より理解しやすいもので，

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(x) dx = f(t)$$

という主張は，図形的にも理解しやすい．一方，関数 $f(x)$ に対しての

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)$$

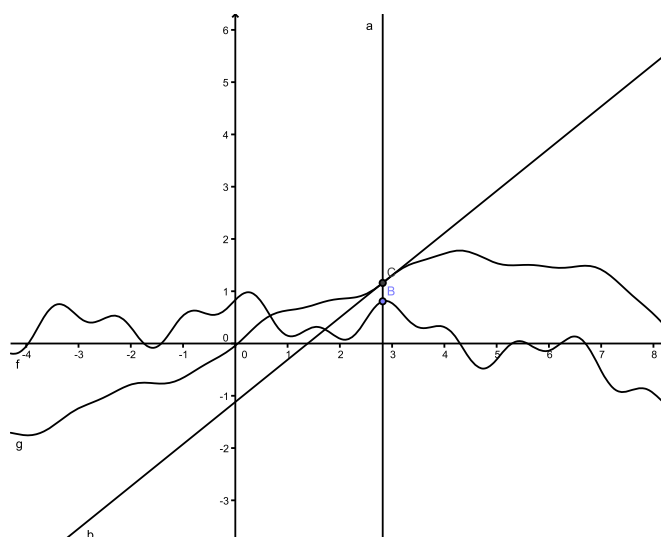


図 35: 微積分学の基本定理. グラフ $y = f(x)$ が定義する面積の変化のグラフ $y = g(x)$ の接線の傾きは, $f(x)$ である. グラフ $y = g(x)$ の接線の傾きのグラフ $y = f(x)$ が定義する面積の変化は $g(x)$ で表される.

という主張のためには, 関数 $f(t)$ の導関数 $\frac{df}{dt}$ は何かということを明らかにしなければならない. $y = f(x)$ のグラフの 1 点 $(x, f(x))$ における接線の傾きが, その点における微分であるが, 接線の傾きがグラフ上の点を動かすと変化することを関数として表したものが, 導関数ということになる.

常に図形的に考えることにすると, どんな関数もあるグラフにより定義される面積の変化の形で書けるということになる. これは関数の概念が確立していない時期には非常にとらえにくいことだったに違いない. 絶対時間の概念を導入して, 速度は位置の時間微分, 加速度は速度の時間微分であることを表現したニュートンの功績はとんでもなく大きなものである.

ニュートンは微分に対し「流率」というような語を使っていた. 微分を $\frac{df}{dx}$ のように書いたのはライプニッツである. 導関数という言葉は, ラグランジュ(1736–1813)によるもののようである.

4.1 面積速度

ティコ・ブラーエ(1546-1601)の観測の結果をケプラー(1571–1630)は, 数学の言葉でまとめ, 1609 年(第 1, 第 2 法則)および 1619 年(第 3 法則)に公表した.

第 1 法則: 惑星の軌道は太陽を焦点とする楕円である.

第 2 法則: 惑星の運動の面積速度は一定である.

第 3 法則: 惑星の軌道の楕円の長径の 3 乗と公転周期の 2 乗は比例する.

面積の変化の大きさを考えているところが非常に面白い. 区間 $[a, b]$ 上のグラフが定める面積の b についての変化の割合はグラフの値であることは, ケプラーにはわかっていたようである. 楕円の焦点という語をはじめて使ったのもケプラーであるという.

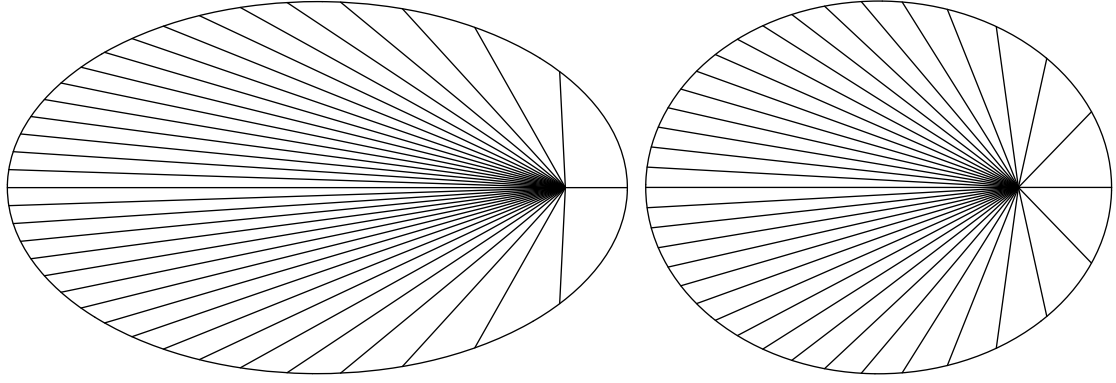


図 36: 面積速度一定

楕円を2つの点への距離の和が一定の点の全体と表わすとき、その2点のことを焦点と呼ぶ。ケプラーは焦点という語を作って、法則を書き表わしたのである。

この面積速度について考えよう。原点を中心（楕円の焦点）とし、 $\vec{P}(t)$ を時刻 t の位置ベクトルとしたとき、 $t=0$ から $t=T$ までに、動径が描く面積は、 $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = T$ に対して、多角形 $0\vec{P}(0)\vec{P}(t_1)\dots\vec{P}(t_{k-1})\vec{P}(t_k)0$ の面積

$$\frac{1}{2}(\vec{P}(t_0) \times \vec{P}(t_1) + \dots + \vec{P}(t_{k-1}) \times \vec{P}(t_k))$$

の分点を増やしたときの極限である。この面積は、

$$\frac{1}{2}(\vec{P}(t_0) \times (\vec{P}(t_1) - \vec{P}(t_0)) + \dots + \vec{P}(t_{k-1}) \times (\vec{P}(t_k) - \vec{P}(t_{k-1})))$$

と書くことが出来る。

速度 $\vec{v}(t)$ は、 $\frac{\vec{P}(t+s) - \vec{P}(t)}{s}$ の極限であったが、面積速度は、

$$\frac{1}{s} \frac{1}{2} \vec{P}(t) \times (\vec{P}(t+s) - \vec{P}(t)) = \frac{1}{2} \vec{P}(t) \times \frac{1}{s} (\vec{P}(t+s) - \vec{P}(t))$$

の極限、すなわち、 $\frac{1}{2} \vec{P}(t) \times \vec{v}(t)$ であることがわかる。

4.2 微分方程式

ニュートン (1643-1727) は、著書プリンピキアにおいて

- 万有引力の法則 $F = G \frac{mM}{r^2}$.
- 運動の第1法則＝慣性の法則
- 運動の第2法則＝運動方程式 $F = m \frac{d^2 q}{dt^2}$.
- 運動の第3法則＝作用反作用の法則

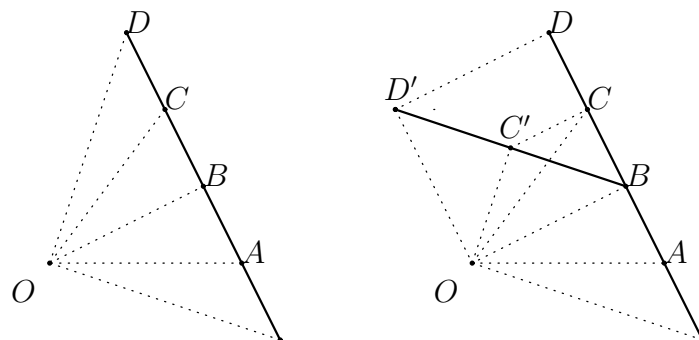


図 37: 面積速度一定の法則は、中心力の反映である

のもとで、ケプラーの法則を説明した。

慣性の法則は、絶対時間の概念とともに理想的な座標系の存在と、そういう座標系は相互に等速直線運動をしていることを主張している。

ケプラーの第2法則「面積速度一定の法則」は、中心力が中心力の方向に速度を変化させていることの現れである。実際、図37の左の図は、慣性の法則に従う等速直線運動をおこなっている点を一定時間間隔でプロットしたものである。A, B, C, Dという点が得られる。このとき、 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$ が一定という意味で、面積速度は一定である。点Bのところで、原点Oに向かう力が急に働き速度ベクトルに原点に向かう成分が加わったとすると、以後の点は、図37の右の図C', D'に変わることになる。このとき、 $\triangle OAB$, $\triangle OBC'$, $\triangle OC'D'$ について、 $\triangle OBC' = \triangle OBC$ である（底辺が同じで高さが等しい）。

このような現象が、折れ線の各頂点で起こっていても面積速度が一定となることがわかる。従って極限の曲線に対して面積速度が一定となる。

面積速度が一定であることは、重力が、太陽と惑星の間を結ぶ直線の方に惑星に働いているとすると説明できることになった。この「太陽と惑星の間を結ぶ線分」には、力を伝えるものという意味でベクター (vector) という名前がつけられ、この用法は、生物学でそのまま使われている。この「力を伝えるもの」は、数学の発展の中で、数学で用いられる方向と大きさを持つ量の呼び名「ベクトル」となった。

ニュートンの運動の第2法則である運動方程式に、質量が含まれていることは、バネの運動その他から帰納されたものと思われる。加速度が力に比例し、質量に反比例することから、万有引力の法則 $F = G \frac{mM}{r^2}$ には、質量の積が現れることになる。これには、ガリレオによって発見されていた木星の衛星の存在なども重要な論拠になっている。

物理法則を理解するには、「思考実験」をおこなう必要がある。今の場合、重力が太陽と惑星の間に働くであるとして、それが惑星の北半球、南半球に同じように働かなければ惑星は分解してしまうだろうというのが、運動方程式のもとで働く重力が質量の積に比例すべき理由である。

さて、万有引力が距離の逆2乗に比例する引力であることはなぜわかったのだろうか。それは、惑星の軌道が楕円であることから得られた結論である。

実際、ニュートンは、万有引力が距離の逆 2 乗に比例する引力であることから、惑星の軌道が楕円であることを示した。あるいは、万有引力が距離の何乗かに比例する引力とすると、惑星がケプラーの第 1 法則の楕円軌道をえがくためには万有引力は、逆 2 乗に比例する引力でなければならないことを示した。

この節の説明については、松本 眞氏の 1999 年度日本数学会年会市民講演会「リンゴが落ちたって万有引力は発見できないさ」数学通信 4(1) pp.4 - , <http://mathsoc.jp/publication/tushin/0401/matsumoto41.pdf> を参照されたい。

バネの変位と力が比例するというフックの法則を発見したフック (Robert Hooke 1635-1703) は、様々な実験をして、このことを予想していたようである。

4.3 楕円軌道

ここでは、楕円の極方程式が運動方程式と万有引力の法則から導かれる微分方程式の解であることを示そう。

楕円には、円を一方の方向に定数倍して得られる曲線、2 点からの距離の和が一定である点からなる曲線、1 点と 1 直線からの距離の比が 1 未満の定数となる点からなる曲線という 3 通りの定義がある。

最後の定義から、極座標 (r, θ) (xy 平面の点を原点からの距離 r , 原点から出てその点を通る半直線と x 軸正方向の半直線のなす角度を θ として定めたもので, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ となる。) において、楕円は、 $0 < e < 1$, a を定数として、 $r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta}$ と書かれる。

すなわち、直線 $x = a$ から、 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ への距離が $\frac{r}{e}$ であるから、 $a - r \cos \theta = \frac{r}{e}$ と書かれるが、これを書き直して $r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta}$ が得られる。

xy 平面の原点に太陽があり、太陽の質量 M は考えている惑星または彗星の質量 m に比べて大きいので太陽は原点にとどまり、不動であるとする。 $\vec{q} = \vec{q}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ を時刻 t における質量 m の惑星 (または彗星) の位置とする。

万有引力の法則から、惑星の受ける力 $\vec{F} = \vec{F}(t)$ は、太陽 (原点) の方向で、太陽との距離 $r = r(t) = \|\vec{q}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ の二乗に反比例し、質量 m, M に比例する。

$$\vec{F} = -GmM \frac{\vec{q}}{r^3} \quad \dots\dots$$

ニュートンの運動方程式によれば、この力は惑星の質量 m と加速度 $\frac{d^2 \vec{q}}{dt^2}$ の積である。

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{q}}{dt^2} \quad \dots\dots$$

式 , から、次の微分方程式を得る。

$$m \frac{d^2 \vec{q}}{dt^2} = -GmM \frac{\vec{q}}{r^3} \quad \dots\dots$$

ここで、 $\vec{q} = \vec{q}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ (の成分) とその微分

$$\frac{d \vec{q}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2 \vec{q}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d \vec{q}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \end{pmatrix}$$

(の成分) についての関係式を微分方程式という.

ここからの微分の計算には, 和の微分法

$$\frac{d}{dt}(f(t) + g(t)) = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt},$$

積の微分法

$$\frac{d}{dt}(f(t)g(t)) = \left(\frac{df}{dt}\right)_{(t)}g(t) + f(t)\left(\frac{dg}{dt}\right)_{(t)},$$

合成関数の微分法

$$\frac{d}{dt}(f(g(t))) = \left(\frac{df}{dt}\right)_{(g(t))}\left(\frac{dg}{dt}\right)_{(t)}$$

を使う. これらは, 高校2年, 3年で習うことなので, やがて出来るようになる.

運動方程式から, エネルギー保存則, 角運動量保存則が導かれる. 我々の議論にはこれを使う.

まず, 惑星のエネルギー E は運動エネルギー $\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)$ と位置エネルギー $-\frac{GMm}{\|\vec{q}\|}$ の和である. 惑星の運動で E が保存されること $\left(\frac{dE}{dt} = 0\right)$ が, 式 (1) を使って次のように示される. まず, $\left(\frac{1}{r(t)}\right)^2\{x(t)^2 + y(t)^2\} = 1$ だから, 積の微分法により

$$2\left(\frac{1}{r(t)}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r(t)}\right)\{x(t)^2 + y(t)^2\} + \left(\frac{1}{r(t)}\right)^2\{2x(t)\frac{dx}{dt} + 2y(t)\frac{dy}{dt}\} = 0$$

これにより,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r(t)}\right) = -\frac{1}{r(t)^3}\{x(t)\frac{dx}{dt} + y(t)\frac{dy}{dt}\}$$

がわかる.

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) - \frac{d}{dt}\frac{GmM}{r(t)} \\ &= m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right) + GmM\frac{1}{r(t)^3}\{x(t)\frac{dx}{dt} + y(t)\frac{dy}{dt}\} \\ &= \frac{dx}{dt}\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + GmM\frac{x(t)}{r(t)^3}\right) + \frac{dy}{dt}\left(m\frac{d^2y}{dt^2} + GmM\frac{y(t)}{r(t)^3}\right) = 0\end{aligned}$$

最後の項の括弧の中は, $m\frac{d^2\vec{q}}{dt^2} + GmM\frac{\vec{q}}{r^3} = 0$ を成分で表したものである.

また, 面積速度 $\Omega = \frac{1}{2}\vec{q} \times \frac{d\vec{q}}{dt}$ が一定であること (角運動量 $m\vec{q} \times \frac{d\vec{q}}{dt}$ の保存) も, 式 (1) からわかる.

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{q}}{dt} \times \frac{d\vec{q}}{dt} + \vec{q} \times \frac{d^2\vec{q}}{dt^2} = 0 - \vec{q} \times GM\frac{\vec{q}}{r^3} = 0 + 0 = 0$$

普通はこれから次のように極座標で議論する.

さて, エネルギー E , 面積速度 Ω の定義式を極座標で書くと,

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{q}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos \theta(t) \\ r(t) \sin \theta(t) \end{pmatrix},$$

において,

$$\frac{d \cos \theta(t)}{dt} = -\sin \theta(t) \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d \sin \theta(t)}{dt} = \cos \theta(t) \frac{d\theta}{dt}$$

だから,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

である. 従って, E, Ω の式にこれを代入して, 次の2つの式が得られる.

$$\frac{1}{2} \left(r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) - \frac{GM}{r} = \frac{E}{m} \quad \dots\dots$$

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \Omega \quad \dots\dots$$

極座標における式として惑星の軌道を求めることは, r を θ の関数として求めることである. $r = r(\theta) = r(\theta(t))$ と考えて, $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ であり, 式 を使って得られる $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\Omega}{r^2}$ により, $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\Omega}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$ が得られる. これらを式 に代入して, 次の微分方程式を得る.

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{GM}{2\Omega^2 r} + \frac{E}{2m\Omega^2} \quad \dots\dots$$

惑星 (または彗星) の軌道の極方程式は, 微分方程式 の解として得られる.

ここでは, 二次曲線 $r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta}$ が, Ω, E から定まる e, a に対して, 微分方程式の解となることを示そう.

極方程式を θ で微分すると,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{e^2 a \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$$

が得られる. 従って

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 &= \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{e^2 a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \\ &= \frac{1 + e^2 + 2e \cos \theta}{e^2 a^2} \\ &= \frac{2}{ea} \frac{1 + e \cos \theta}{ea} + \frac{e^2 - 1}{e^2 a^2} \end{aligned}$$

である. ゆえに, e, a を $\frac{2}{ea} = \frac{GM}{2\Omega^2}, \frac{e^2 - 1}{e^2 a^2} = \frac{E}{2m\Omega^2}$ となるように定めれば, 常微分方程式の解の一意性 (運動方程式が物理法則を表わしているということ) から惑星や彗星の軌道は2次曲線であることがわかる.

4.4 実験機器の設計

ばねの変位と力が比例するというフックの法則で名前を残しているフック (Robert Hooke 1635-1703) は実際には多くの実験を行って物理法則を見出していたという. 特に, 逆二乗に比例する力を受けると近似的に楕円軌道を描くことを実験により知っていたという.

小さな球体を xz 平面上の $z = f(x)$ のグラフを z 軸の周りに回転した面の上に置くと、 z 軸方向の重力は、中心方向の力を与える。

実際、 xz 平面上の $z = f(x)$ のグラフの上の点 $(x, f(x))$ には、重力 $(0, -mg)$ とグラフ上で運動するから束縛力が、グラフの接線方向 $(1, \frac{df}{dx})$ と垂直な方向 $(-\frac{df}{dx}, 1)$ にかかって、その和が、グラフの接線方向 $(1, \frac{df}{dx})$ に向かっている。束縛力を $k(-\frac{df}{dx}, 1)$ とすると、運動方程式は

$$k(-\frac{df}{dx}, 1) + (0, -mg) = ma(1, \frac{df}{dx})$$

の形に書かれる。従って、

$$k - mg = ma\frac{df}{dx}, \quad -k\frac{df}{dx} = ma$$

である。

$$k - mg = -k\left(\frac{df}{dx}\right)^2$$

から、 $k = \frac{mg}{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}$ を得るから、運動方程式の x 成分は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg\frac{df}{dx}}{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

となる。ここに現れる力が $-\frac{GmM}{x^2}$ であるとする、

$$\frac{g\frac{df}{dx}}{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} = \frac{GM}{x^2}$$

を満たす f をとることになる。

$$\frac{1}{\frac{df}{dx}} + \frac{df}{dx} = \frac{gx^2}{GM}$$

だから、 $\frac{df}{dx}$ は 2 次方程式 $X^2 - \frac{gx^2}{GM}X + 1 = 0$ の解である。ゆえに、

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{gx^2}{GM} \pm \sqrt{\left(\frac{gx^2}{GM}\right)^2 - 4}\right)$$

この $\pm$ は物理的に考えると $-$ である。従って、 $f(x)$ ($x \geq \sqrt{\frac{2GM}{g}} = x_0$) は

$$f(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{2}\left(\frac{gr^2}{GM} - \sqrt{\left(\frac{gr^2}{GM}\right)^2 - 4}\right)dr$$

となる。

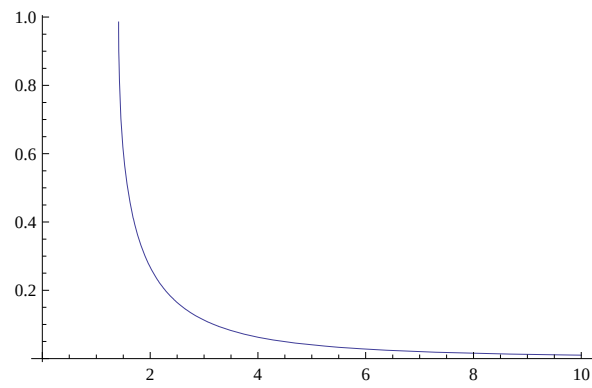


図 38: $\frac{df}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - \sqrt{x^4 - 4})$ のグラフ.

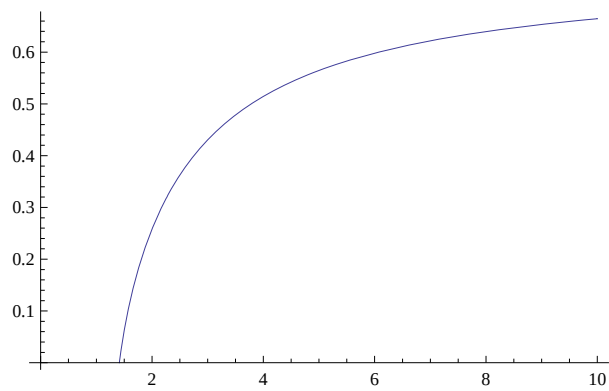


図 39: $f(x) = \int_{\sqrt{2}}^x \frac{1}{2}(r^2 - \sqrt{r^4 - 4})dr$ のグラフ.

5 GeoGebraによる演習

GeoGebraは、幾何、代数、解析を結びつけた動的な教育機関向け数学ソフトウェアである。まず、ブラウザ（インターネット・エクスプローラ）で、GeoGebraを検索し、

<http://www.geogebra.org/cms/index.php?lang=ja>

の「ウェブスタート」,「Webstart」をクリックし,「プログラムで開く」とする。これで、GeoGebraが起動される。デスクトップにgeogebra.jnlpというファイルがあれば、それをクリックして起動させることもできる。

GeoGebraには、多くの機能があるが、今回、使いたい機能は、関数のグラフを書くこと、2つの曲線の交点を数値的に計算すること、配列が使えることなどである。

楕円について復習すると、前に述べたように、楕円には、円を一方の方向に定数倍して得られる曲線、2点からの距離の和が一定である点からなる曲線、1点と1直線からの距離の比が1未満の定数となる点からなる曲線という3通りの定義がある。

原点を中心とする楕円の標準形は、 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で与えられる。ここで、 a, b は正実数である。 $a > b > 0$ の時、焦点を $(\pm f, 0)$ とすると、 $f = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$ となる。

GeoGebraの入力の欄に、

$$x^2/5^2 + y^2/3^2 = 1$$

と書き込み、Enterを押すと、長軸半径5、短軸半径3の楕円が描かれる。一旦、Ctrl+Zを入力して、前に戻しておく。入力の欄に、順に次のように入力しても同じ楕円となる。

$$\begin{aligned} a &= 5 \\ b &= 3 \\ x^2/a^2 + y^2/b^2 &= 1 \end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{a^2 - b^2} \\ F &= (f, 0) \\ G &= (-f, 0) \end{aligned}$$

とすると焦点の一つ $(\pm 4, 0)$ が表示される。上のメニューの左から2番目をクリックして、楕円のうえにマウスを持ってきてクリックすると、楕円上の点Aをとることができる。メニューの左から3番目の右下をクリックして、線分を選び、楕円上の点Aをクリックし、点Gをクリックすると線分AGが得られ、同様に、線分AFを得る。左側のオブジェクトの欄に、線分の長さが表示されている。それらが、 d, e ならば、入力の欄に、

$$h = d + e$$

と入力し、上のメニューの一番左をクリックして、楕円上の点Aを動かしてみる。Aの座標の変化に伴って、 d, e の値は変わるが、 $d + e$ が一定であることが見て取れる。ここまでのファイルを適当な名前で作成しておく。

同じ楕円をパラメータ表示（媒介変数表示）すると、 $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, あるいは、 $(x, y) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$ となる。 θ は角度を表す実数で単位円周上の弧の長さを用いる弧度法による表記が使われる。 すなわち 180度を π で表す。

GeoGebra のオブジェクトのうち、 a, b, f, F だけを残し、入力欄に、

`c=曲線 [a cos(t), b sin(t), t, 0, 2 pi]`

と入力すると、同じ楕円が描かれる。

焦点 $F(f, 0)$ と $(a, 0)$ を結ぶ線分と焦点 $F(f, 0)$ と $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ を結ぶ線分で定まる楕円の扇形の面積 S は、 $S = \frac{1}{2}ab\theta - \frac{1}{2}fb \sin \theta$ である。 第1項は、単位円の扇形の面積 $\frac{1}{2}\theta$ を x 軸方向に a 倍、 y 軸方向に b 倍したもの、第2項は三角形 OFP の面積である。

これから行いたいのは、面積速度が一定の運動がどのようなものを図示するために、楕円の面積を焦点からの線分で24等分することである。

だから、 $S = \frac{1}{2}ab\theta - \frac{1}{2}fb \sin \theta$ の値が、0 から πab まで、 $\frac{\pi ab}{24}$ ずつ変化するときの、 θ の値を求めればよい。

そのために、

`g(x)=a b x/2 - f b sin(x)/2`

`kk=24`

`s=a b pi/kk`

とする。 $y = g(x)$ のグラフが現れている。 ここで入力欄に

`交点 [g(x), s]`

と書き込むと、 $y = g(x)$ のグラフ上で、 y 座標が s になる点の座標が得られる。 この次のステップは、 y 座標が $s, 2s, 3s, \dots, 23s$ になる点の x 座標のリストを作ることである。 これは、次のように行える。 $x()$ は x 座標をとる関数、 $(0, 0)$ が入っているのは、エラーを回避するためのおまじないである。

`th=数列 [x(交点 [g(x), i s, (0,0)]), i, 0, kk - 1]`

ここで、最後の `i,0,kk-1` が数列をとる範囲を示している。 こうして、面積を24等分した時の、パラメータの値が得られた。 これを図示するためには、

`l1=数列 [線分 [c(要素 [th, i]), (f,0)], i, 1, kk]`

とすればよい。 ここで、`要素 [th, i]` は i 個目の要素で、それをパラメータとする楕円上の点は、`c(パラメータ)` で表わされる。 `線分 [ , ]` は線分を与える。 数列 `[ , i, 1, kk]` で24個の線分が描かれる。

ここまでうまくできたら、[編集] → [プロパティ] を開き、 kk の値を72などに変更して見るとよい。 また、 b の値も変えてみるとよい。

6 BASICによる演習

BASICで常微分方程式を数値的に解くことを考えよう。

十進 BASIC というソフトウェアを使う。これは

<http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/>

からダウンロードできる。

平面上で原点からの引力が働いている状態を考える。平面の座標を (x, y) とする。 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ として、力の大きさは r^k に比例するとする。フックの法則の場合は $k = 1$, 万有引力の法則の場合は $k = -2$ である。

微分方程式は

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = -r^{k-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。比例定数, 質量は 1 としている。

BASIC のプログラム上では, 次のように計算される。ある時刻 t において, 惑星が $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ という座標をもち, 速度が, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ であるとする。点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ において受ける力 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

に比例する加速度で, 非常に短い時間 h の後, 惑星は, 位置 $\begin{pmatrix} x + hu \\ y + hv \end{pmatrix}$ にあり, 速度 $\begin{pmatrix} u + hf \\ v + hg \end{pmatrix}$ を持っていると考えられる。 h の大きさが十分小さければ, 実際の運動と変わらないと考えられる。

まず, 逆 2 乗の万有引力の法則に従う解の様子を見てみよう。そのためには, 時刻 0 での位置と速度が決まっていると考える。ここでは, 位置は $(0.5, 0)$, 速度は $(0, 0.5)$ と考えよう。時間間隔 $h = 0.000001$ にとって, $t = 0$ から $t = 2$ まで, 描かせるプログラムは次のようになる。

```
! 平面の微分方程式
! dx/dt = u, du/dt = - x/SQR((x^2+y^2)^3)
! dy/dt = v, dv/dt = - y/SQR((x^2+y^2)^3)
DECLARE PICTURE axes
SET WINDOW -1.3,0.7,-1,1
DRAW axes
SET POINT STYLE 1
DEF f(x,y)=- x/SQR((x^2+y^2)^3)
DEF g(x,y)=- y/SQR((x^2+y^2)^3)

LET x=0.5
LET y=0
LET u=0
LET v=0.5
LET h=0.000001
```

```

LET t=0
PLOT POINTS: x,y
DO WHILE t<=2
  LET t=t+h
  LET uu=u
  LET vv=v
  LET u=u+f(x,y)*h
  LET v=v+g(x,y)*h
  LET x=x+uu*h
  LET y=y+vv*h
  PLOT POINTS: x,y
LOOP

END

```

- これを、書き込んで実行させてみよ.
- 最初の速度が, $(0, 0.5)$, $(0, 1)$, $(0, 1.5)$, $(0, 2)$ となる軌道を同時に表示させるプログラムに作り替えよ.
- これらの軌道が, 楕円であることを確かめるために, $x = 0.5$ に接し原点が焦点であるような楕円の族を描いて比較してみよ.

$x = 0.5$ に接し原点が焦点であるような楕円の族は, 次のような形で描くとよい.

```

SET POINT COLOR 6
LET a=0.02
DO WHILE a<100
  FOR t=0 TO 4000
    PLOT POINTS: (0.5-a)/2+(a+0.5)/2*COS(2*PI*t/4000), SQR(a/2)*SIN(2*PI*t/4000)
  NEXT t
  LET a=(a+0.5)*1.04-0.5
LOOP

```

```

SET POINT COLOR 1

```

- 逆3乗に比例する引力について軌道を描いてみよ.
- 反比例する引力について軌道を描いてみよ.
- 比例する引力について軌道を描いてみよ.