

東京大学玉原国際セミナーハウス

2008年9月13日 - 15日

科学技術振興機構 (JST)

「サイエンス・パートナーシップ・
プロジェクト事業 (講座型学習活動)」

群馬県教育委員会高校教育課

東京大学大学院数理科学研究科

平成20年度高校生玉原数学セミナー 「図形の数理」

- 1 . 9月13日 11:00 - 12:00 (関口英子)
軌跡 (図形と方程式)
- 2 . 9月13日 13:30 - 14:30 (松尾 厚)
図形の平行移動と回転
- 演習 9月13日 15:00 - 16:00 (坪井 俊)
軌跡の作図 PCでソフトウェアKSEGを用いて軌跡を描く
- 3 . 9月13日 16:30 - 17:30 (桂 利行)
2次同次式
- 4 . 9月14日 9:00 - 10:00 (関口英子)
2次曲線, 2次曲面
- 5 . 9月14日 10:30 - 11:30 (坪井 俊)
円錐曲線
- 6 . 9月14日 15:00 - 16:00 (松尾 厚)
立体射影
- 演習 9月14日 16:30 - 17:30 (坪井 俊)
線織面 双曲放物面, 一葉双曲面 模型の製作
- 7 . 9月15日 9:00 - 10:00 (桂 利行)
反転と立体射影
- 8 . 9月15日 10:30 - 11:30 (松尾 厚)
空間の回転

図形の数理

様々な図形の性質を深く理解し応用することは、科学の歴史の中で常に重要なテーマである。多角形や多面体の形は、平面上の直線と円周、空間内の直線、平面、球面などとともに研究されてきたが、曲面の研究も紀元前から始まっていた。高校の数学で、楕円、双曲線、サイクロイドなども学ぶ。このような図形の性質について考えるのがこのセミナーの目的である。

1 条件を満たす点の集合（軌跡）

1.1 軌跡

さまざまな図形が、点がある条件を満たして（動いて）いるとき描かれるものとして記述される。そのような点の全体は、条件を満たす点の軌跡と呼ばれることも多い。「軌跡」と「条件を満たす点の集合」の数学的意味は同じである。

1.2 例

たとえば、円周は、平面上の1点 O から一定の距離 r にある点の集合（軌跡）である。平面上の2点 A, B から等距離にある点の集合（軌跡）は、線分 AB の垂直二等分線である。

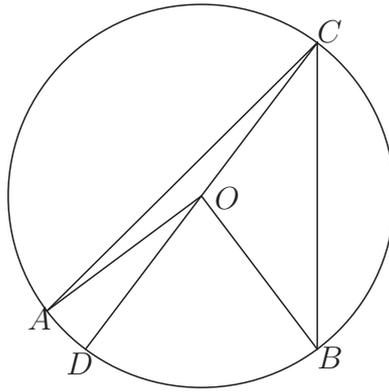
まず、平面幾何の言葉で記述される点の軌跡を考えよう。

- (1) 線分 AB を決まった角度で見込む点の軌跡。
- (2) 2点 A, B への距離の比が一定であるような点の軌跡。
- (3) 2点への距離の和が一定であるような点の軌跡
- (4) 2点への距離の差が一定であるような点の軌跡。
- (5) 1点と1直線への距離が等しいような点の軌跡。
- (6) 1点と1直線への距離の比が一定であるような点の軌跡。

1.3 円周角の定理

円周角の定理とは次のものである。

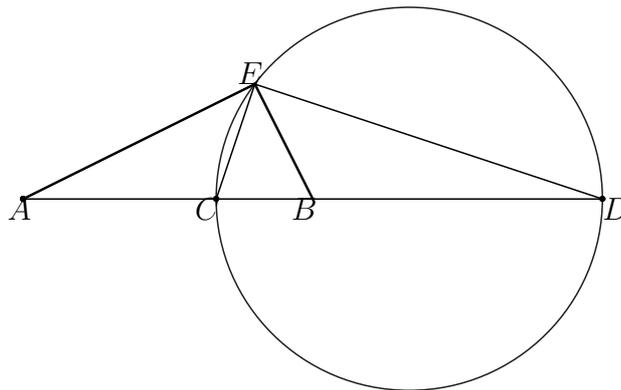
円周上に2点 A, B をとり、 A, B を端点とする円弧の一方に C をとるとき、角 ACB は、弧の上の C のとり方によらず一定である。



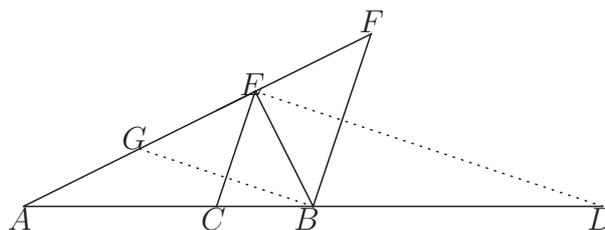
線分 AB と点 C に対し，角 ACB を C において線分 AB を見込む角と呼ぶ．1.2 節 (1) に述べた，線分 AB を一定の角度で見込む点 C の全体は， A, B を端点とする円弧となることが証明できる．

1.4 アポロニウスの円の定理

線分 AB を一定の比に内分する点を C ，同じ比に外分する点を D とする．点 E に対し，長さの比 $AE : EB$ が同じ比であれば， E は直径が CD となる円周上にある．



これは， $AC : CB = AE : EB$ から， EC が角 AEB の二等分線であることがわかり， $AD : AB = AE : EB$ から， ED が角 AEB の外角の二等分線であることがわかるからである．下の図参照 ($EB = EF$ となる点を取ると，二等辺三角形の底角として，角 $EBF =$ 角 EFB である．平行線と比例の関係から， EC と FB は平行となり，錯角として，角 $CEB =$ 角 EBF ，同位角として，角 $GEC =$ 角 EFB である．外角についても同様．)



アポロニウスの円の定理から，1.2 節 (2) の軌跡が円であることがわかる．

2 座標

2.1 直線，放物線，楕円の方程式

座標が与えられると平面上の曲線を式で表すことができる．

直線は，1次式で表される．すなわち， $ab \neq 0$ として， $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by = c\}$ と表される．原点を中心とする円は $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ である． $a \neq 0$ として $y = ax^2 + bx + c$ は放物線を表す．

楕円は，1.2節(3)(6)で定まる図形で，

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

のように表される(3)で定める時，2点は焦点と呼ばれる(6)で定める時，1点は焦点，直線は準線と呼ばれる．

座標平面上で，2点 (x_0, y_0) , (x_1, y_1) の距離は，ピタゴラスの定理(三平方の定理)から， $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$ で表される．

2.2 例題

$a > b > 0$, $f = \sqrt{a^2 - b^2}$ として $(\pm f, 0)$ を焦点とする焦点への距離の和が $2a$ ($> 2f$) であるような点のなす図形(楕円)の方程式を求めよ．

解答例．条件を式に書くと，

$$\sqrt{(x - f)^2 + y^2} + \sqrt{(x + f)^2 + y^2} = 2a$$

となる．移項して両辺を二乗し，展開すると次を得る．

$$(\sqrt{(x + f)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x - f)^2 + y^2})^2$$

$$(x + f)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - f)^2 + y^2} + (x - f)^2 + y^2$$

移項して計算すると

$$4a\sqrt{(x - f)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xf$$

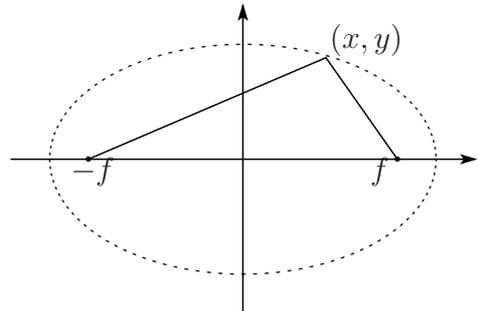
4で両辺を割り，両辺を二乗すると以下のようになる．

$$a\sqrt{(x - f)^2 + y^2} = a^2 - xf$$

$$a^2\{x^2 - 2xf + f^2 + y^2\} = (a^2 - xf)^2 = a^4 - 2xa^2 + x^2f^2$$

両辺に $2a^2xf$ を加えると

$$a^2\{x^2 + f^2 + y^2\} = a^4 + x^2f^2$$



を得る．ここで， $f = \sqrt{a^2 - b^2}$ だから，

$$a^2\{x^2 + a^2 - b^2 + y^2\} = a^4 + x^2(a^2 - b^2)$$

整理して

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

両辺を a^2b^2 で割って

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を得る．解答例終り．

2.3 例題

$a > b > 0$, $f = \sqrt{a^2 - b^2}$, $c = \frac{a^2}{f}$, $e = \frac{f}{a}$ とする． $e < 1$, $f < a < c$ である．焦点 $(-f, 0)$, 準線 $x = -c$, 焦点への距離と準線への距離の比が $e (< 1)$ であるような点のなす図形 (楕円) の方程式を求めよ．

解答例．条件を式に書くと

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} = e|x+c|$$

となる．両辺を二乗して，

$$(x+f)^2 + y^2 = e^2(x+c)^2$$

展開すると，

$$x^2 + 2fx + f^2 + y^2 = e^2x^2 + 2e^2cx + e^2c^2$$

であるが， $f = ce^2$ だから，

$$x^2 + f^2 + y^2 = e^2x^2 + e^2c^2$$

移項して

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = e^2c^2 - f^2 = a^2 - f^2 = b^2$$

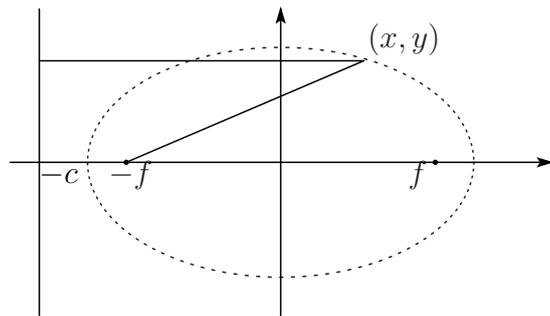
を得る．

$$1 - e^2 = \frac{a^2 - f^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

だから，

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を得る．



2.4 双曲線の方程式

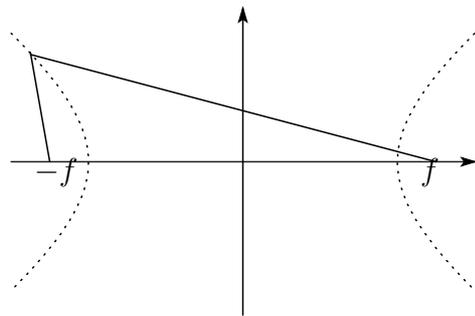
双曲線は，1.2節(4)(6)で定まる図形で，

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

のように表される(4)で定める時，2点は焦点と呼ばれる(6)で定める時，1点は焦点，直線は準線と呼ばれる．

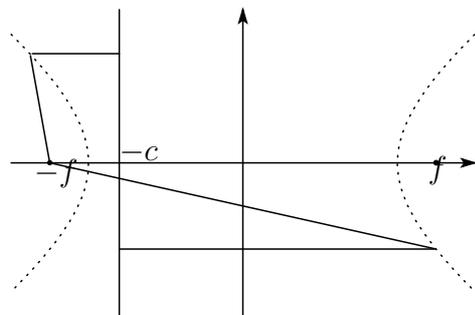
2.5 問題

$a > b > 0$, $f = \sqrt{a^2 + b^2}$ として $(\pm f, 0)$ を焦点とする焦点への距離の差が $2a$ ($< 2f$) であるような点のなす図形(双曲線)の方程式を求めよ(例題 2.2 参照)．



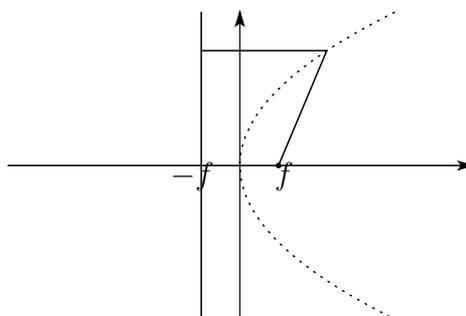
2.6 問題

$a, b > 0$, $f = \sqrt{a^2 + b^2}$, $c = \frac{a^2}{f}$, $e = \frac{f}{a}$ とする． $e > 1$, $c < a < f$, である．焦点 $(-f, 0)$, 準線 $x = -c$, 焦点への距離と準線への距離の比が e (> 1) であるような点のなす図形(双曲線)の方程式を求めよ(例題 2.3 参照)．



2.7 問題

$f > 0$ とする．焦点 $(f, 0)$, 準線 $x = -f$, 焦点への距離と準線への距離が等しいような点のなす図形 (1.2 節 (5), 放物線) の方程式を求めよ．



3 図形の平行移動, 回転, 相似

後で, x, y の 2 次多項式 $= 0$ で表される図形 (2 次曲線) は, どのようなものか考えるが, その準備として, 図形の平行移動, 回転, 相似について考えよう．

3.1 平行移動

図形 A が

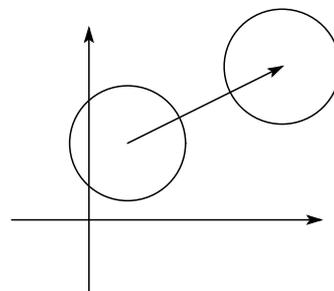
$$A = \{(x, y) \mid x, y \text{ についての条件}\}$$

で表わされているとき, A を x 方向に p , y 方向に q 平行移動して得られる図形 B は, A の点 (x, y) に対し, $X = x + p, Y = y + q$ で与えられる点 (X, Y) の集合だから, B は,

$$B = \{(X, Y) \mid X - p, Y - q \text{ についての条件}\}$$

として得られる．

例えば, (a, b) を中心とする半径 r の円は, $\{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$ で表されるが, それを x 方向に p , y 方向に q 平行移動して得られる図形は, $(a + p, b + q)$ を中心とする半径 r の円であるが, $\{(X, Y) \mid (X - p - a)^2 + (Y - q - b)^2 = r^2\}$ で表されている．



3.2 相似拡大・縮小 (定数倍)

原点を中心に相似に拡大縮小するのも簡単である．図形 A が

$$A = \{(x, y) \mid x, y \text{ についての条件}\}$$

で表わされているとき， A を原点を中心に相似に k 倍に拡大（縮小）して得られる図形 B は， A の点 (x, y) に対し， $X = kx, Y = ky$ で与えられる点 (X, Y) の集合だから， B は，

$$B = \{(X, Y) \mid \frac{X}{k}, \frac{Y}{k} \text{ についての条件}\}$$

として得られる．

例えば， (a, b) を中心とする半径 r の円は， $\{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$ で表されるが，それを原点を中心に相似に k 倍に拡大（縮小）して得られる図形は， (ka, kb) を中心とする半径 kr の円であるが， $\{(X, Y) \mid (\frac{X}{k} - a)^2 + (\frac{Y}{k} - b)^2 = r^2\}$ で表されている．

楕円 $\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ は，単位円 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を x 軸方向に a 倍， y 軸方向に b 倍にして得られる図形である．

3.3 回転と複素数

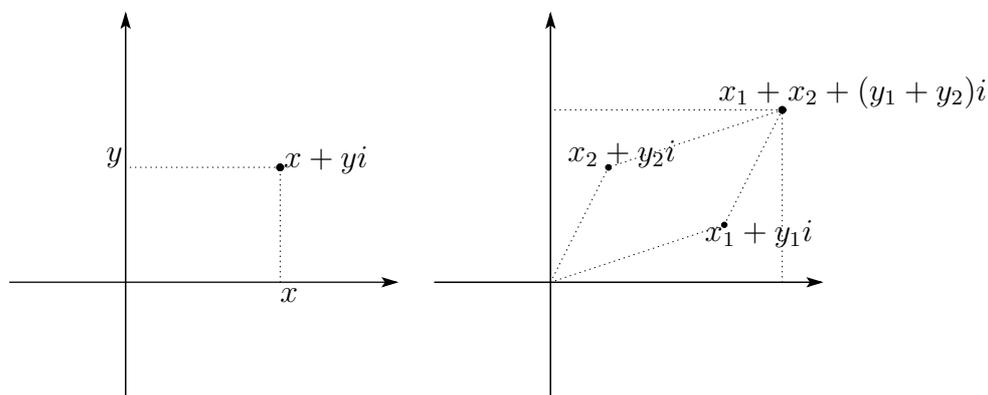
回転は，少し難しい．

回転がよくわかるためには，三角比，三角関数 $\sin \theta, \cos \theta$ がよく分かっているとよい．そのためには，複素数を考えるのが，早道である．

複素数 $x + yi$ と平面の点 (x, y) は，1対1に対応する．複素数の和は，

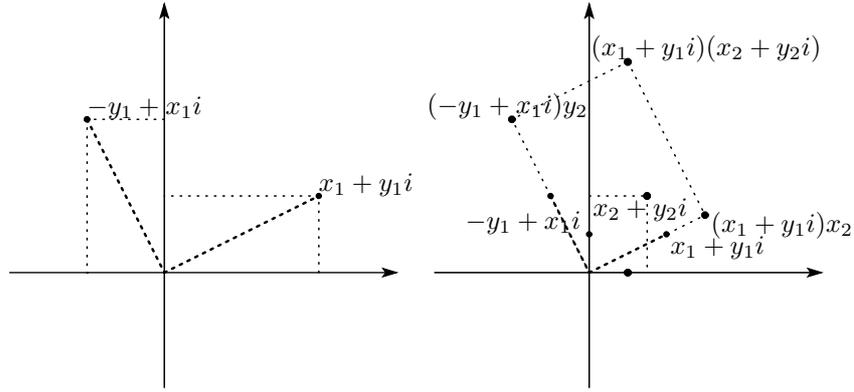
$$(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

であり， $0, x_1 + y_1i, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, x_2 + y_2i$ は平行4辺形の頂点となる．



複素数の積がもっと幾何的に興味深い．

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) &= (x_1 + y_1i)x_2 + (x_1 + y_1i)y_2i \\ &= (x_1 + y_1i)x_2 + (-y_1 + x_1i)y_2 \end{aligned}$$



- $-y_1 + x_1i$ は $x_1 + y_1i$ を原点のまわりに 90° 回転した点である。
- 原点と $x_1 + y_1i$ を結ぶ半直線を描き、そのうえに原点からの距離が、 $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} x_2$ の点をとる。
- その半直線を 90° 回転した半直線上に、原点からの距離が、 $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} y_2$ の点を取り、2つの線分を辺とする長方形の頂点として、 $(x_1 + y_1i)x_2 + (-y_1 + x_1i)y_2$ すなわち $(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i)$ が得られる。
- $0, x_2, x_2 + y_2i$ を頂点とする三角形と $0, (x_1 + y_1i)x_2, (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i)$ を頂点とする三角形は相似で、 x 軸の正方向と原点と $x_1 + y_1i$ を結ぶ半直線のなす角度 θ だけ回転し、 $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ 倍に拡大（縮小）したものである。

決まった複素数 $x + yi$ を複素数に掛ける操作は、原点のまわりの回転と原点を中心とする拡大（縮小）をおこなうことを表している。拡大縮小の大きさ、すなわち、原点と点 $x + yi$ の距離を複素数の絶対値 $|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$ を定義する。また、回転の大きさ、すなわち、 x 軸の正方向と原点と点 $x + yi$ を結ぶ半直線のなす角度 θ を複素数 $x + yi$ の偏角と呼ぶ。

3.4 $re^{\theta i}$

複素数 $x + yi$ の絶対値 $r = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$ と偏角 θ が定まった（ただし、複素数 $0 = 0 + 0i$ には、偏角を定めない）。絶対値と偏角を決めるとそれをもつ複素数が定まる（複素数に対しては、偏角は、 360° （弧度法では 2π ）の整数倍の不定性がある）。絶対値 r 、偏角 θ の複素数を $re^{\theta i}$ と書くことにする。 $e^{\theta i}$ は、絶対値 1、すなわち、単位円周上の偏角 θ の複素数を表している。

この書き方で、複素数の積を表すと

$$(r_1 e^{\theta_1 i})(r_2 e^{\theta_2 i}) = (r_1 r_2) e^{(\theta_1 + \theta_2) i}$$

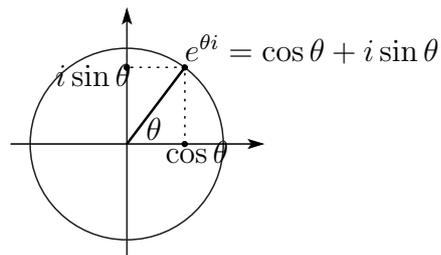
となる。

$e^{\theta i}$ は、高校2年、3年で学習する指数関数 e^x に複素数（純虚数 θi ）を代入したものである。これは、指数関数 e^x が x を複素数としても意味をもつという（大学1年で学習する）オイラーの発見によっている。

3.5 円関数あるいは三角関数

高校で学習する三角関数をつかえば，

$$e^{\theta i} = \cos \theta + i \sin \theta$$



となっている．

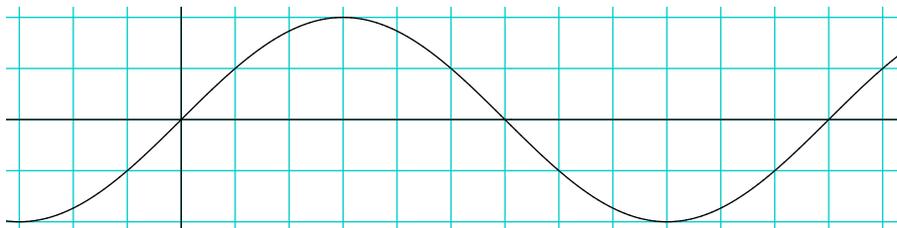
三角関数をまだ習っていない人は（すでに習っている人も），単位円周上の偏角 θ の複素数の実部が $\cos \theta$ ，虚部が $\sin \theta$ と考えるのが良い．なぜなら， $e^{\theta_1 i} e^{\theta_2 i} = e^{(\theta_1 + \theta_2) i}$ は，三角関数の加法定理と呼ばれているものとなり，三角関数の加法定理を暗記する必要がなくなるからである．

$$\begin{aligned} e^{\alpha i} e^{\beta i} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ e^{(\alpha + \beta) i} &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

だから，

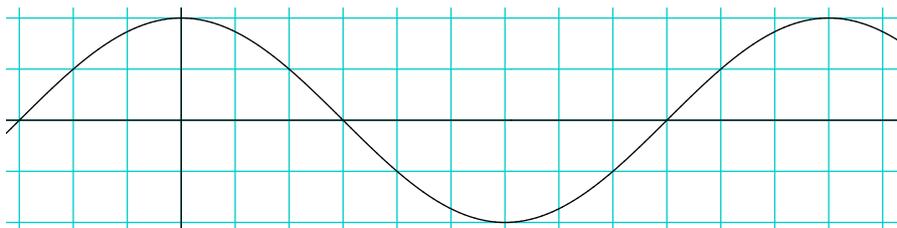
$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$z = \sin \theta$ のグラフを θz 平面に描くと下の図のようになるが，この曲線はサイン・カーブ（正弦曲線）と呼ばれる．波の形の典型的なものである．このグラフにおいても， θ 方向の一目盛は，30度を弧度法で表した $\frac{\pi}{6} = \text{約 } 0.5236$ であり， z 方向の一目盛は，0.5である．



正弦曲線を描いた紙を丸めるとどのような曲線になるだろうか？

$z = \cos \theta$ のグラフを θz 平面に描くと下の図のようになるが，この曲線は $z = \sin \theta$ のグラフを左に 90° （弧度法では $\frac{\pi}{2}$ ）平行移動したものになっている．理由は図形的に考えると分かる．



4 2次式 $ax^2 + bxy + cy^2$

4.1 2次式の円周上での値

$ax^2 + bxy + cy^2$ の半径 r の円周上での値を考えよう. $x + yi = re^{i\theta}$ とすると, $x - yi = re^{-i\theta}$ である. $x = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}r$, $y = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}r$ だから,

$$\begin{aligned} & ax^2 + bxy + cy^2 \\ &= ar^2 \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 + br^2 \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) + cr^2 \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 \\ &= ar^2 \left(\frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} \right) + br^2 \left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{4i} \right) + cr^2 \left(\frac{e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}}{-4} \right) \\ &= \frac{a - c - bi}{4} r^2 e^{2i\theta} + \frac{a - c + bi}{4} r^2 e^{-2i\theta} + \frac{a + c}{2} r^2 \end{aligned}$$

ここで, 複素数 $\frac{a - c - bi}{4}$ に注目しよう. $\frac{a - c - bi}{4} = 0$ ならば, $a = c$, $b = 0$ で, $ax^2 + bxy + cy^2 = a(x^2 + y^2)$ である. $\frac{a - c - bi}{4} \neq 0$ のとき,

$$K = \left| \frac{a - c - bi}{4} \right| = \frac{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}{4}$$

として

$$\frac{a - c - bi}{4} = Ke^{i\alpha}$$

とおくと, $\frac{a - c + bi}{4} = Ke^{-i\alpha}$ であり,

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= Kr^2 e^{i\alpha} e^{2i\theta} + Kr^2 e^{-i\alpha} e^{-2i\theta} + \frac{a + c}{2} r^2 \\ &= Kr^2 e^{i(2\theta + \alpha)} + Kr^2 e^{-i(2\theta + \alpha)} + \frac{a + c}{2} r^2 \\ &= 2Kr^2 \cos(2\theta + \alpha) + \frac{a + c}{2} r^2 \end{aligned}$$

となる. $\cos(2\theta + \alpha)$ は, θ について周期が 180° (弧度法では π) の正弦曲線のグラフに従って値が変化し, $\theta = -\frac{\alpha}{2}$ において最大となる. また, $\theta = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ で最小となる.

4.2 点の回転

点 (x, y) を原点の周りに $\frac{\alpha}{2}$ ラジアン回転した点を (X, Y) とする. 複素数で, 点 $z = x + yi$ を $\frac{\alpha}{2}$ ラジアン回転した点を $Z = X + Yi$ とすると, $\frac{\alpha}{2}$ ラジアンの回転は, 複素数 $e^{\frac{\alpha}{2}i}$ を掛けることで表されるから, $Z = ze^{\frac{\alpha}{2}i}$ と書かれる.

$$X + Yi = Z = ze^{\frac{\alpha}{2}i} = re^{\theta} e^{\frac{\alpha}{2}i} = re^{\theta + \frac{\alpha}{2}i}$$

だから,

$$X - Yi = re^{-(\theta + \frac{\alpha}{2})i}$$

である .

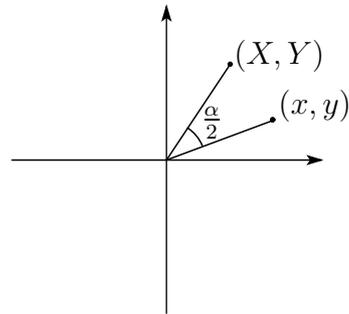
$$\begin{aligned} r^2 e^{(2\theta+\alpha)i} &= (r e^{(\theta+\frac{\alpha}{2})i})^2 = (X + Yi)^2, \\ r^2 e^{-(2\theta+\alpha)i} &= (r e^{-(\theta+\frac{\alpha}{2})i})^2 = (X - Yi)^2 \end{aligned}$$

だから ,

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= Kr^2 e^{(2\theta+\alpha)i} + Kr^2 e^{-(2\theta+\alpha)i} + \frac{a+c}{2} r^2 \\ &= K(X + Yi)^2 + K(X - Yi)^2 + \frac{a+c}{2} r^2 \\ &= K(X + Yi)^2 + K(X - Yi)^2 + \frac{a+c}{2} (X^2 + Y^2) \\ &= (2K + \frac{a+c}{2})X^2 + (2K - \frac{a+c}{2})Y^2 \end{aligned}$$

となる . これは , $AX^2 + BY^2$ という形の式である .

つまり , $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ を満たす図形を原点の周りに $\frac{\alpha}{2}$ ラジアン回転すると , $AX^2 + BY^2 = 0$ を満たす図形が得られる .



4.3 問題

A, B がともに正となる条件 , A, B がともに負となる条件 , A, B の符号が異なるとなる条件 , A, B の一方が 0 となる条件を a, b, c で表してみよ .

4.4 問題

$z = x + yi$ に対して , $Z = X + Yi$ を $Z = z e^{\frac{\alpha}{2}i}$ で定めた . $e^{\pm \frac{\alpha}{2}i} = \cos \frac{\alpha}{2} \pm i \sin \frac{\alpha}{2}$ を用いて , X, Y を x, y で , x, y を X, Y で表せ .

4.5 原点の周りに回転して得られる図形

図形 A が $\{(x, y) \mid x, y \text{ についての条件}\}$ で表わされているとき, A を原点の周りに θ ラジアン回転して得られる図形 B の条件式を求めるためには, 点 (x, y) を原点の周りに θ ラジアン回転した点の座標を求めればよい. (x, y) を原点の周りに θ ラジアン回転した点 (X, Y) は,

$$\begin{aligned} X &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ Y &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

で与えられる. したがって,

$$\begin{aligned} x &= X \cos \theta + Y \sin \theta \\ y &= -X \sin \theta + Y \cos \theta \end{aligned}$$

であって, B は, $\{(X, Y) \mid X \cos \theta + Y \sin \theta, -X \sin \theta + Y \cos \theta \text{ についての条件}\}$ として得られる.

5 2次曲線

5.1 2次式が表す図形

x, y についての2次方程式が表す図形を2次曲線と呼ぶ. 2次曲線を一般に表すと, $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ という方程式を満たす点の全体である.

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ という方程式を満たす図形がどのようなものか理解するために, 図形を回転, 平行移動して考えよう.

5.2 2次曲線の回転, 平行移動

$ax^2 + bxy + cy^2$ の部分に注目して, 2次曲線 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ を回転すると, 4.5節にあるように, x, y に,

$$\begin{aligned} x &= X \cos \theta + Y \sin \theta \\ y &= -X \sin \theta + Y \cos \theta \end{aligned}$$

を代入した X, Y の2次方程式が得られるが, 4.2節のように回転すると, 2次同次の部分は $AX^2 + BY^2$ になる. 従って, うまく回転すると得られた図形は, $AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0$ と表される.

$AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0$ で表される図形は,

- $A = B = 0$ ならば, D, E の一方は0ではないとして, 直線を表す.

以後, $A \neq 0$ とする.

- $A \neq 0, B = 0$ のとき,

– $E \neq 0$ ならば, $Y = -\frac{A}{E}X^2 - \frac{D}{E}X - \frac{F}{E}$ で表される放物線となる.

– $E = 0$ ならば, $AX^2 + DX + F = 0$ は, 平行な 2 直線, 1 直線または空集合を表す.

• $A \neq 0, B \neq 0$ のとき, 平方完成をおこなう. すなわち,

$$\begin{aligned} & AX^2 + BY^2 + DX + EY + F \\ &= A\left(X + \frac{D}{2A}\right)^2 + B\left(Y + \frac{E}{2B}\right)^2 + F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4B} \end{aligned}$$

従って, 図形は $G = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}$ として, $AX^2 + BY^2 = G$ で表される図形を X 軸方向へ $-\frac{D}{2A}$, Y 軸方向へ $-\frac{E}{2B}$ 平行移動したものになる. これは, 楕円, 双曲線, 交わる 2 直線, 1 点, 空集合のどれかを表す.

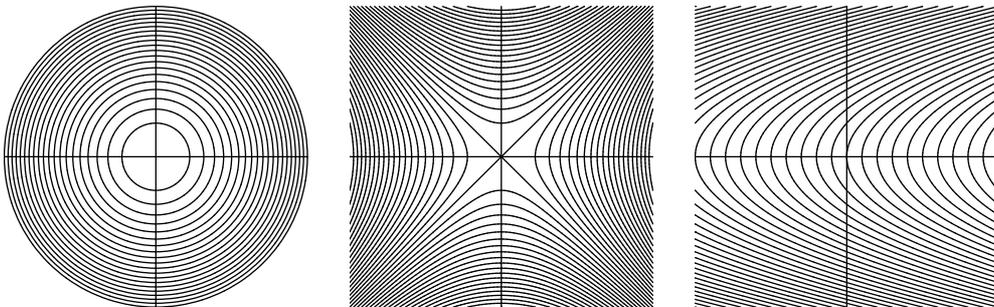
5.3 注意

ここでは, 平面は複素数平面と考えられること, すなわち, 平面の座標として複素数を使えることを使って座標を回転して, 2 次曲線の標準形を得た. この考え方は, 3 次元, 4 次元, 一般に n 次元の空間では使うことが出来ない. しかし, n 次元の空間でも, 変数 x_1, \dots, x_n の 2 次方程式で表される図形は, 同じような標準形を持つことが証明できる. それは行列の理論によるもので, 線形代数として, 大学 1 年生の数学の講義で扱われるものである.

6 2 次関数のグラフ, 2 次曲面

6.1 2 変数関数のグラフの等高線

x, y の 2 次式が, xy 平面の平行移動と回転で, $ax^2 + by^2 + c$ あるいは $ax^2 + by + c$ の形にできるということから, 実数 h に対し, $ax^2 + by^2 + c = h$ あるいは $ax^2 + by + c = h$ となる曲線を描くことができる. これは, $f(x, y) = ax^2 + by^2 + c$, あるいは, $f(x, y) = ax^2 + by + c$ という 2 変数関数のグラフ $z = ax^2 + by^2 + c$, あるいは, $z = ax^2 + by + c$ の等高線を描いていることになる.



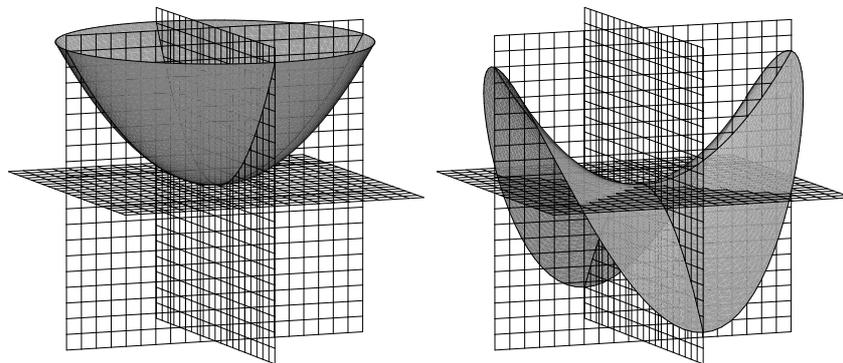
6.2 2変数関数のグラフ

1次関数 $f(x, y) = ax + by + c$ のグラフ $z = ax + by + c$ は平面である。 xz 平面上の傾き a の直線 $z = ax + c$ と, yz 平面上の傾き b の直線 $z = by + c$ は, z 軸上の点 c で交わるが, この交わる2直線を含む平面が $z = ax + by + c$ で表される。

$z = f(x, y)$ のグラフと, $z = f(x, y) - c$ のグラフは z 軸方向の平行移動で写りあうから, 合同である。

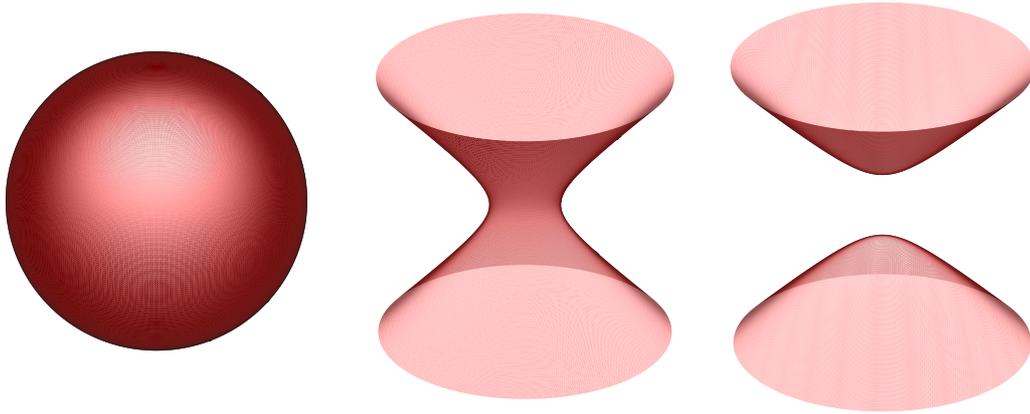
$z = ax^2 + by^2 + c$ は, xz 平面上の放物線を, 直線 $z = by + c$ に沿って, 平行移動して, 描かれる図形である。 xz 平面に平行な平面は $y = \text{一定}$ で表されるが, それらの平面との交わりは, 合同な放物線である。 xy 平面に平行な平面は $z = \text{一定}$ で表されるが, それらの平面との交わりも, $b \neq 0$ のとき, $y = -\frac{a}{b}x^2 - \frac{c}{b}$ と合同な放物線である。

$ab \neq 0$ とする。 $f(x, y) = ax^2 + by^2$ のグラフ $z = ax^2 + by^2$ の形は, a, b の符号により異なる。 グラフを x 軸方向に $\sqrt{|a|}$ 倍, y 軸方向に $\sqrt{|b|}$ 倍すると, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, $f(x, y) = -x^2 + y^2$, $f(x, y) = -x^2 - y^2$ のどれかのグラフと一致する。 $z = x^2 + y^2$, $z = -x^2 - y^2$ は, xz 平面上の放物線 $z = x^2$, $z = -x^2$ を z 軸の周りに回転して得られる回転面である。 $z = x^2 - y^2$, $z = -x^2 + y^2$ は, 双曲放物面と呼ばれる。 $z = 2xy$ も合同な曲面である。 $z = 2xy$ を考えると, 曲面と $x = \text{一定}$ の平面との交わりは直線であり, 曲面と $y = \text{一定}$ の平面との交わりも直線である。 この双曲放物面は, 2組の直線の集合で織られているというので, 線織面と呼ばれる。



6.3 2次曲面

3変数の2次式で表される図形は, 上のようなグラフかまたは $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ($abc \neq 0$) により表される図形に合同であることが知られている。 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ で表される図形を x 軸方向に $\sqrt{|a|}$ 倍, y 軸方向に $\sqrt{|b|}$ 倍, z 軸方向に $\sqrt{|c|}$ 倍すると, $\pm x^2 \pm y^2 \pm z^2 = 1$ で表される図形になる。 図形の形は, \pm の符号の組み合わせで定まっているから, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $-x^2 - y^2 - z^2 = 1$ の4通りとなるが, 順に球面, 1葉双曲面, 2葉双曲面, 空集合となる。



yz 平面上の直線 $z = \pm y$ を x 軸に沿って平面 $x = 1$ 上に平行移動した直線は、 $\{(1, t, \pm t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ のようにも書かれるが、これを z 軸の周りに回転すると、曲面 $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ ，すなわち 1 葉双曲面となる．1 葉双曲面も線織面である．

7 円錐曲線

7.1 歴史

楕円，放物線，双曲線は，円錐と平面の共通線として表される．

歴史的には，円錐と平面の交わりとして得られる曲線として最初に認識された．

日中に，地面に立てた棒の太陽による影を地面に記録していくと，棒の先端は，双曲線を描くことがわかる．

ギリシャ，ローマ時代の幾何学の発展において，例えば，実用的な日時計を作成すること，太陽光を鏡で集める武器を製作すること，面積体積を測りうまく分割することなどへの応用が重要であったようである．公理から始めて命題の証明を演繹するユークリッドの原論の成立には，幾何学のこのような問題に対する有効性が，一度証明されたものは常に正しいことが保証されるということがあったようである．ユークリッドの原論が書かれる前から，3 大難問と呼ばれる問題が定式化されていた．円積問題，立方倍積問題，角の 3 等分がそれである．

円錐曲線として理解されていた 2 次曲線を使って，立方倍積問題，角の 3 等分を解くことが考えられている．

数学の歴史について，日本語ならば，

<http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/humanind/jinmei.htm>

英語では，The MacTutor History of Mathematics archive

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html>

などのウェブページが参考になる．

ここで，円錐曲線に関係する数学者の名前を挙げると，以下のようなになる．

(1) ターレス (624 BC – 547 BC, エジプト ギリシャ)，ピタゴラス (569 BC – 475 BC, イタリア)，ユークリッド (325 BC – 265 BC, アレクサンドリア)，アルキメデス (287 BC – 212 BC, シシリア)，アポロニウス (262 BC – 190 BC, トルコ エジプト)，プトレマイオス (85 – 165, アレクサンドリア)，パップス (290 – 350, アレクサンドリア)

(2) ティコ・ブラーエ (1546 - 1601, デンマーク チェコ), ガリレオ (1564 - 1642, イタリア), ケプラー (1571 - 1630, ドイツ), デカルト (1596 - 1650, フランス), デザルグ (1591 - 1661, フランス), パスカル (1623 - 1662, フランス), ニュートン (1642 - 1727, イギリス)

(3) ガウス (1777 - 1855, ドイツ), メビウス (1790 - 1868, ドイツ), クライン (1849 - 1925, ドイツ), ホップ (1894 - 1971, ドイツ), 小平邦彦 (1915 - 1997), 広中平祐 (1931 -), 森重文 (1951 -), 川又雄二郎 (1952 -)

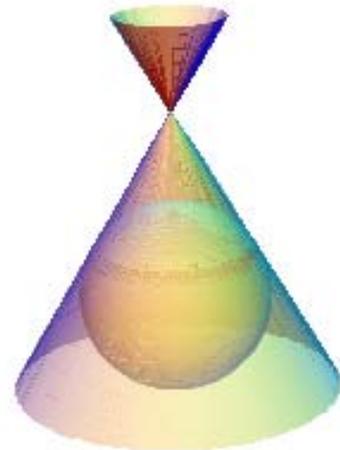
(1) は円錐曲線の幾何的な理解をおこなった数学者達である (2) は, 惑星の軌道が 2 次曲線になるという発見とそのニュートン力学による説明に関係する数学者達である (3) は, 幾何学の一つの分野として確立する, 共形幾何, 射影幾何, 代数幾何に関する現在までの数学者達である.

7.2 円錐と平面の交線

さて円錐曲線の説明をすると以下のよう

(直) 円錐とは, 次で定義される図形である. 空間内の 2 つの直線 l_0, l_1 が点 A で交わるとする. l_1 を l_0 の周りに回転して得られる図形 C を円錐と呼ぶ. A は円錐の頂点, l_0 を (直) 円錐の回転軸, l_1 およびそれを l_0 の周りに回転して得られる直線を円錐の母線と呼ぶ.

A と異なる母線上の 1 点 P を l_0 の周りに回転して円周 c が得られる. 円錐は c の点と A を結ぶ直線の全体からなる図形といっても良い.



円錐曲線とは円錐と円錐の頂点を通らない平面の共通部分として得られる平面上の曲線である.

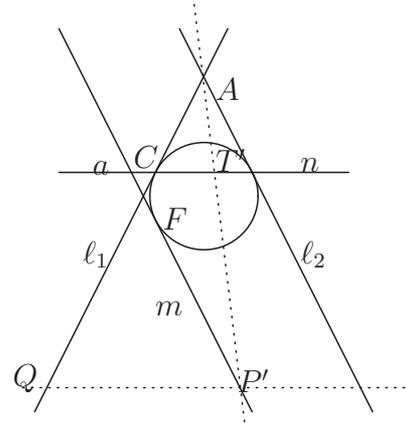
この曲線が, 最初に述べた軌跡として得られる曲線と同じになることが, 円錐と平面に接する球面を考えることにより説明される.

球面 S とその外の 1 点 A を与えると, この状況は球面の中心 O と点 A を結ぶ直線の周りの回転について回転対称だから, A から球面への接線全体は A を頂点とする (直) 円錐となる. この円錐の回転軸 l_0 は直線 AO であり, 母線は A から球面への接線である. 母線と球面の接点全体は球面上の円周で, l_0 に垂直な平面 n 上にある.

円錐と円錐の頂点を通らない平面 m が与えられたとき, 円錐の頂点 A から平面 m への垂線の足を B とする (直) 円錐の回転軸 l_0 と B を含む平面を考え, この平面の上にある 2 本の母線を L_1, L_2 とする. この平面と平面 m の交線も図では m とする. l_0 の上に中心を持ち, 母線 l_1, l_2 に接する円周のなかで m に接するものを考える. m が l_1 または l_2 と平行なとき, このような円周は一つであり, l_1, l_2 のどちらとも平行でないとき, このような円周は 2 つある. 以下の 3 通りの図が得られる.

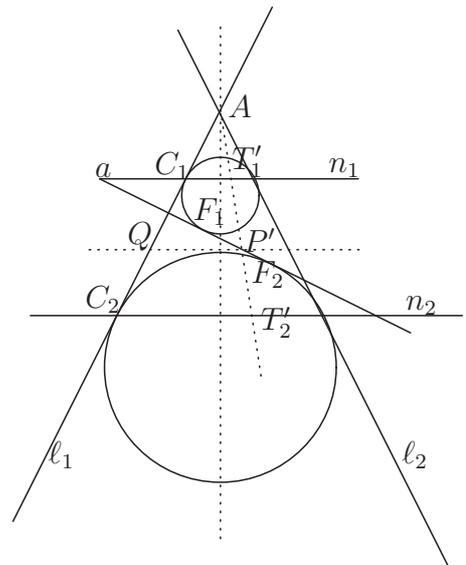
7.3 放物線

この図は、直線 m が l_2 と平行な場合である。この場合、 l_1, l_2, m に接する円周はただ一つである。この円周を l_0 の周りに回転して得られる球面と円錐の接点のなす円周を含む平面を n として、平面 m と平面 n の交線を a とする。直線 m と円の接点を F とすると、曲線上の一点 P に対し、 P と a の距離は PF に等しいことがわかる。実際、母線 PA と球面と円錐の交線の円周との交点を T とすると、 PF と PT の長さは等しい。 PT の長さは図の上の QC の長さと等しい。 QC の長さは、図の aP' の長さと等しい。これは、 P と直線 a の距離である。



7.4 楕円

この図は、直線 m が l_1, l_0, l_2 とこの順に交わる場合である。この場合、 l_1, l_2, m に接する円周は2つあり、一方の円周と m の接点を F_1 、その円周を l_0 の周りに回転して得られる球面と円錐の接点のなす円周を含む平面を n_1 とする。もう一つの円周と m の接点を F_2 、その円周を l_0 の周りに回転して得られる球面と円錐の接点のなす円周を含む平面を n_2 とする。曲線上の一点 P に対し、 PF_1 と PF_2 の長さの和は、 n_1 と n_2 の間の母線の長さ C_1C_2 に等しいことがわかる。実際、母線 PA と n_1 との交点を T_1 とすると、 PF_1 と PT_1 の長さは等しい。 PT_1 の長さは図の上の QC_1 の長さと等しい。同様に母線 PA と n_2 との交点を T_2 とすると、 PF_2 と PT_2 の長さは等しい。 PT_2 の長さは図の上の QC_2 の長さと等しい。従って、

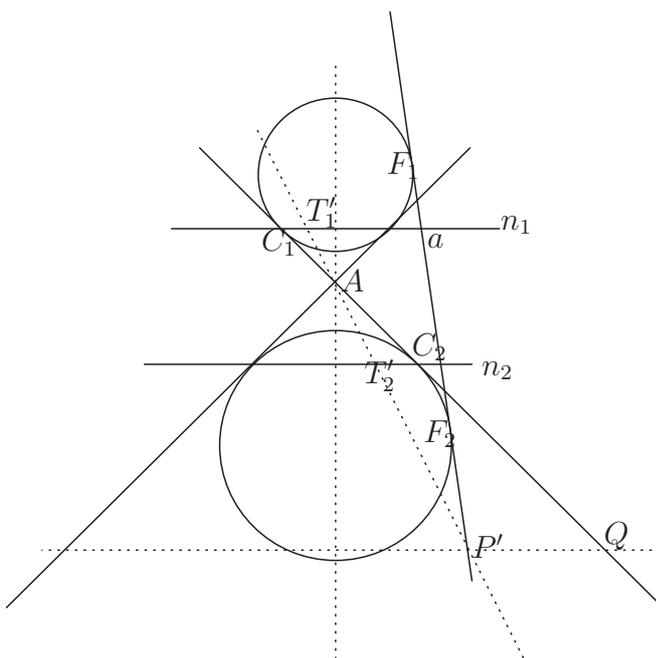


$$PF_1 + PF_2 = PT_1 + PT_2 = QC_1 + QC_2 = C_1C_2$$

この図では、違う見方も出来る。 m と n_1 の交線を a とすると、 a と P の距離は図の aP' である。長さ PF_1 は、長さ QC_1 と等しい。 $F_1P : aP' = C_1Q : aP'$ は一定 (1 より小) である。

7.5 双曲線

この図は、直線 m が l_0, l_1, l_2 と l_0, l_1, l_2 の順に、あるいは l_0, l_2, l_1 の順に交わる場合である。この場合、 l_1, l_2, m に接する円周は 2 つあり、一方の円周と m の接点を F_1 、その円周を l_0 の周りに回転して得られる球面と円錐の接点のなす円周を含む平面を n_1 とする。もう一つの円周と m の接点を F_2 、その円周を l_0 の周りに回転して得られる球面と円錐の接点のなす円周を含む平面を n_2 とする。曲線上の一点 P に対し、 PF_1 と PF_2 の長さの差は、 n_1 と n_2 の間の母線の長さ C_1C_2 に等しいことがわかる。



実際、母線 PA と n_1 との交点を T_1 とすると、 PF_1 と PT_1 の長さは等しい。 PT_1 の長さは図の上の QC_1 の長さと等しい。同様に母線 PA と n_2 との交点を T_2 とすると、 PF_2 と PT_2 の長さは等しい。 PT_2 の長さは図の上の QC_2 の長さと等しい。従って、

$$PF_1 - PF_2 = PT_1 - PT_2 = QC_1 - QC_2 = C_1C_2$$

この図で、 m と n_1 の交線を a とすると、 a と P の距離は図の aP' である。長さ PF_1 は、長さ QC_1 と等しい。 $F_1P : aP' = C_1Q : aP'$ は一定 (1 より大) である。

こうして、円錐と平面の交わりは (3)(4)(5)(6) を満たす曲線であることがわかった。

7.6 円錐曲線

円錐曲線が、楕円、放物線、双曲線となることがわかった。放物線はすべて相似である。楕円、双曲線には、相似ではないものがある。

(1) これまで回転面であるような、直円錐を考えたが、斜円錐と平面の交わりとして、新しい図形が得られるだろうか。

(2) 楕円、放物線、双曲線上の点と平面の外の 1 点を結ぶ直線の全体はどのような図形だろうか。

答は次のようになる。(1) は、斜円錐と平面の交わりも、楕円、放物線、双曲線となる。(2) は斜円錐となる。(2) は、大きな平面に放物線を、描いて眺めると楕円に見えるということを述べている。

8 立体射影 (ステレオグラフ射影)

斜円錐を最初の円周のある平面と平行でない平面との交わりが円周となることがある。このことは、立体射影の中に現れている。

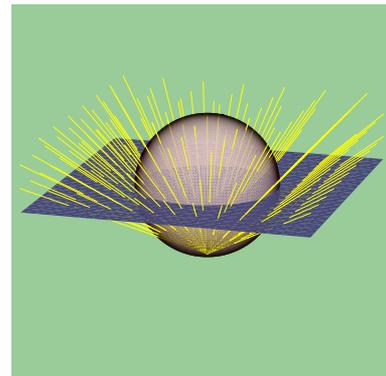
8.1 遠近法

カメラで写真を撮るとき、空間の1点から見た像を画像として、平面に写している。絵を描くときの遠近法も同じ操作をしている。これらは、数学的には画法幾何学として定式化されている。景色は、自分を取り巻く3次元空間上にあると考えて、それをひとつの平面に写した像を、論理的に描くことを考えたものである。基本的に、空間内の平行な直線は、像を描く平面の1点に集まることから、描いていくものである。立方体には、3組の平行な4つの辺をもつが、傾けた立方体の絵は、平行な4つの辺が収束する3点から描くということになる。

この画法幾何学は、射影幾何学として現代の数学の研究の基礎となっている。

8.2 立体射影 (ステレオグラフ射影)

立体射影 (ステレオグラフ射影) は、同じように1点から平面へ写すものであるが、透明な球面を考え、球面上に描かれた図形を、その北極 (あるいは南極) から、赤道を含む平面に写すものである。赤道を含む平面に、平行な平面に写しても相似な図形になるから、北極からならば、南極に接する平面、南極からならば北極に接する平面に写したものを考えてもよい。



9 正多面体の立体射影

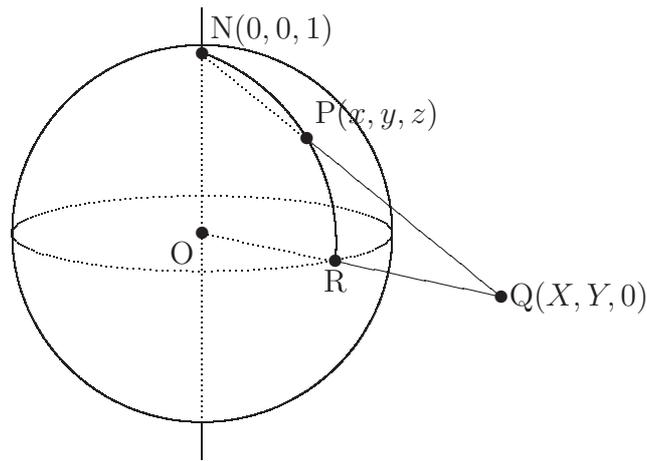
9.1 立体射影の計算

空間内の単位球面を考え、 S^2 と表す。

$$S^2 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

球面 S^2 の北極 $N(0, 0, 1)$ 以外の点に対して、赤道を通る平面すなわち xy 平面上の点を次のように対応させる。すなわち、点 $P(x, y, z) \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ に対して、直線 NP と xy 平面の交点 Q を対応させる。

この対応によって、 $P(x, y, z)$ に $Q(X, Y, 0)$ が対応したとしよう。これを $z > 0$ の場合に図示すると、次の図のようになる。



すると, $\vec{NP} \parallel \vec{NQ}$ が成立するので, ある定数 λ に対して

$$\vec{NP} = \lambda \vec{NQ}$$

具体的に座標で書くと, 次のようになる.

$$(x, y, z - 1) = \lambda(X, Y, -1)$$

これより次を得る.

$$x = \lambda X, \quad y = \lambda Y, \quad z - 1 = -\lambda$$

第三式から $\lambda = 1 - z$ となるので, これを第一式と第二式に代入して解けば,

$$X = \frac{x}{1 - z}, \quad Y = \frac{y}{1 - z}$$

かくして, 平面を \mathbf{R}^2 と表すことにすれば,

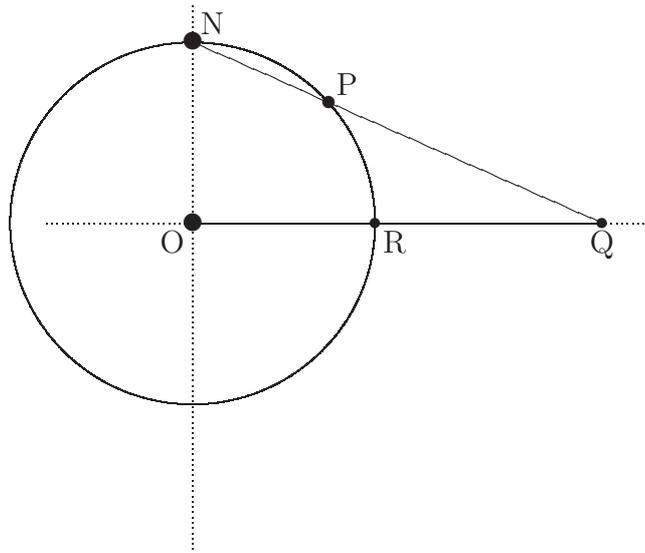
$$p: S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right)$$

これは, 複素数を用いると, 次のように表される.

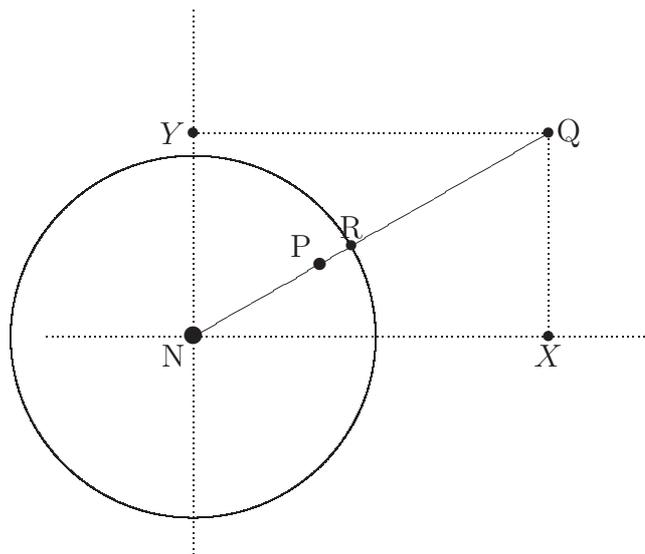
$$p: S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbf{C}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{x + yi}{1 - z}$$

ただし, \mathbf{C} は複素平面を表す.

下図は、前頁の図を点 O, N, P を含む平面で切った断面図である。



また、次の図は、上から見て xy 平面に投影した図である。



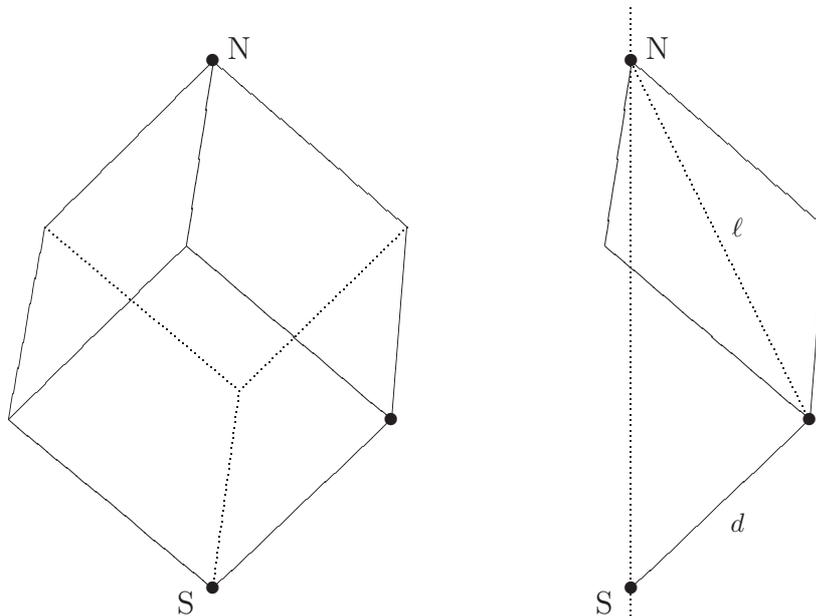
同様にして $z < 0$ の場合を図示してみよ。

9.2 立方体の立体射影

単位球面に内接する立方体を考え、一組の対蹠的な頂点が北極と南極に来るように配置する。この立方体の頂点の立体射影を求めたい。

9.2.1 計算方針

まず，下の左図は，立方体の図であり，右図はその一部を切り出した図である．

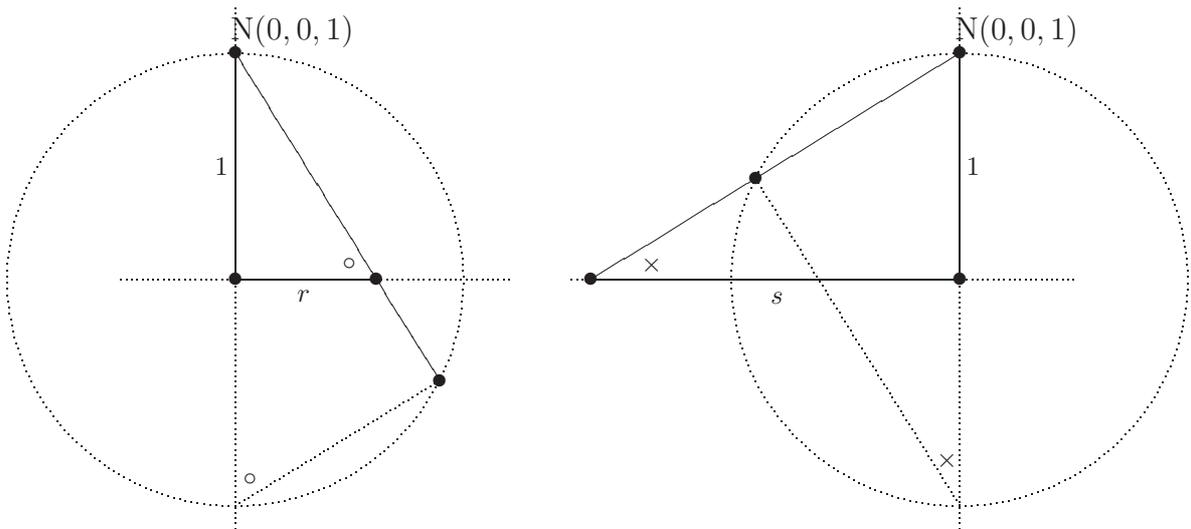


この図の d と l の比が計算できれば，後で示すように，頂点の立体射影が求まる．必要となるのは d と l の比であるから，正方形の辺の長さが 1 であるとして計算して良い．すると，対角線の長さは $\sqrt{2}$ であるから，

$$\frac{l}{d} = \sqrt{2}, \quad \frac{d}{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

9.2.2 原点からの距離の計算

次に，以下の図の長さ r および s を求める．

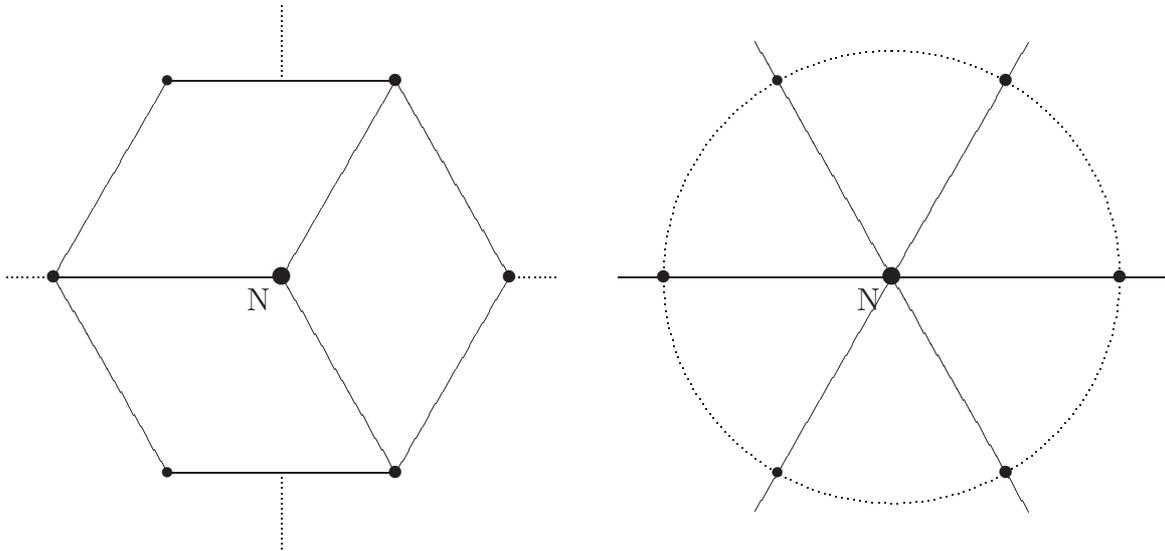


直角三角形の相似から $1 : r = d : l$ および $1 : s = l : d$ となるので，求める長さは，

$$r = \frac{l}{d} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad s = \frac{d}{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

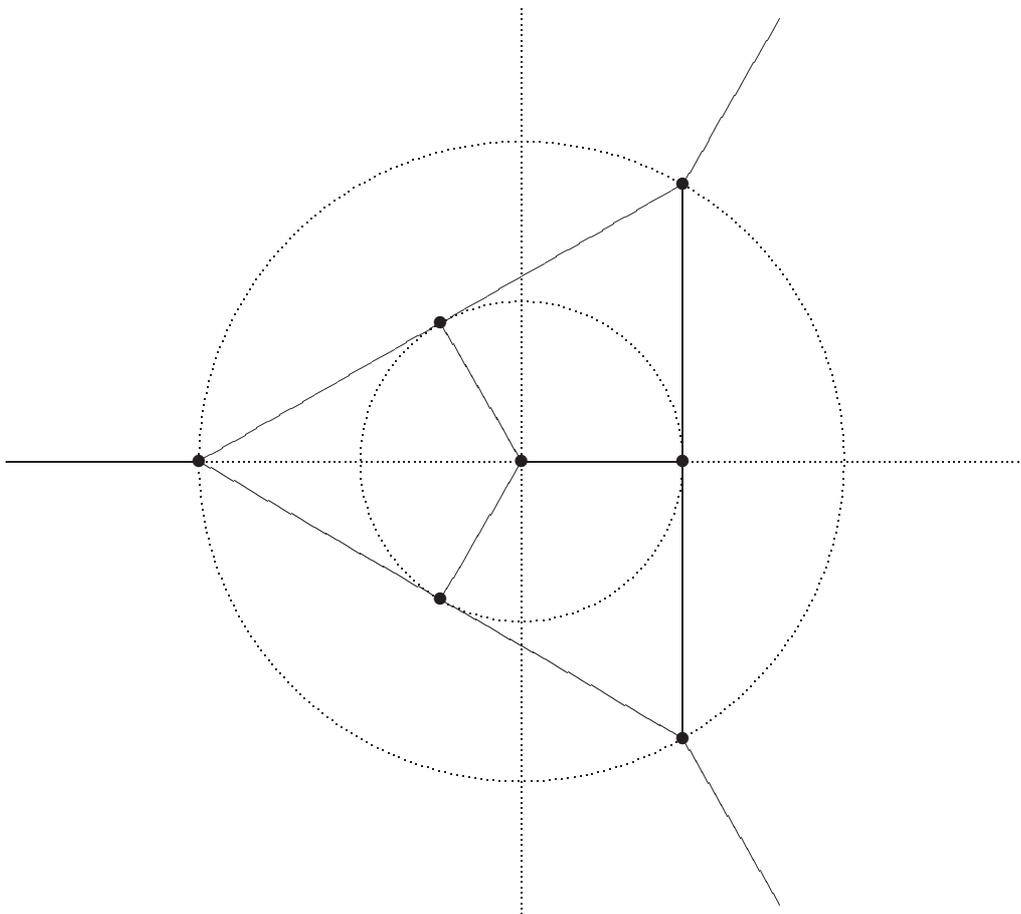
9.2.3 角度の確認

立方体を上から見た図は左図のようになり，頂点の方向は右図のようになる．



9.2.4 計算結果

以上により，立方体の頂点を平面に立体射影したものは，次のようになる．



9.3 正二十面体の立体射影

9.3.1 準備：三角比の計算

三角比 $\cos \frac{2\pi}{5}$ を計算するため， $\alpha = \cos \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}i$ とおく．すると，以下が成立する．

$$\begin{aligned}\alpha &= \cos \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}i, \\ \alpha^2 &= \cos \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5}i, \\ \alpha^3 &= \cos \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5}i, \\ \alpha^4 &= \cos \frac{8\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5}i, \\ \alpha^5 &= \cos \frac{10\pi}{5} + \sin \frac{10\pi}{5}i = 1\end{aligned}$$

ここで， $\alpha^5 - 1 = 0$ の左辺を因数分解すると，次を得る．

$$\alpha^5 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1)$$

ところが， $\alpha \neq 0$ であるので，次を得る．

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

一方，上式により

$$\alpha + \alpha^4 = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$$

この値を t とおくことにする．すると， $t^2 = (\alpha + \alpha^4)^2 = \alpha^2 + 2\alpha^5 + \alpha^8 = \alpha^2 + 2 + \alpha^3$ であるから，次を得る．

$$t = \alpha + \alpha^4, \quad t^2 = \alpha^2 + \alpha^3 + 2$$

これより， $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = (\alpha^2 + \alpha^3) + (\alpha + \alpha^4) + 1 = (t^2 - 2) + t + 1$ であるから，次を得る．

$$t^2 + t - 1 = 0$$

二次方程式の解の公式を用いて，これを解くと，

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ところが， $t = 2 \cos \frac{2\pi}{5} > 0$ であるから，

$$2 \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

一方，倍角公式により，

$$2 \cos \frac{4\pi}{5} = 4 \cos \frac{2\pi}{5} - 2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

以上により,

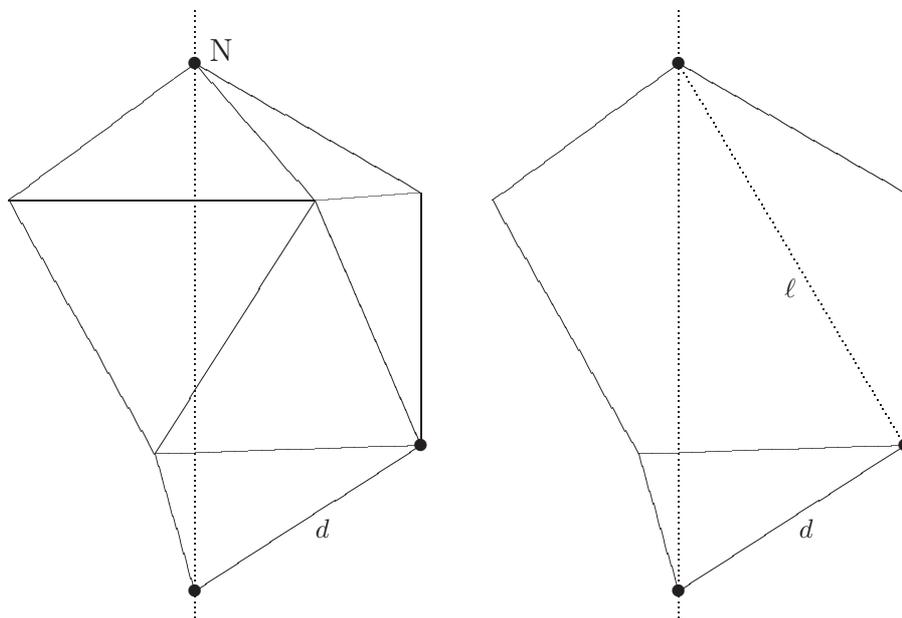
$$\cos \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{8\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \cos \frac{4\pi}{5} = \cos \frac{6\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

さらに, 次も分かる.

$$\cos \frac{\pi}{5} = -\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

9.3.2 計算方針

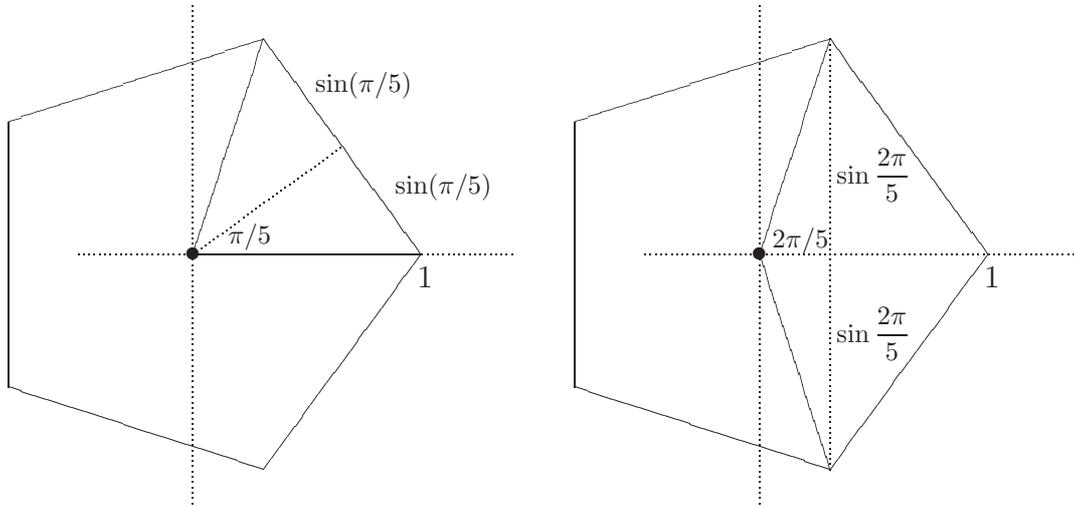
まず, 下の左図は, 正二十面体の一部を切り出した図である. また, 右図は, その一部を削った図である.



この図の d と l の比が計算できれば, 後で示すように, 頂点の立体射影が求まる. 必要となるのは d と l の比であるから, 正五角形が半径 1 の円に内接するものとして計算して良い. このとき, d は半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さであり, l はその対角線の長さである.

9.3.3 一辺の長さ d の計算

そこで、まず、半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さを求める。



従って、求める長さは

$$d = 2 \sin \frac{\pi}{5}, \quad \ell = 2 \sin \frac{2\pi}{5}$$

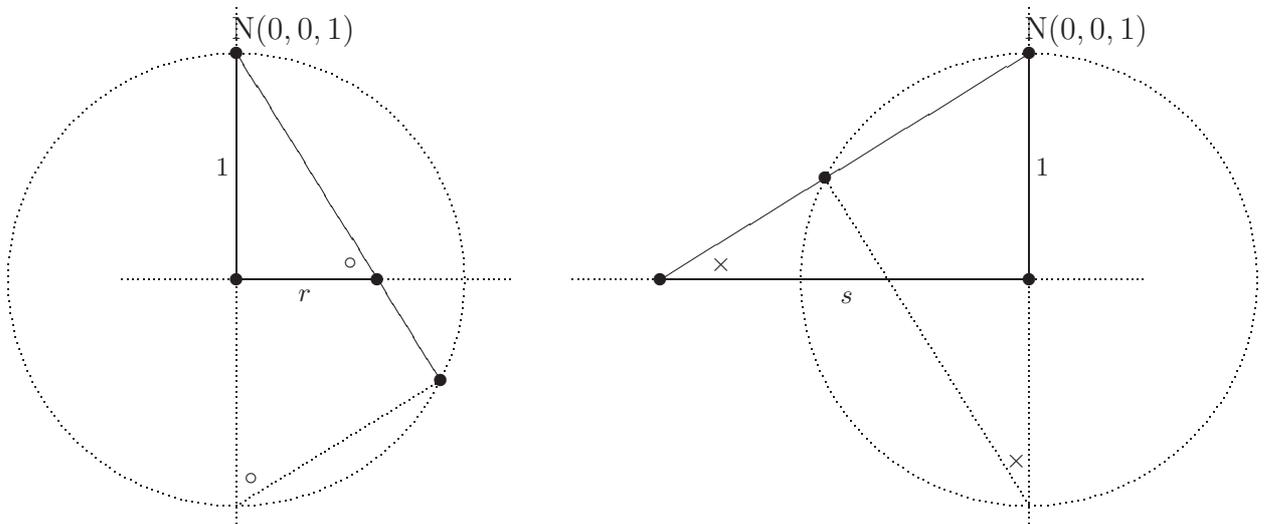
9.3.4 比 d/ℓ および ℓ/d の計算

ゆえに、求める比は

$$\frac{d}{\ell} = \frac{2 \sin \frac{2\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = 2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad \frac{\ell}{d} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

9.3.5 立体射影の計算

次に、以下の図の長さ r および s を求める。

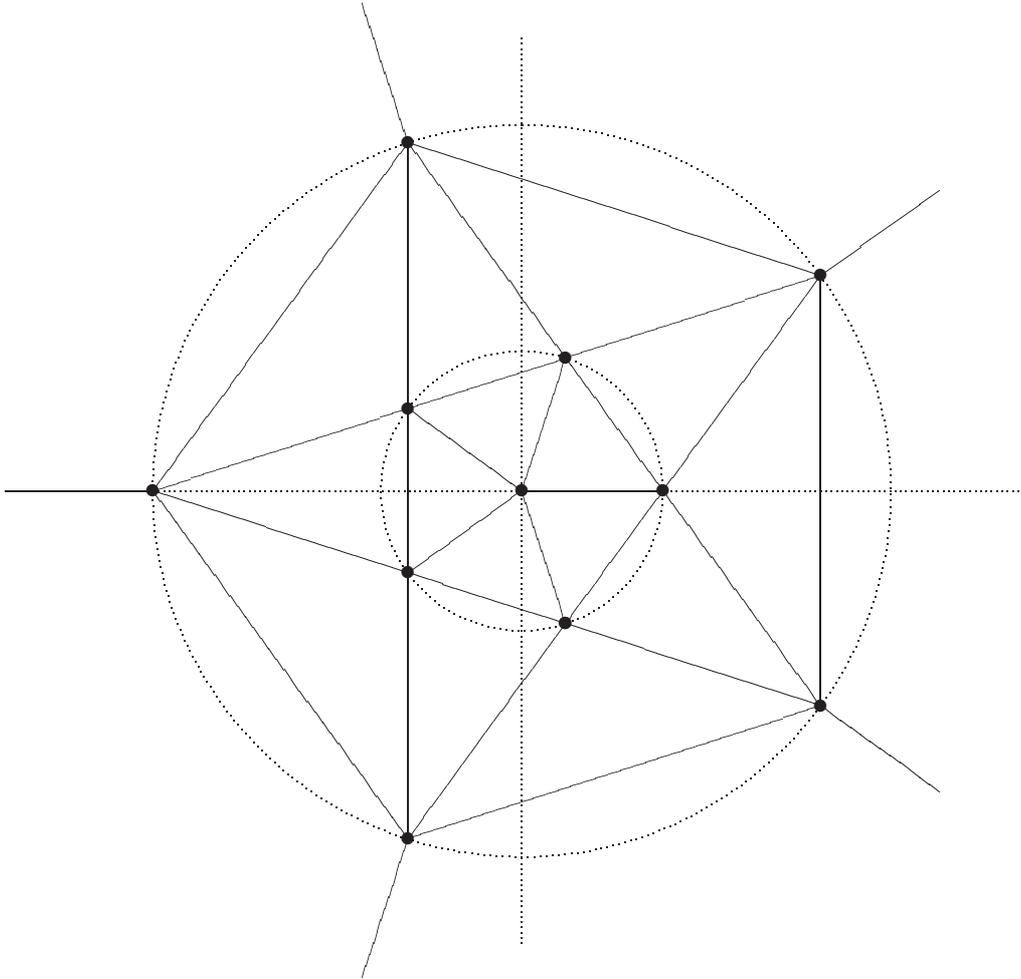


直角三角形の相似から $1:r = d:\ell$ および $1:s = \ell:s$ となるので、求める長さは、

$$r = \frac{\ell}{d} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad s = \frac{d}{\ell} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

9.3.6 計算結果

以上から、正二十面体の頂点を平面に立体射影したものは、次のようになる。



10.2 問題

円 c_1 が O を内部に含むとき, 円 c についての反転で, 円 c_1 は円に写ることを証明せよ.

10.3 問題

円 c_1 が O を通るとき, 円 c についての反転で, 円 c_1 は直線に写ることを証明せよ.

10.4 問題

直線の反転による像はどのようなになるか, 予想して証明せよ.

10.5 球面についての反転

さて, 空間内の中心 O , 半径 r の球面 S についての反転も同じように定義される. すなわち, この球面 S についての反転とは, 平面の点 P に対し, 半直線 OP 上の点 Q を,

$OP \cdot OQ = r^2$ となるようにとる対応のことである。

球面についての反転によって、空間内の球面または平面は、球面または平面に写る。なぜならば、平面上の円周 c についての反転により、円周または直線は、円周または直線に写るのであるが、それは、2つの円周の中心を通る直線について対称である。この状況を、2つの円周の中心を通る直線についてについて回転すると、球面についての反転によって、空間内の球面または平面は、球面または平面に写ることを示す図になっている。

空間内の円周は、2つの球面の交線として表される。反転は、それぞれの球面を、球面または平面に写すから、2つの球面の交線は、2つの球面または平面の交線に写される。従って、空間内の円周は、反転により、円周または直線に写される（空間内の直線は、2つの平面の交線だから、反転により、やはり2つの球面または平面の交線、すなわち、円周または直線に写される。）

立体射影は、反転と考えることができる。実際、単に球面上の北極から、赤道を通る平面への立体射影は、北極を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の球面についての反転である。

従って、立体射影は、球面上の円周を、平面上の円周または直線に写す。

11 平面の回転と複素数（詳説）

11.1 一般角と三角関数

11.1.1 一般角

半直線を考え、 x 軸の非負の部分とちょうど重なるように置く。この半直線を、端点を原点に固定して、反時計回りに回転させる。なお、反時計回りに回転させるとき、正の向きに回転させるといい、時計回りに回転させるとき、負の向きに回転させるといい。正の向きに角 θ だけ回転させることを、単に角 θ 回転させるといふ。

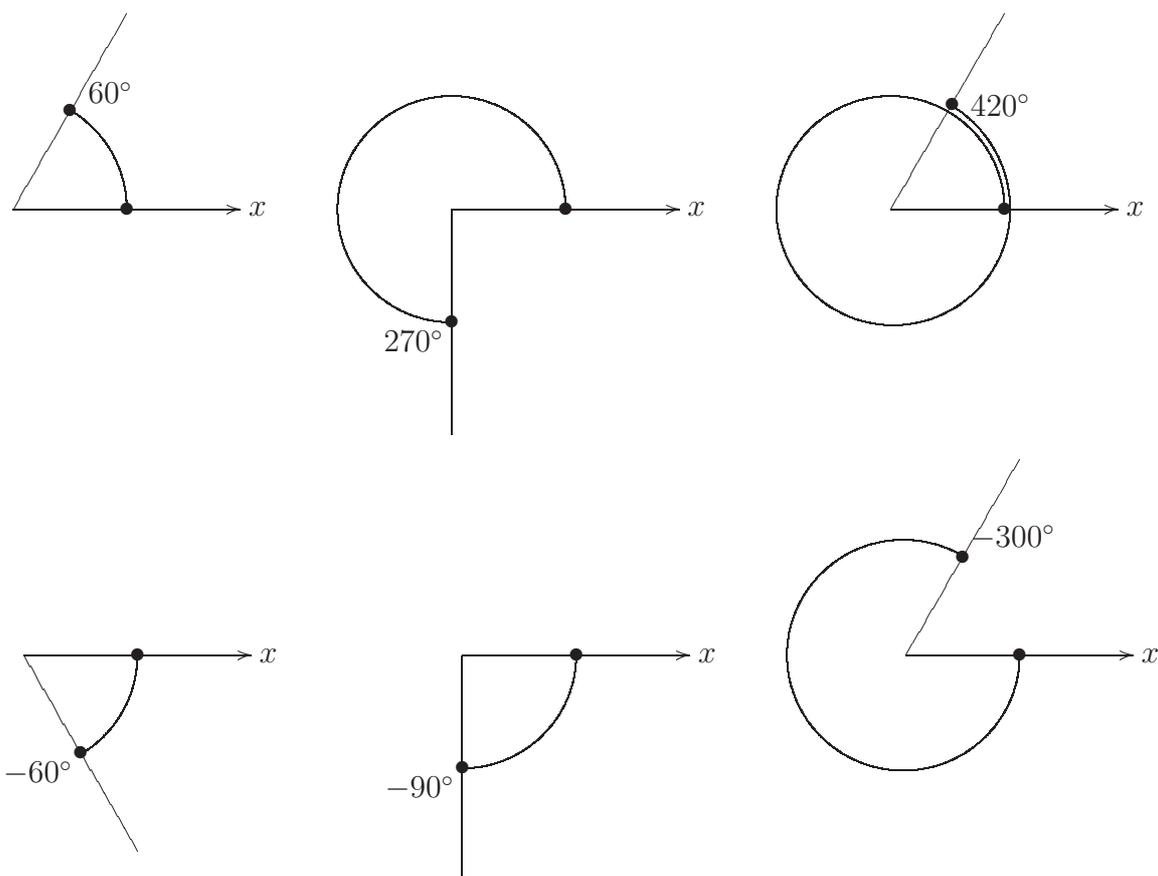
半直線を角 360° 回転させると、半直線はもとの位置に戻る。引き続き、さらに回転を続けることも可能である。このようにして、半直線は角 360° を超えて、いくらでも大きな角だけ回転させることができる。逆に、このような回転角として、 360° を超える角に意味を持たせることができる。

同様に、負の角も意味を持たせることができる。すなわち、負の向きに θ だけ回転させることを、 $-\theta$ 回転させると考えることによって、負の角に意味を持たせることができる。

このように、 360° を超える角や、負の角を考えると、これを一般角という。

角は異なるが半直線の位置が一致することがある。角とは半直線がどれだけ回転したかを表す量であって、半直線の位置と一対一に対応するわけではない。すなわち、角を与えれば、半直線の位置が決まるが、半直線の位置を決めたからといって、角が決

まるわけではない。



11.1.2 弧度法

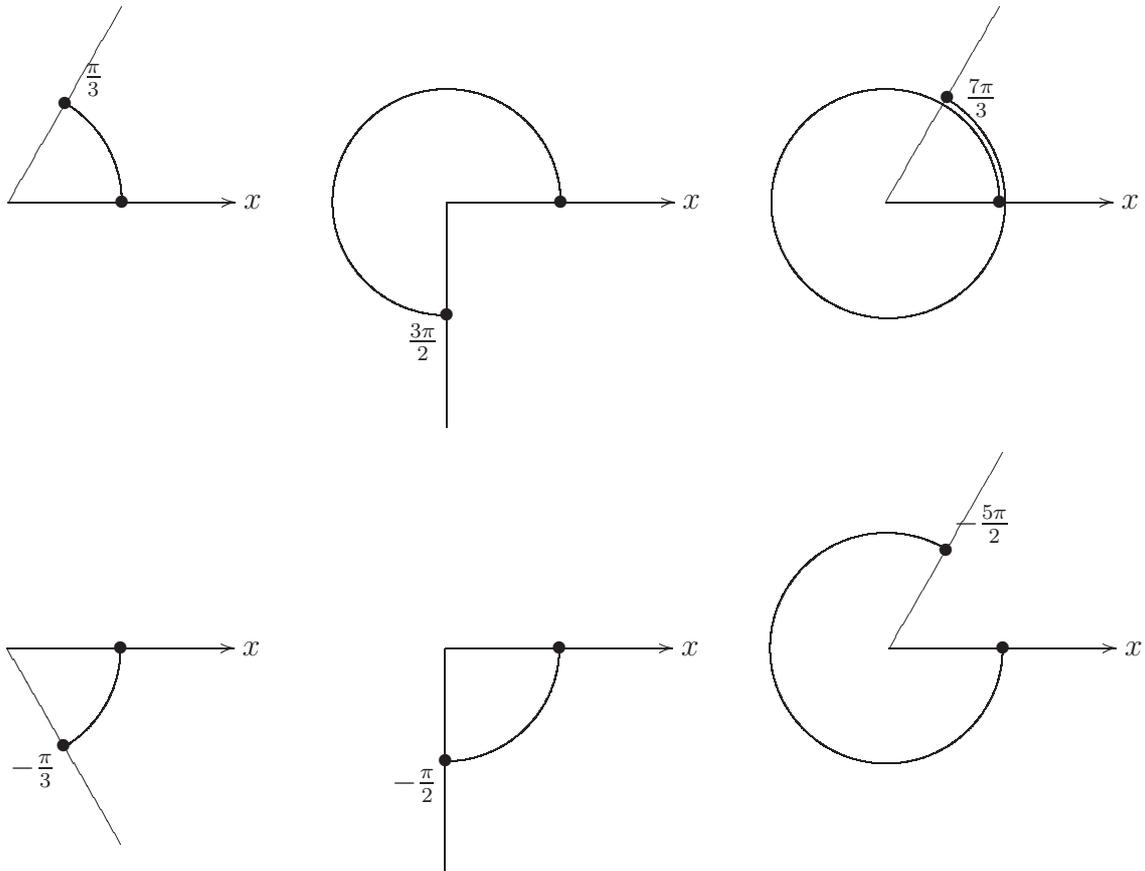
角を測る際に、単位円の弧の長さによって角を測ることができる。

すなわち、 x 軸の非負の部分とちょうど重なるように置いた半直線を、端点を原点に固定して正の向きに回転させたとき、半直線と単位円の交点が移動した道のりと回転角は比例するので、その道のりで角を表そう。また、負の向きに回転させたときには、半直線と単位円の交点が移動した道のりに負の符号をつけたもので角を表そう。

例えば、半直線を 180° 回転させると、半直線と単位円の交点は、単位円の周に沿って半周だけ移動する。単位円の全周は 2π であるから、半周は π である。この π でもって角 180° を表すと考えるのである。

また、半直線を 60° だけ回転させると、半直線と単位円の交点は、円周に沿って半周 π の $1/3$ だけ移動するので、道のりは $\pi/3$ である。この $\pi/3$ でもって角 60° を表

すと考えるのである。

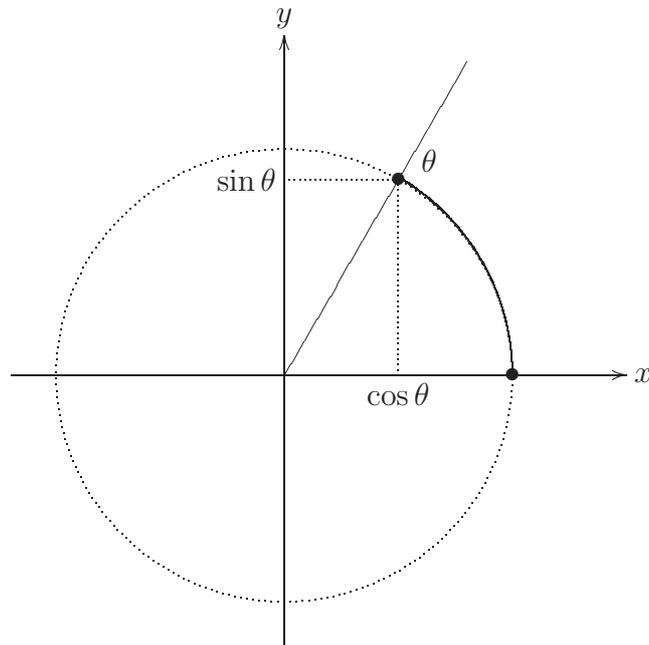


このようにして角を測ることになると，微分積分学の諸公式がきれいな形になる。

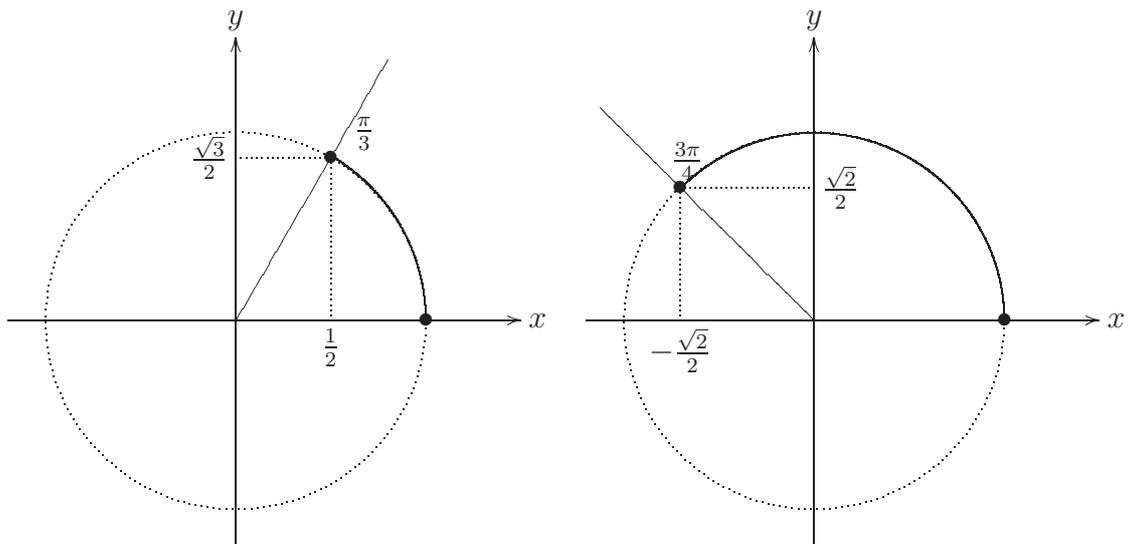
11.1.3 正弦と余弦

半直線を一般角 θ だけ回転したものを考える．それと単位円周の交点の x 座標を $\cos \theta$, y 座標を $\sin \theta$ と表し，それぞれ『コサイン・シータ』『サイン・シータ』と読む．値 $\cos \theta$, $\sin \theta$ は，半直線の位置に依存して決まるものであり，半直線がその位置に

来るような角 θ の取り方にはよらない。

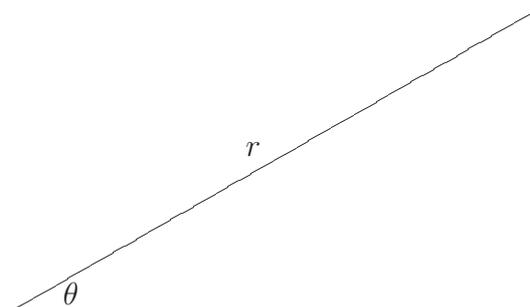


値 $\cos \theta$ を角 θ の余弦といい，値 $\sin \theta$ を角 θ の正弦という。

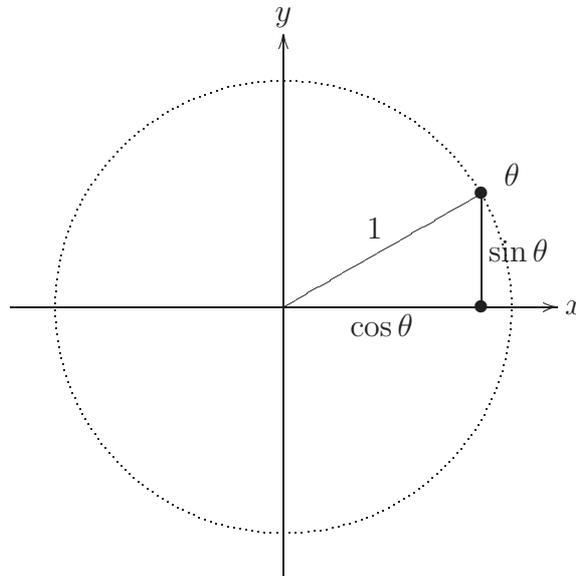


11.1.4 三角比

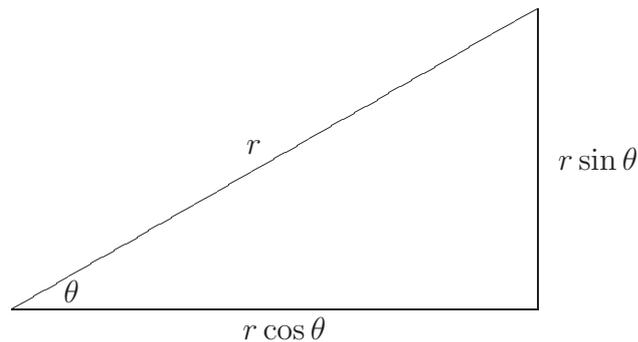
斜辺の長さが r の直角三角形が与えられたとし，鋭角の一つが θ であったとする。



この三角形と相似な三角形で、斜辺の長さが 1 のものを考えると、正弦と余弦の定め方から、次の図の状況になっている。



従って、全体を r 倍すると、次の図のようになる。



角 θ が $0 < \theta < \pi/2$ の場合には、これを正弦と余弦の定義に採用しても良い。すなわち、

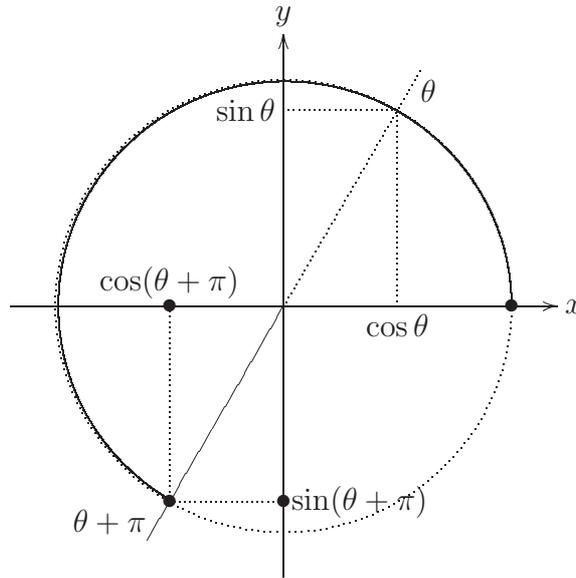
$$\text{正弦の値} = \frac{\text{対辺の長さ}}{\text{斜辺の長さ}}, \quad \text{余弦の値} = \frac{\text{底辺の長さ}}{\text{斜辺の長さ}}$$

11.1.5 一般角の場合の計算

一般の角 θ に対して、次の公式が成立する。

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta, \quad \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

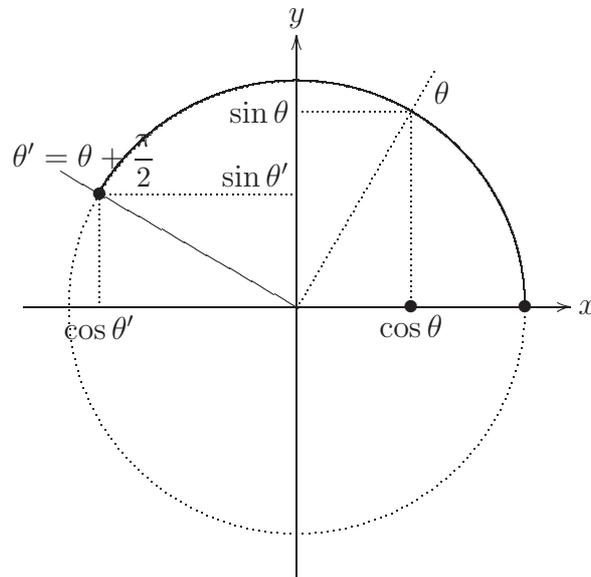
これは、正弦と余弦を定める図を考え、半直線の位置を 180° 進めた状態を考えれば、直ちに分かる。



また、 90° 回転させた状態を落ち着いて考えてみれば、次の公式も得られる。

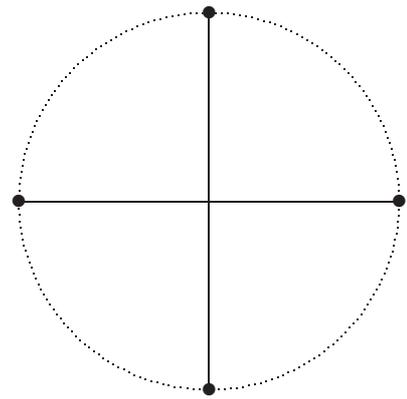
$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta, \quad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$$

実際、 $\theta' = \theta + \pi/2$ とおくと、次のようになる。

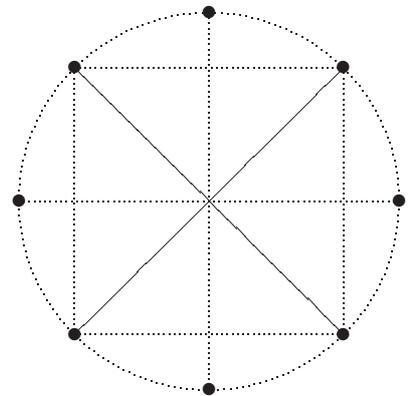


この公式を二回使えば，前の公式が得られる．

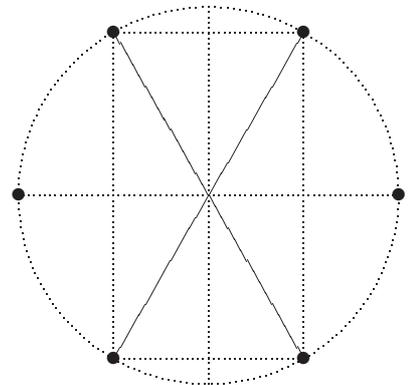
弧度法	度数法	余弦	正弦
0	0°	$\cos 0 = 1$	$\sin 0 = 0$
$\frac{\pi}{2}$	90°	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$
π	180°	$\cos \pi = -1$	$\sin \pi = 0$
$\frac{3\pi}{2}$	270°	$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$	$\sin \frac{5\pi}{2} = -1$
2π	360°	$\cos 2\pi = 1$	$\sin 2\pi = 0$



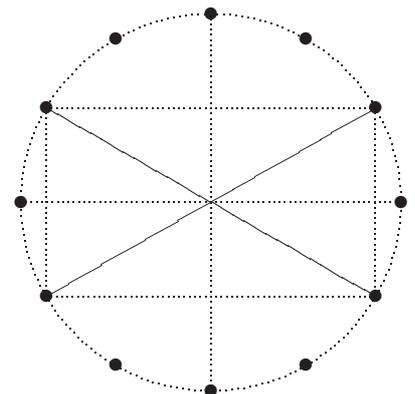
弧度法	度数法	余弦	正弦
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	135°	$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	225°	$\cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	315°	$\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



弧度法	度数法	余弦	正弦
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$	120°	$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$	$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	240°	$\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$	$\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$	300°	$\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



弧度法	度数法	余弦	正弦
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	150°	$\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$
$\frac{7\pi}{6}$	210°	$\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	330°	$\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$



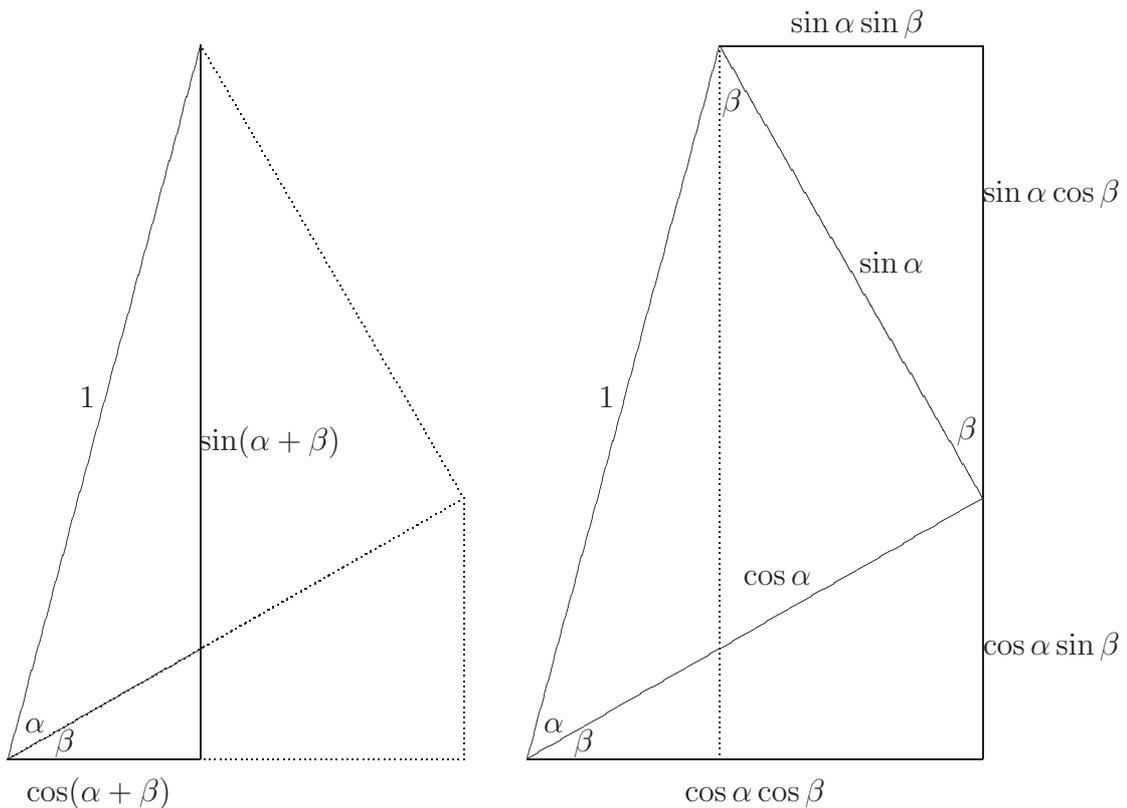
11.2 加法定理と平面の回転

11.2.1 加法定理

次の公式が成立する .

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

これは , $0 < \alpha, \beta, \alpha + \beta < \pi/2$ の場合には次の図から読み取れる .



一般の角の場合も , 上記の場合に公式 $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin \theta$, $\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$ を繰り返し適用して , 加法定理が成り立つことが確認できる . なお , この公式自体も , 加法定理の特別な場合である .

11.2.2 倍角公式

特に $\alpha = \beta$ の場合を考えると ,

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ただし , $\cos^2 \alpha$ および $\sin^2 \alpha$ は $(\sin \alpha)^2$ および $(\cos \alpha)^2$ の略記である .

前者の公式は , $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ あるいは $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ を用いると , 次のように変形される .

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

さらに, $\beta = 2\alpha$ とすると,

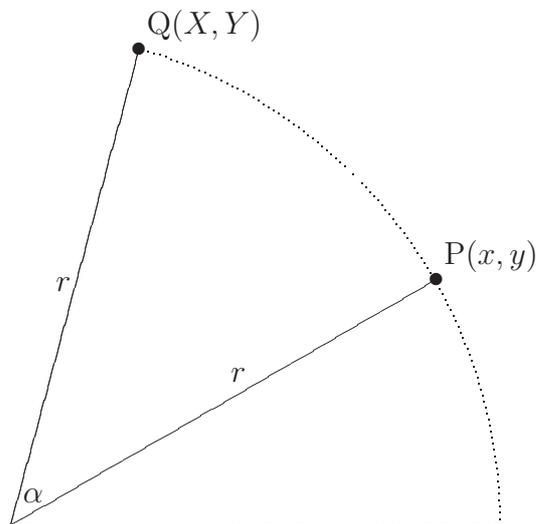
$$\begin{aligned}\cos(\alpha + 2\alpha) &= \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \\ &= \cos \alpha \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1) - \sin \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \sin(\alpha + 2\alpha) &= \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha \\ &= \sin \alpha \cdot (1 - 2 \sin^2 \alpha) + \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

これを利用して, さらに計算して整理すると,

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

11.2.3 回転の公式

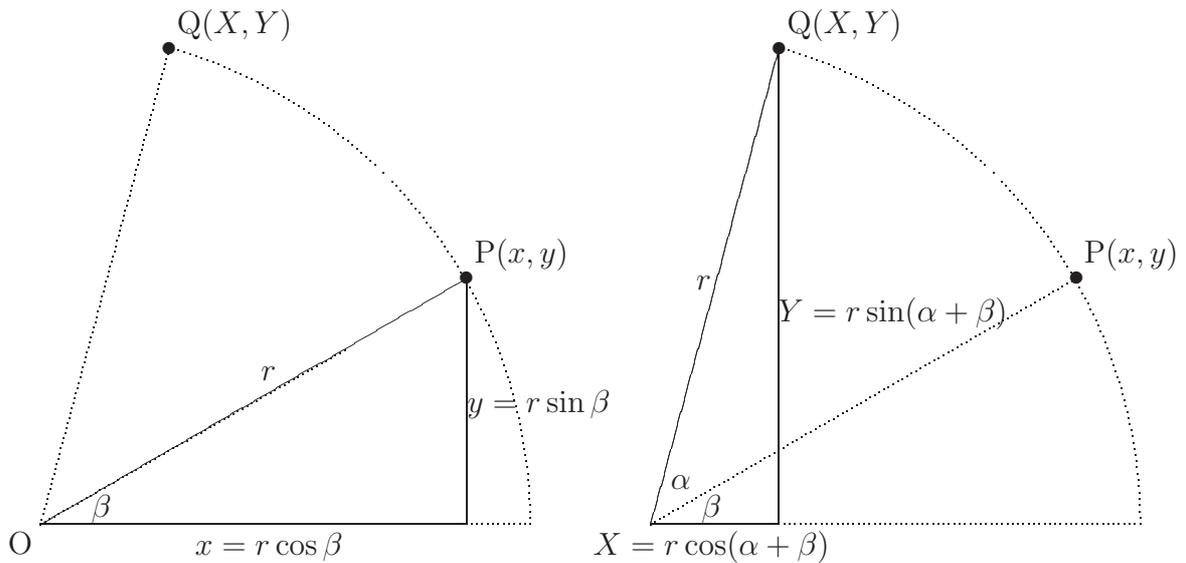
原点を中心として, 点 $P(x, y)$ を角 α 回転させて得られる点 $Q(X, Y)$ はどのような点だろうか. これは, 加法定理の考え方で議論することができる.



以下では, 点 $P(x, y)$ も点 $Q(X, Y)$ も第一象限にあるものとして話を進めるが, 他の場合も同様の結果となる.

まず, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおく. すると, 下の左図のような角 β を取ることができる. 点 $P(x, y)$ を角 α 回転した点 $Q(X, Y)$ についても, 同様に考えれば, 下の右図のよう

になる .



加法定理を用いれば ,

$$\begin{aligned} X &= r \cos(\alpha + \beta) = r \cos \alpha \cos \beta - r \sin \alpha \sin \beta = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ Y &= r \sin(\alpha + \beta) = r \sin \alpha \cos \beta + r \cos \alpha \sin \beta = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

すなわち , 次が成立する .

$$(X, Y) = (\cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot y, \sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y)$$

逆に , この式を既知とすれば , 加法定理が導かれる .

11.3 複素数

11.3.1 複素数の加法と乗法

複素数とは , 二つの実数 x, y を用いて $z = x + yi$ と表されるものであって , そのようなものを二つ用意し $a + bi, c + di$ とするとき ,

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ かつ } b = d$$

が成立し , さらに複素数同士の加法と乗法を次のように定めたものである .

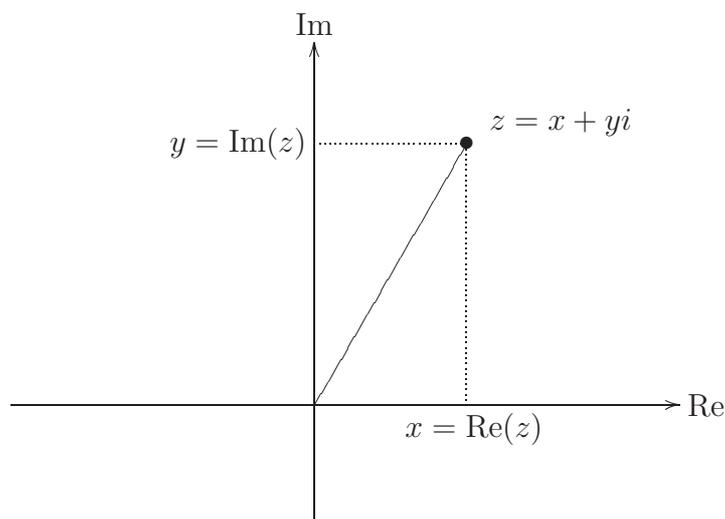
$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

これは , 二乗すると -1 になる数 $i = \sqrt{-1}$ を形式的に用意して , $a + bi$ なる和を想定するとき , それが満たすと期待される性質を演算の定義として採用したものである .

複素数の加法と乗法は交換法則 , 結合法則 , 分配法則を満たす .

11.3.2 複素平面

複素数は平面を用いて図示することができる。



これを複素平面あるいは Gauss^{カウス}平面という（複素数平面と呼ぶこともある。）横軸を実軸 (real axis) と呼んで Re と表し，縦軸を虚軸 (imaginary axis) と呼んで Im と表すことがある。また，複素数 $z = x + yi$ に対して， x を z の実部と呼んで $\text{Re}(z)$ と表し， y を z の虚部と呼んで $\text{Im}(z)$ と表すことがある。

11.3.3 複素数としての実数

複素数 $x + yi$ であって，特に $y = 0$ であるようなものを，実数 x 自身とみなす。すなわち， $x + 0i$ は x そのものであると解釈する。言い換えれば，実軸を数直線と同一視する。

実数 r と複素数 $x + yi$ に対して，複素数としての積 $r(x + yi)$ は次のようになる。

$$r(x + yi) = (r + 0i)(x + yi) = (rx - 0y) + (ry + 0x)i = rx + ryi$$

従って，二つの実数に対して，実数として積を取ったものを複素数とみなしたものは，複素数みなして積を取ったものと一致する。和についても同様である。

実数 0 と実数 1 は特別な性質を持っている。すなわち， $z = x + yi$ に対して，

$$0 + z = z + 0 = z, \quad 1z = z1 = z$$

が成立する。

なお，実数でない複素数を虚数といい，虚軸上にある複素数を純虚数という。

11.3.4 複素数の減法

複素数の減法は，複素数の加法によって次の性質で定まる計算規則である。

$$x + yi = (a + bi) - (c + di) \iff (x + yi) + (c + di) = a + bi$$

左辺を計算すると、次のようになる。

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

特に、複素数 $z = x + yi$ に対して、 $0 - z$ を $-z$ と表す。

11.3.5 複素数の除法

上のように複素数の乗法を定めるとき、複素数の除法は次の性質で定まる計算規則である。

$$x + yi = \frac{a + bi}{c + di} \iff (c + di)(x + yi) = a + bi$$

右の条件式を計算すると、

$$a + bi = (cx - dy) + (dx + cy)i$$

従って、 x, y は次の連立方程式を満たす。

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases}$$

この連立方程式は、 $c^2 + d^2 \neq 0$ のとき、ただ一組の解を持ち、それは次で与えられる。

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}$$

このようにして、 $c + di \neq 0$ であるとき、商 $(a + bi)/(c + di)$ がただ一つ定まる。

特に、 $z \neq 0$ であるとき、 $1/z$ を z^{-1} と表すことがある。

11.3.6 複素数の絶対値

複素数 $z = x + yi$ の絶対値（大きさ）を次のように定める。

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

複素数の絶対値はつねに非負の実数である。

このことを利用すると、複素数の除法を次のように計算することができる。

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i$$

さて、 $z = x + yi$ が複素数であったとしよう。もし $z \neq 0$ であれば

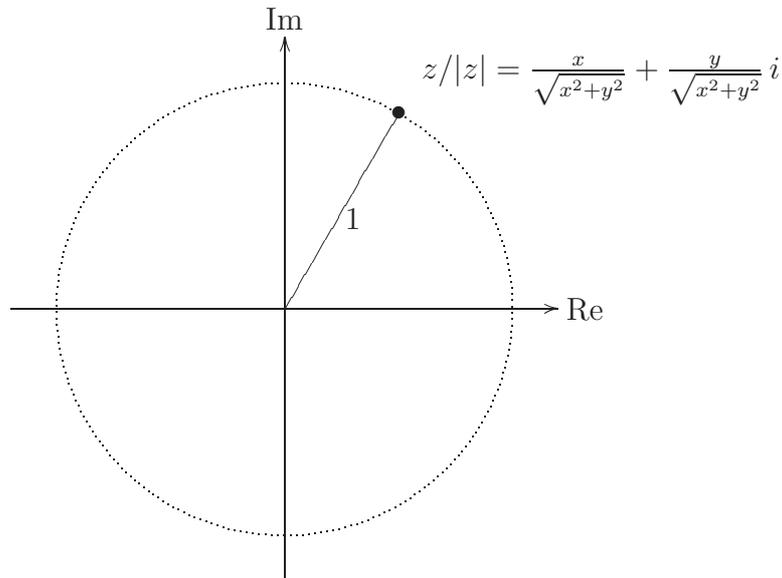
$$z = |z| \frac{z}{|z|} = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}i \right)$$

が成立する。ここで、 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ は正の実数であり、 $z/|z|$ は絶対値が 1 の複素数である。このように 0 でない複素数 z を正の実数と絶対値が 1 の複素数の積にわけける方法はただ一通りである。

11.4 複素数の乗法と平面の回転

11.4.1 複素数の偏角

絶対値が 1 の複素数を単位複素数という．単位複素数 $z = x + yi$ は $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ を満たすので，複素数 z が単位複素数であることは， z が複素平面において単位円周上にあることに他ならない．



複素数 z が 0 でないとき， $z/|z|$ は単位複素数であるから，ある角 θ を用いて，

$$z/|z| = \cos \theta + \sin \theta i$$

と表すことができる．この角 θ を単位複素数 z の偏角という．何も制限がないと，偏角の取り方がたくさんあって不便であるので， $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に制限して θ の値を決めることが多い．

一般に，複素数 z は，正の実数 r および $0 \leq \theta < 2\pi$ なる角 θ を用いて，

$$z = r(\cos \theta + \sin \theta i)$$

と表される．もし $z \neq 0$ であれば，このような表し方はただ一通りである．

なお，偏角が θ であるような単位複素数 $\cos \theta + \sin \theta i$ を次のように表すことがある．

$$e^{\theta i} = \cos \theta + \sin \theta i$$

なぜこのように表すのか，その理由は大学 1 年または 2 年で学ぶので，楽しみに取っておいていただきたい．

11.4.2 単位複素数の乗法

二つの単位複素数 $e^{\alpha i} = \cos \alpha + \sin \alpha i$ ， $e^{\beta i} = \cos \beta + \sin \beta i$ を掛け合わせて見よう．

$$\begin{aligned} e^{\alpha i} e^{\beta i} &= (\cos \alpha + \sin \alpha i)(\cos \beta + \sin \beta i) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) i \end{aligned}$$

一方，定め方により， $e^{(\alpha+\beta)i}$ は

$$e^{(\alpha+\beta)i} = \cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) i$$

これらが一致するという式は，加法定理に他ならない．

逆に $e^{\alpha i} e^{\beta i} = e^{(\alpha+\beta)i}$ を既知とすれば，加法定理を再現することができるので，便利である．

11.4.3 単位複素数の作用

前節の考察を少し一般化して，単位複素数を，一般の複素数に掛けることを考える．単位複素数 $e^{\theta i} = \cos \theta + \sin \theta i$ を複素数 $x + yi$ に掛けてみる．

$$(\cos \theta + \sin \theta i)(x + yi) = (\cos \theta x - \sin \theta y) + (\sin \theta x + \cos \theta y) i$$

従って，複素数 $x + yi$ に $\cos \theta + \sin \theta i$ を掛けることは，複素数 $x + yi$ の表す複素平面上の点を，原点を中心として角 θ だけ回転させることになる．

より一般に，0 でない複素数 $a + bi$ に対して， $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ とおくと，

$$a + bi = r(\cos \theta + \sin \theta i)$$

となる角 θ が存在する．このとき，

$$\begin{aligned} (a + bi)(x + yi) &= r(\cos \theta + \sin \theta i)(x + yi) \\ &= r(\cos \theta x - \sin \theta y) + r(\sin \theta x + \cos \theta y) i \end{aligned}$$

であるから，複素数 $x + yi$ に $a + bi$ を掛けることは，複素数 $x + yi$ の表す複素平面上の点を，原点を中心として角 θ だけ回転させ，原点を中心として $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ だけ拡大（縮小）したものになる．

11.4.4 応用：正弦・余弦の計算

前節の考察を利用して，種々の角の正弦と余弦を計算することができる．

例．既に知っている値であるが， $\cos(2\pi/3)$ と $\sin(2\pi/3)$ を複素数を利用して計算してみよう．そのため，次のようにおいてみる．

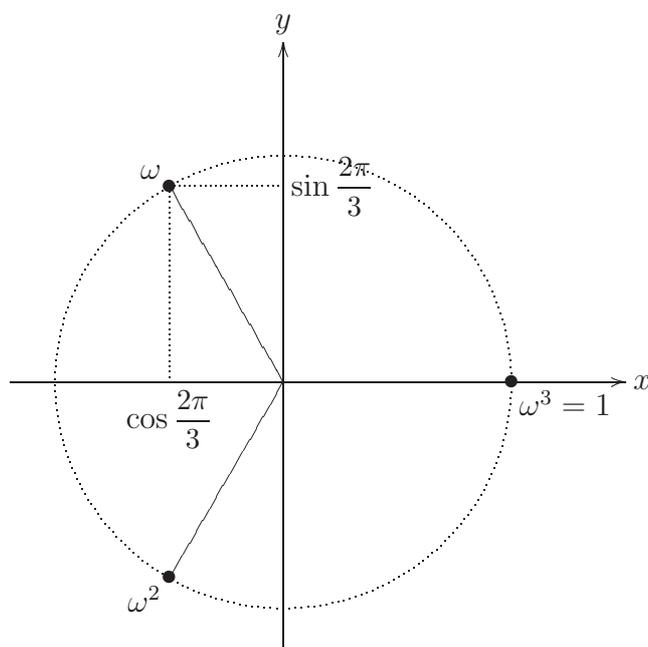
$$\omega = e^{(2\pi/3)i} = \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} i$$

このとき， $(\cos(2\pi/3), \sin(2\pi/3))$ は第二象限にあって， $-1 < \cos(2\pi/3) < 0$ かつ $0 < \sin(2\pi/3) < 1$ である．

さて，複素数の積と回転の対応により，次を得る．

$$\omega^3 = \cos 2\pi + \sin 2\pi i = 1$$

すなわち, ω は 1 の 3 乗根である.



移項すると, $\omega^3 - 1 = 0$ となるが, この左辺を因数分解すると $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$ となるが, 複素数 ω の定め方から $\omega \neq 1$ であるから,

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

二次方程式の解の公式から

$$\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ところが, $0 < \sin(2\pi/3) < 1$ であったから,

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

従って,

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

例. 次に $\cos(2\pi/5)$ の値を計算してみよう. そのため,

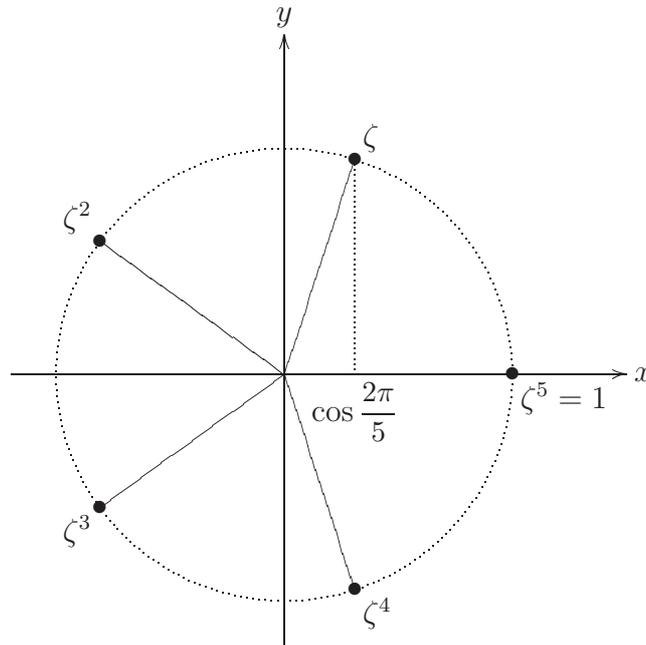
$$\zeta = e^{(2\pi/5)i} = \cos(2\pi/5) + \sin(2\pi/5)i$$

とおいてみる. このとき, $(\cos(2\pi/5), \sin(2\pi/5))$ は第一象限にあって, $0 < \cos(2\pi/5) < 0$ かつ $0 < \sin(2\pi/5) < 1$ である.

さて, 複素数の積と回転の対応により, 次を得る.

$$\zeta^5 = \cos 2\pi + \sin 2\pi i = 1$$

すなわち， ζ は 1 の 5 乗根である．



ここで， $t = \zeta + \zeta^4$ とおくと， $\zeta^5 = 1$ によって

$$\zeta^4 = \zeta^{-1} = \cos(-2\pi/5) + \sin(-2\pi/5)i = \cos(2\pi/5) - \sin(2\pi/5)i$$

従って，

$$t = \zeta + \zeta^4 = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$$

ところで， $\zeta^5 = 1$ を移項すると， $\zeta^5 - 1 = 0$ となるが，左辺を因数分解すると $(\zeta - 1)(\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1) = 0$ となるが，複素数 ζ の定め方から $\omega \neq 1$ であるから，

$$\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$$

ここで， $t = \zeta + \zeta^4$ とおくと， $\zeta^5 = 1$ を用いて

$$t^2 = \zeta^2 + 2\zeta^5 + \zeta^8 = \zeta^2 + 2 + \zeta^3$$

よって， $\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$ によって

$$t^2 + t - 1 = 0$$

二次方程式の解の公式により，

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ところが， ζ も $\zeta^4 = \zeta^{-1}$ も第一象限にあるので， $t > 0$ であるから，

$$t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

ゆえに，

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{t}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

11.5 円のパラメータ表示と正接

11.5.1 円のパラメータ表示

実数 t に対して，次で与えられる量 x, y を対応させる．

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

このとき，次が成立する．

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{(1-t^2)^2 + (2t)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} = 1$$

単位円上の $(-1, 0)$ を除くすべての点がこのようにしてただ一通りに表される．

ちなみに，このパラメータ表示は，三角関数の定積分を計算する際に有用である．

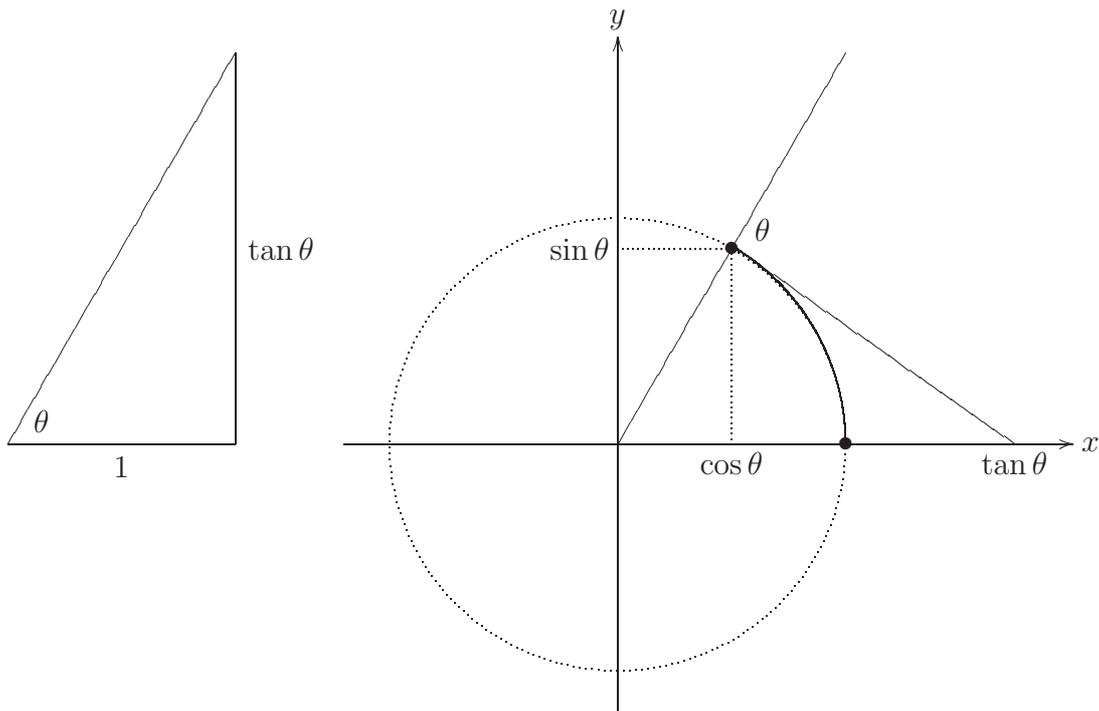
さて，単位円周上の点 (x, y) が $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ と表されるとき，上記の t と角 θ にはどのような関係があるだろうか？これを調べるために，角 θ に対して，正接 $\tan \theta$ および余接 $\cot \theta$ を定義する．

11.5.2 正接と余接

角 θ に対して，その正弦と余弦の比を考え，次のように表す．

$$\cos \theta \neq 0 \text{ のとき } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \sin \theta \neq 0 \text{ のとき } \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

値 $\tan \theta$ を角 θ の正接といい，値 $\cot \theta$ を角 θ の余接という．それぞれ『タンジェント・シータ』『コタンジェント・シータ』と読む．



角 θ が $0 < \theta < \pi/2$ を満たす場合には， $\tan \theta$ は上図のようになる．

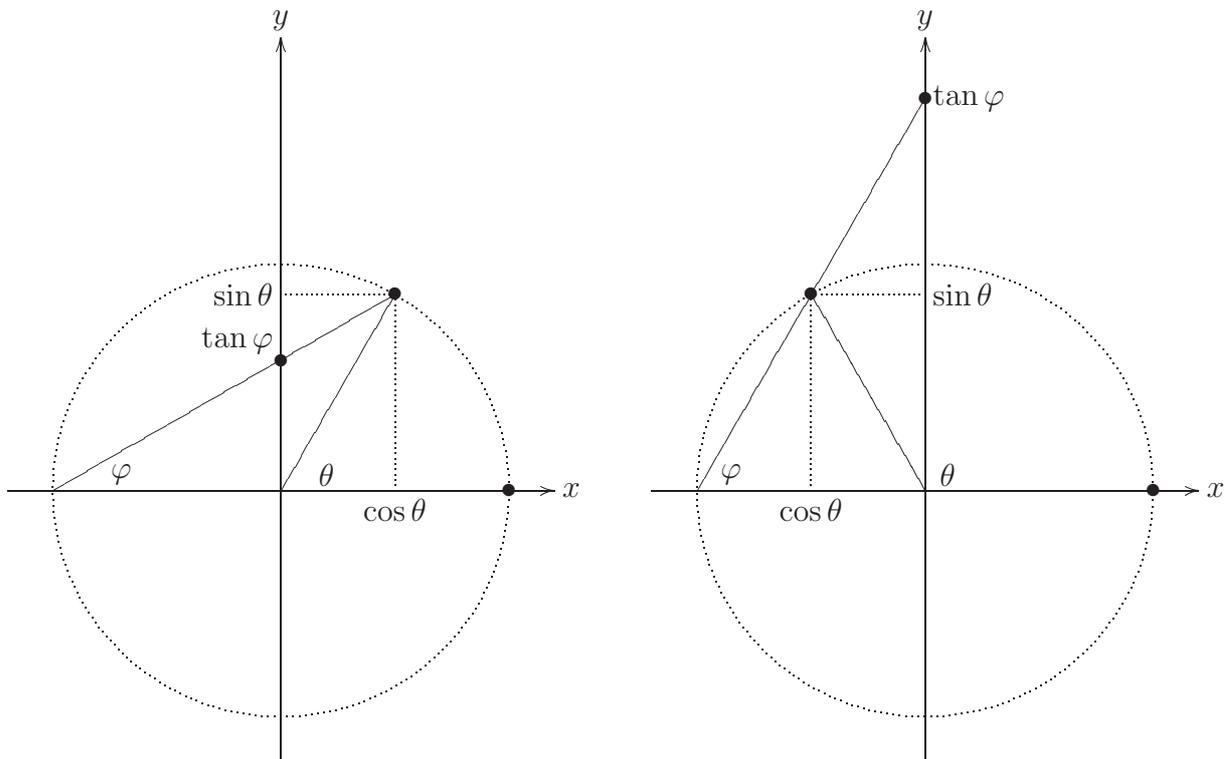
11.5.3 パラメータ表示との関係

話を戻して、単位円周上の点 (x, y) の二通りの表示

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

の間関係を調べてみよう。ただし、 $-\pi < \theta < \pi$ とする。

そのため、 $\varphi = \theta/2$ とおく。このとき、次の図の状況になっている。



直角三角形の相似から、 $1 : 1 + \cos \theta = t : \sin \theta$ なので、

$$t = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

従って、 $\theta = 2\varphi$ を用いると

$$t = \frac{\sin 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi} = \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{1 + 2 \cos^2 \varphi - 1} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{1-t^2}{1+t^2} &= \frac{1-\tan^2 \varphi}{1+\tan^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi = \cos \theta \\ \frac{2t}{1+t^2} &= \frac{2 \tan \varphi}{1+\tan^2 \varphi} = \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi = \sin \theta \end{aligned}$$

以上の計算を慎重に見れば、 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ のとき、 $t = \tan(\theta/2)$ とおけば、 $x = (1-t^2)/(1+t^2)$ かつ $y = 2t/(1+t^2)$ が成立し、逆に $x = (1-t^2)/(1+t^2)$ かつ

$y = 2t/(1+t^2)$ であるとき, $t = \tan(\theta/2)$ となる角 θ を取れば $x = \cos \theta$ かつ $y = \sin \theta$ が成立することが分かる.

図形的に言えば, $(-1, 0)$ と異なる単位円上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ に対して, $(-1, 0)$ と点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ を結ぶ直線と y 軸との交点の y 座標を t とすれば, $x = (1-t^2)/(1+t^2)$ かつ $y = 2t/(1+t^2)$ が成立することになる. このようにして, 単位円上の点に実数 t を対応させる対応は『立体射影』あるいは『ステレオグラフ射影』と呼ばれるものの一つになっている.

12 空間の回転と四元数

12.1 空間ベクトルに対する演算

12.1.1 空間ベクトルの内積 (スカラー積)

空間ベクトル $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (x, y, z)$ を考える. これらの内積とは, 次で定まる実数のことである.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ax + by + cz$$

以下では, 見やすくするため, しばしば括弧をつけて $(\vec{u} \cdot \vec{v})$ と表すことがある.

内積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ が 0 であるとき, ベクトル \vec{u} と \vec{v} は直交するという. ベクトル \vec{u}, \vec{v} がともに零ベクトルでないときには, 内積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ が 0 であることは, これらのベクトルが図形的な意味で直交していることを言い表している. (ベクトル \vec{u} や \vec{v} が 0 であるときには『直交する』という言葉は図形的には意味がはっきりしないが, この場合も含め, 拡大解釈して『直交する』と呼ぶ.)

ベクトルの内積は一つの実数であって, ベクトルではない. 実数をベクトルと区別してスカラーと呼ぶことがあるので, 内積のことをスカラー積と呼ぶことがある. また, 記号 \cdot は英語で dot であるので, ドット積と呼ばれることもある (大学に入ると, 内積という言葉はもっと一般化された意味で用いられる.)

ベクトル \vec{u}, \vec{v} がともに零ベクトルでないとき, スカラー積は, 図形的には次のように表される. すなわち, ベクトル \vec{u} と \vec{v} のなす角を θ とするとき,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

ここで, ベクトル \vec{u} と \vec{v} のなす角として, $2\pi - \theta$ を採用しても, 結論に違いはない.

12.1.2 空間ベクトルのベクトル積

これに対して, 二つの空間ベクトルから再び空間ベクトルを作る積が考えられ, これをベクトル積と呼ぶ. 空間ベクトル $\vec{u} = (a, b, c)$ と $\vec{v} = (x, y, z)$ のベクトル積とは, 次の式で定義される空間ベクトル $\vec{u} \times \vec{v}$ のことである.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (bz - cy, cx - az, ay - bx)$$

記号 \times は英語で cross であるので，クロス積と呼ばれることもある．また，これを外積と呼ぶ人もいるが，外積という用語は似て非なる別の概念に使用されるので，避けた方がよい．

さて，ベクトル \vec{u}, \vec{v} がともに零ベクトルでないときには，ベクトル積 $\vec{u} \times \vec{v}$ が 0 であることは，これらのベクトルが図形的な意味で平行であることを言い表している．実際， $(bz - cy, cx - az, ay - bx) = (0, 0, 0)$ であるとき，

$$\begin{cases} bz = cy \\ cx = az \\ ay = bx \end{cases}$$

ところが， $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ であるので，例えば $a \neq 0$ であったとし， $\lambda = x/a$ とおく．すると， $x = \lambda a$ である．さらに， $ay = bx$ により， $y = bx/a = \lambda b$ であり， $cx = az$ により $z = cx/a = \lambda c$ である．よって， $(a, b, c) = \lambda(x, y, z)$ となり， \vec{u} と \vec{v} は平行である．なお $a = 0$ の場合には， $b \neq 0$ または $c \neq 0$ となるので，同様の議論によって \vec{u} と \vec{v} が平行であることが分かる．

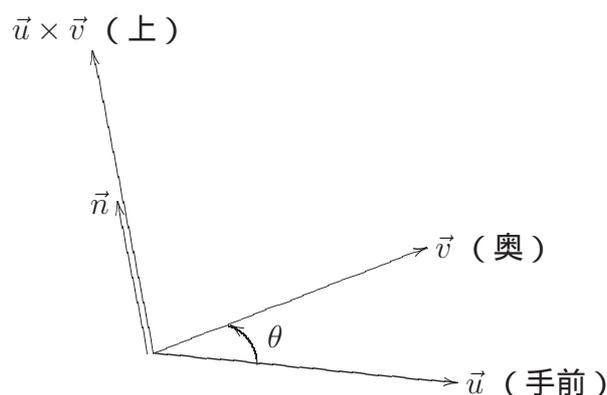
ベクトル \vec{u}, \vec{v} がともに零ベクトルでなく，互いに平行でもないとき，ベクトル積は，図形的には次のように記述される．すなわち，ベクトル \vec{u} と \vec{v} のなす角を θ とするとき，

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta \vec{n}$$

ただし， \vec{n} は， \vec{u} と \vec{v} の両方に直交する長さ 1 の二つのベクトルのうちの一方である．

ここで，ベクトル \vec{u} と \vec{v} のなす角として， $2\pi - \theta$ を採用すると符号が逆転する．どちらを選ぶかは，ベクトル \vec{n} の選び方と連動して決めなければならない．

そこで，次のように考える．ベクトル \vec{u} と \vec{v} を含む平面 H を考え，その上で \vec{u} を $0 < \theta < \pi$ なる角 θ だけ回転させると \vec{v} になるものとする．このとき， \vec{n} としては，この回転が反時計回りの回転に見えるような点の位置ベクトルとなるものを選ぶ．



例えば， $\vec{u} = (1, 0, 0)$ ， $\vec{v} = (0, 1, 0)$ のとき， xy 平面において \vec{u} を $\pi/2$ だけ回転させると \vec{v} になる．このとき，ベクトル $\vec{w} = (0, 0, 1)$ は \vec{u} と \vec{v} に直交するベクトルであって，上記の回転が反時計回りに見える点 $(0, 0, 1)$ の位置ベクトルである．このとき，

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (0 \cdot 0 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (0, 0, 1) \\ |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta \vec{n} &= 1 \cdot 1 \sin(\pi/2) (0, 0, 1) = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

となって，両者は一致する．

12.1.3 スカラー積とベクトル積の性質

1. スカラー積については次が成立する .

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

2. ベクトル積については次が成立する .

$$\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$$

3. スカラー積とベクトル積には次の関係がある .

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

実際 , $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (p, q, r)$, $\vec{w} = (x, y, z)$ とすると ,

$$\begin{aligned} & \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \\ &= (a, b, c) \times (qz - ry, rx - pz, py - qx) \\ &= (b(py - qx) - c(rx - pz), c(qz - ry) - a(py - qx), a(rx - pz) - b(qz - ry)) \\ &= (bpy - bqx - crx + cpz, cqz - cry - apy + aqx, arx - apz - bqz + bry) \end{aligned}$$

一方 , 右辺を計算すると

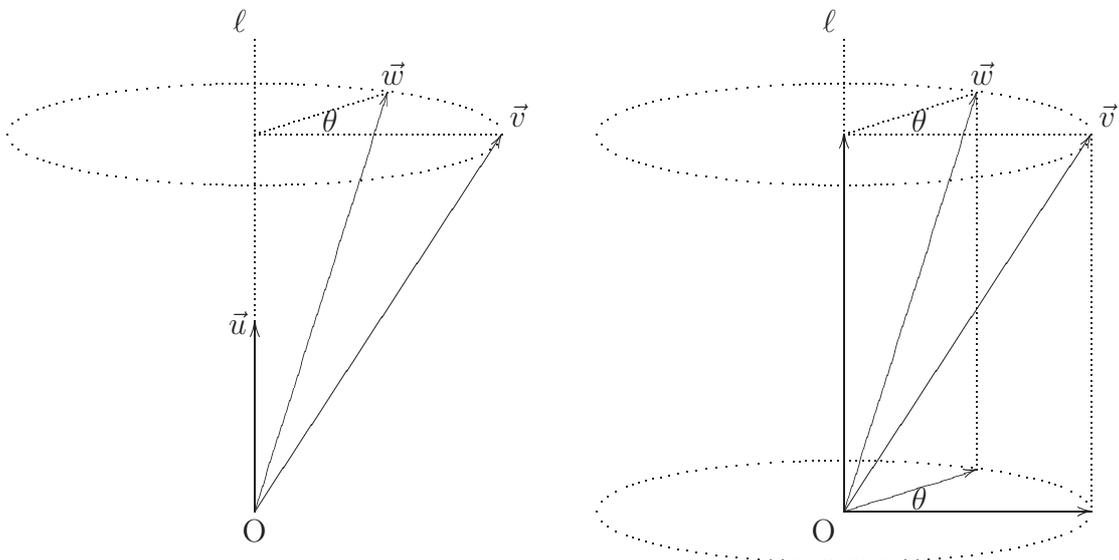
$$\begin{aligned} & (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} \\ &= (ax + by + cz)(p, q, r) - (ap + bq + cr)(x, y, z) \\ &= ((by + cz)p - (bq + cr)x, (ax + cz)q - (ap + cr)y, (ax + by)r - (ap + bq)z) \\ &= (bpy + cpz - bqx - crx, aqx + cqz - apy - cry, arx + bry - apz - bqz) \end{aligned}$$

となり , 示すべき式の両辺は一致する .

12.2 空間におけるベクトルの回転

長さ 1 の空間ベクトル \vec{u} を考え , 原点をとおりベクトル \vec{u} を方向ベクトルとする直線を ℓ とし , 原点をとおりベクトル \vec{u} に直交する平面を H ととする .

このとき , ベクトル \vec{v} を直線 ℓ を軸として角 θ 回転させて得られるベクトルを求めたい .

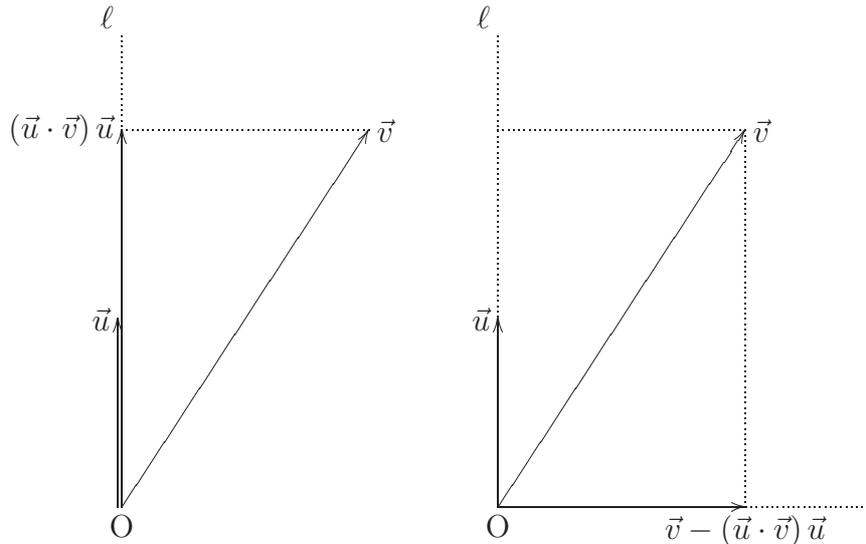


長さ 1 の空間ベクトル \vec{u} およびベクトル \vec{v} を考える．このとき，次のベクトルを考える．

$$\vec{w} = \cos 2\varphi \vec{v} + (1 - \cos 2\varphi) (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u} + \sin 2\varphi \vec{u} \times \vec{v}$$

12.2.1 スカラー積とベクトルの正射影

このとき，直線 ℓ にベクトル \vec{v} を正射影したものは，ベクトル $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u}$ で与えられる．また，平面 H にベクトル \vec{v} を正射影したものは，ベクトル $\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u}$ で与えられる．



12.2.2 平面上の回転

次の二つのベクトルを考える．

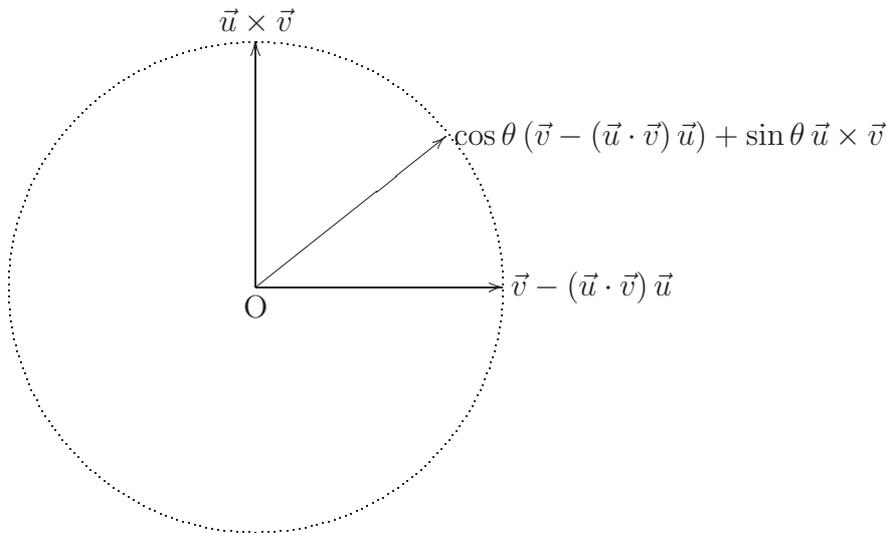
$$\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v}$$

これらのベクトルは，平面 H 上の，大きさの等しい互いに直交するベクトルである．

従って，原点を中心に平面 H 上でベクトル $\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u}$ を角 θ 回転させたものは，

$$\cos \theta (\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u}) + \sin \theta \vec{u} \times \vec{v}$$

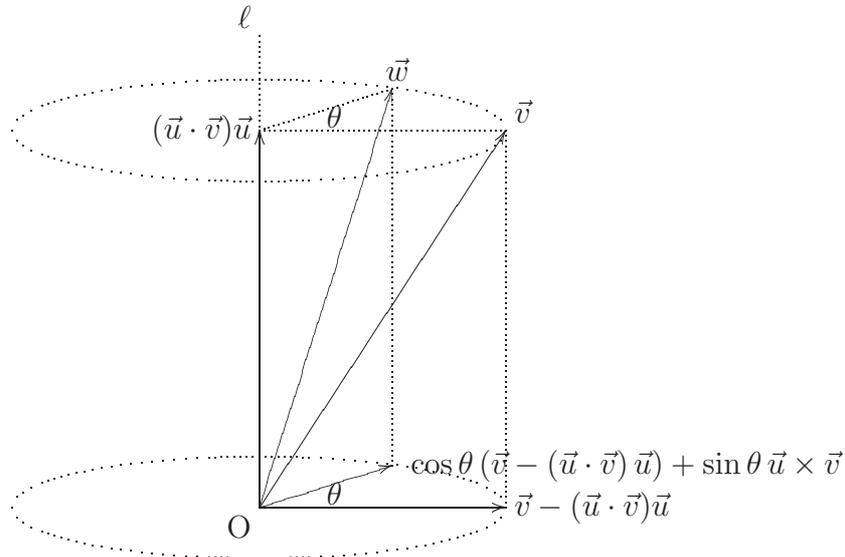
となる．ただし，回転の向きは， 90° 回転させると $\vec{u} \times \vec{v}$ に一致する向きである．



12.2.3 空間での回転

上で求めたベクトルに，ベクトル $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u}$ を加えると，ベクトル \vec{v} を回転させたベクトルになる．

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \cos \theta (\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u}) + \sin \theta \vec{u} \times \vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} \\ &= \cos \theta \vec{v} + (1 - \cos \theta) (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} + \sin \theta \vec{u} \times \vec{v} \end{aligned}$$



長さ 1 の空間ベクトル \vec{u} およびベクトル \vec{v} を考える．このとき，次のベクトルを考える．

$$\vec{w} = \cos 2\varphi \vec{v} + (1 - \cos 2\varphi) (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} + \sin 2\varphi \vec{u} \times \vec{v}$$

これは，原点をとりベクトル \vec{u} を方向ベクトルとする直線を軸として，ベクトル \vec{v} を角 2φ 回転させて得られるベクトルである．

12.3 四元数の算法

12.3.1 四元数の加法と乗法

四元数とは，四つの実数 t, x, y, z を用いて $q = t + xi + yj + zk$ と表されるものであって，そのようなものを二つ用意し $s + ai + bj + ck$, $s' + a'i + b'j + c'k$ とするとき，加法と乗法を次のように定義したものである．まず加法は次のように定義する．

$$(s + ai + bj + ck) + (s' + a'i + b'j + c'k) = (s + s') + (a + a')i + (b + b')j + (c + c')k$$

四元数の加法は交換法則と結合法則を満たす．

これに対して，乗法は次のように定義する．

$$\begin{aligned} (s + ai + bj + ck)(s' + a'i + b'j + c'k) &= (ss' - aa' - bb' - cc') + (sa' + as' + bc' - cb')i \\ &\quad + (sb' + bs' + ca' - ac')j + (sc' + cs' + ab' - ba')k \end{aligned}$$

四元数の乗法は結合法則を満たすが，交換法則は満たさない．実際，

$$ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ki = j, \quad ik = -j$$

が成立している．

四元数の加法と乗法は結合法則を満たす．

12.3.2 実数の再解釈

四元数 $t + xi + yj + zk$ であって，特に $x = y = z = 0$ であるようなものを，実数 t 自身とみなす．すなわち， $t + xi + yj + zk$ は t そのものであると解釈する．

実数 r と四元数 $t + xi + yj + zk$ に対して，四元数としての乗法を行った積 $r(t + xi + yj + zk)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned} r(t + xi + yj + zk) &= (r + 0i + 0j + 0k)(t + xi + yj + zk) \\ &= (rt - 0x) + (rx + 0z - 0y)i + (ry + 0x - 0z)j + (rz + 0y - 0x)k \\ &= rt + rxi + ryj + rzk \end{aligned}$$

実数 0 と実数 1 は特別な性質を持っている．すなわち， $q = t + xi + yj + zk$ に対して，

$$0 + q = q + 0 = q, \quad 1q = q1 = q$$

が成立する．

12.3.3 四元数の減法

上のように四元数の加法を定めるとき，四元数の減法が定義される．

$$\begin{aligned} x + yi + zj + wk &= (s' + a'i + b'j + c'k) - (s + ai + bj + ck) \\ \iff (x + yi + zj + wk) + (s + ai + bj + ck) &= s' + a'i + b'j + c'k \end{aligned}$$

具体的には、次のようになる。

$$(s' + a'i + b'j + c'k) - (s + ai + bj + ck) = (s' - s) + (a' - a)i + (b' - b)j + (c' - c)k$$

四元数の減法について、実数の減法の場合と同様の計算法則が成立する。

特に、 $0 - p$ を $-p$ と表すことにし、 $q = 0 - p$ とおくと、減法の定義から $q + p = 0$ であるから、 $(0 - p) + p = 0$ である。加法について交換法則が成立するので、

$$(-p) + p = 0 \quad \text{かつ} \quad p + (-p) = 0$$

が成立する。

12.3.4 四元数の除法

四元数は乗法について交換法則が成立しないので、四元数の除法については注意が必要である。実際、除法については、右除法と左除法の二つが考えられる。

まず右除法を考える。四元数 $p' = s' + a'i + b'j + c'k$ の $p = s + ai + bj + ck$ の右からの商とは、四元数 $q = t + xi + yj + zk$ であって $p' = qp$ を満たすもののことであり、これを $p'p^{-1}$ と表す。

$$\begin{aligned} t + xi + yj + zk &= (s' + a'i + b'j + c'k)(s + ai + bj + ck)^{-1} \\ \iff (t + xi + yj + zk)(s + ai + bj + ck) &= s' + a'i + b'j + c'k \end{aligned}$$

これを満たすような実数 t, x, y, z を決定すれば良い。右辺を計算すると、次のようになる。

$$(ts - xa - yb - zc) + (ta + xs + yc - zb)i + (tb + ys + za - xc)j + (tc + zs + xb - ya)k$$

よって、 t, x, y, z は連立方程式

$$\begin{cases} st - ax - by - cz = s' \\ at + sx + cy - bz = a' \\ bt - cx + sy + az = b' \\ ct + bx - ay + sz = c' \end{cases}$$

これを解けば、

$$\begin{cases} t = \frac{ss' + aa' + bb' + cc'}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2}, \\ x = \frac{(a's - as') + (bc' - cb')}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2}, \\ y = \frac{(b's - bs') + (ca' - ac')}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2}, \\ z = \frac{(c's - cs') + (ab' - ba')}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

従って、 $s + ai + bj + ck \neq 0$ の場合には、右からの商 $(s' + a'i + b'j + c'k)(s + ai + bj + ck)^{-1}$ が存在し、それは上のように定めた実数 t, x, y, z によって $t + xi + yj + zk$ と書かれる四元数である。

また，四元数 $p' = s' + a'i + b'j + c'k$ の $p = s + ai + bj + ck$ の左からの商とは，四元数 $q = t + xi + yj + zk$ であって $p' = pq$ を満たすものである．これを $p^{-1}p'$ と表す．

$$\begin{aligned} t + xi + yj + zk &= (s + ai + bj + ck)^{-1}(s' + a'i + b'j + c'k) \\ \iff (s + ai + bj + ck)(t + xi + yj + zk) &= s' + a'i + b'j + c'k \end{aligned}$$

右除法の場合と同様に計算すると，次のようになる．

$$\begin{cases} t = \frac{ss' + aa' + bb' + cc'}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2} \\ x = \frac{(a's - a s') + (b'c - b c')}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2} \\ y = \frac{(b's - b s') + (c'a - c a')}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2} \\ z = \frac{(c's - c s') + (a'b - a b')}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

従って， $s + ai + bj + ck \neq 0$ の場合には，左からの商 $(s + ai + bj + ck)^{-1}(s' + a'i + b'j + c'k)$ が存在し，それは上のように定めた実数 t, x, y, z によって $t + xi + yj + zk$ と書かれる四元数である．

一般には，左除法と右除法の結果は一致しないが，特に割られる数 p' が実数である場合に，すなわち $a' = b' = c' = 0$ の場合には，両者は一致する．

特に， $1p^{-1}$ は $p^{-1}1$ と一致するが，これを単に p^{-1} と表し， p の逆数と呼ぶ．

12.3.5 四元数の実部・虚部・絶対値・共役

四元数 $q = t + xi + yj + zk$ の実部とは，実数 t のことであり，虚部とは $xi + yj + zk$ のことある．実部が 0 であるような四元数を純四元数という．

四元数 $q = t + xi + yj + zk$ の絶対値（大きさ）を次のように定める．

$$|q| = |t + xi + yj + zk| = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

四元数の絶対値はつねに非負の実数である．

四元数 $q = t + xi + yj + zk$ の共役を次のように定める．

$$\bar{q} = t - xi - yj - zk$$

このとき，

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= (t + xi + yj + zk)(t - xi - yj - zk) \\ &= t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = |t + xi + yj + zk|^2 = |q|^2 \end{aligned}$$

同様に $\bar{q}q = |q|^2$ も分かり，次が成立する．

$$q\bar{q} = |q|^2, \quad \bar{q}q = |q|^2$$

この式から，特に， $p = s + ai + bj + ck \neq 0$ のときに次が成立することが分かる．

$$\begin{aligned} (t + xi + yj + zk)^{-1} &= \frac{t - xi - yj - zk}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \frac{t}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}i - \frac{y}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}j - \frac{z}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}k \end{aligned}$$

が得られる．これを用いれば，右除法 $p'p^{-1}$ は p に右から p^{-1} をかけたものと解釈できる．

12.4 四元数の行列による実現

実数 t, x, y, z に対して，次の行列を用意する．

$$Q(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} t & -x & -y & -z \\ x & t & -z & y \\ y & z & t & -x \\ z & -y & x & t \end{pmatrix}$$

このとき，行列の積 $Q(s, a, b, c)Q(s', a', b', c')$ が四元数の積にうまく対応する．すなわち，実数 t, x, y, z を

$$\begin{aligned} t &= ss' - aa' - bb' - cc' \\ x &= sa' + as' + bc' - cb' \\ y &= sb' + bs' + ca' - ac' \\ z &= sc' + cs' + ab' - ba' \end{aligned}$$

と取ると，次が成立する．

$$Q(t, x, y, z) = Q(s, a, b, c)Q(s', a', b', c')$$

一方，四元数としての積は，同じ t, x, y, z によって

$$t + xi + yj + zk = (s + ai + bj + ck)(s' + a'i + b'j + c'k)$$

となるのであった．

見やすくするために，次のようにおく．

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & I &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ J &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & K &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

すると，次が成立する．

$$\begin{aligned} EI = IE = I, & \quad EJ = JE = J, \quad EK = KE = K, \\ IJ = -JI = K, & \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J, \end{aligned}$$

これは，四元数に対する計算規則と同じである．

従って，四元数に表れる i, j, k とは，上の行列 I, J, K のことであると考えられることができるが，上の性質を満たす行列の組 I, J, K はたくさんあって，どれを選んでも同じ計算規則が成り立つという事情があり，上記のように行列 I, J, K を定める積極的な根拠はない．四元数だけを扱う際には，行列のことは忘れて，計算規則だけを考える方が理にかなっているとも言える．

12.5 四元数と空間の回転

12.5.1 四元数の乗法

空間ベクトル $\vec{v} = (x, y, z)$ に対して, 次のようにおく.

$$q(\vec{v}) = xi + yj + zk$$

四元数 $p_1 = s + ai + bj + ck$ と $p_2 = t + xi + yj + zk$ をそれぞれ実部と虚部にわけ,

$$p_1 = s + q(\vec{u}), \quad p_2 = t + q(\vec{v}), \quad \vec{u} = (a, b, c), \quad \vec{v} = (x, y, z)$$

とおくと, 四元数の乗法について, 次が成立する.

$$p_1 p_2 = (st - \vec{u} \cdot \vec{v}) + tq(\vec{u}) + sq(\vec{v}) + q(\vec{u} \times \vec{v})$$

12.5.2 四元数による回転の実現

絶対値が 1 の四元数は, ある角 φ を用いて $\cos \varphi + \sin \varphi q(u)$ と表すことができる. ただし, $q(u)$ は純四元数である. これを用いて, 次のように計算する.

$$\begin{aligned} & (\cos \varphi + \sin \varphi q(u))q(v)(\cos \varphi - \sin \varphi q(u)) \\ &= (\cos \varphi q(v) - \sin \varphi (u \cdot v) + \sin \varphi q(u) \times q(v))(\cos \varphi - \sin \varphi q(u)) \\ &= (\cos^2 \varphi q(v) - \sin \varphi \cos \varphi (u \cdot v) + \sin \varphi \cos \varphi q(u \times v)) \\ & \quad + \sin \varphi \cos \varphi (v \cdot u) - \sin \varphi \cos \varphi q(v \times u) \\ & \quad + \sin^2 \varphi (u \cdot v)q(u) - \sin^2 \varphi q((u \times v) \times u) \\ &= \cos^2 \varphi q(v) + \sin^2 \varphi (u \cdot v)q(u) + 2 \sin \varphi \cos \varphi q(u \times v) - \sin^2 \varphi q((u \times v) \times u) \end{aligned}$$

ここで, 次が成立する.

$$(u \times v) \times u = -(u \cdot v)u + (u \cdot u)v$$

よって, 上の式は

$$\begin{aligned} & (\cos \varphi + \sin \varphi q(u))q(v)(\cos \varphi - \sin \varphi q(u)) \\ &= \cos^2 \varphi q(v) + \sin^2 \varphi (u \cdot v)q(u) + 2 \sin \varphi \cos \varphi q(u \times v) \\ & \quad + \sin^2 \varphi (u \cdot v)q(u) - \sin^2 \varphi (u \cdot u)q(v) \\ &= \cos 2\varphi q(v) + (1 - \cos 2\varphi) (u \cdot v)q(u) + \sin 2\varphi q(u \times v) \end{aligned}$$

そこで, 次のベクトルを考える.

$$\cos 2\varphi v + (1 - \cos 2\varphi) (u \cdot v) u + \sin 2\varphi u \times v$$

これは, 原点をとおりベクトル u を方向ベクトルとする直線を軸として, ベクトル v を角 2φ 回転させて得られるベクトルである.