東京大学玉原国際セミナーハウス
2006 年 9 月 16 日ー 18 日

群馬県教育委員会高校教育課
東京大学大学院数理科学研究科

平成１８年度高校生玉原数学セミナー「複素数」

１．９月１６日１１：００－１２：００　（松本幸夫）
複素数平面　複素数の加減乗除　複素数の絶対値　極形式

２．９月１６日１３：３０－１４：３０　（関口英子）
複素数の平方根　平方根の作図　２次方程式
複素係数多項式　多項式の割り算と因数定理

３．９月１６日１５：００－１６：００　（桂　利行）
作図問題（円積問題、立方倍積問題、角の３等分)。正多角形の作図。
正５角形の作図。

演習９月１６日１６：３０－１７：３０　（坪井　俊）
作図：　３人に１台のＰＣを使う。（ＫＳＥＧ）

４．９月１７日　９：００－１０：００　（関口英子）
正１７角形の作図。作図問題の結論

５．９月１７日１０：３０－１１：３０　（桂　利行）
３次方程式の解法、４次方程式の解法

６．９月１７日１５：００－１６：００　（坪井　俊）
多項式の定める写像

演習９月１７日１６：３０－１７：３０　（坪井　俊）
多項式の定める写像の様子を十進ＢＡＳＩＣを使って理解する。

７．９月１８日　９：００－１０：００　（松本幸夫）
曲線、閉曲線、原点の周りの回転数。
代数学の基本定理

８．９月１８日１０：３０－１１：３０　（坪井　俊）
ニュートン法、分数写像、１次分数変換、ジュリア集合

1. 複素数平面

複素数について高等学校で次のことを学習する。

複素数は $a+bi$ と書かれる。a, b は実数、i は $i^2=-1$ をみたす記号であり、$i^2=-1$ に気をつけて通常の式のように計算することができる。すなわち加法減法が、

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

により定義され、乗法は、$\alpha = a+bi,\ \beta = c+di$ に対して、

$$\alpha\beta = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

で定義される。また、計算により

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

がわかる。

一言で言えば、複素数には加減乗除が定義されている。

複素数は 2 次方程式の解として現れる。実数係数の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の解は

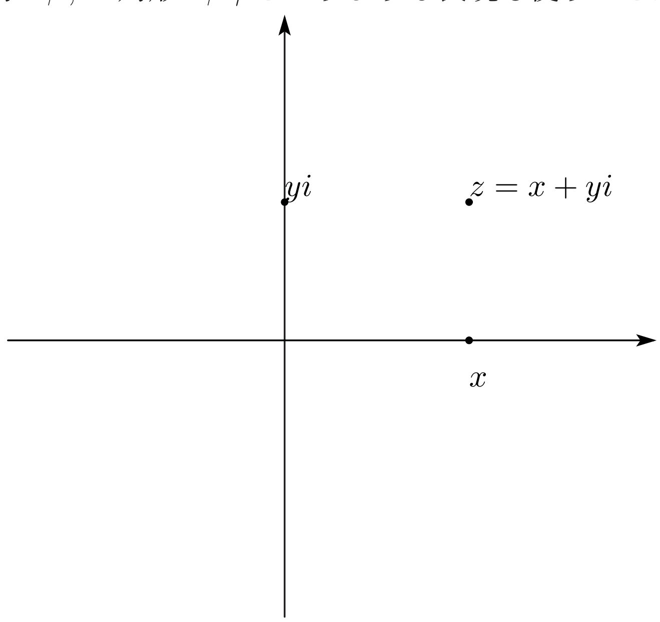
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

であり、$D=b^2-4ac>0$ のとき 2 実解、$D=0$ のとき重解、$D<0$ のとき共役複素数を解に持つ。

実数だけを考えると解がない方程式が、複素数の範囲では解を持つことにより、代数方程式の性質が統一的に理解されることになる。

さて、今回のテーマ「複素数」では、複素数を複素数平面上で考えることが必要となる。

xy 平面の座標 (x, y) を持つ点を複素数 $x+yi$ に対応させて考えるとき、この平面を**複素数平面**とよぶ。複素数平面の点は $\alpha = a+bi$ によりあらわされる。x 軸を実軸と呼ぶ。点 α, 線分 $\alpha\beta$, 三角形 $\alpha\beta\gamma$ というような表現も使うことができる。



複素数 $\alpha = a + bi$ に対し、$a - bi$ を $\alpha = a + bi$ の**共役** (きょうやく) **複素数**と呼び、$\overline{\alpha}$ で表す。すなわち $\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi$. 共役複素数 $\overline{\alpha}$ は、点 α の実軸に関する対称点に対応する。

複素数 $\alpha = a + bi$ と原点 0 との距離を複素数 $\alpha = a + bi$ の**絶対値**と呼び $|\alpha|$ で表す。$|\alpha| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ である。複素数 α, β に対し、$|\alpha - \beta|$ は、α, β を結ぶの線分の長さとなる。

複素数 $\alpha = a + bi$ とその共役複素数 $\overline{\alpha} = a - bi$ の積は $\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 = |\alpha|^2$ となり、0 または正の実数である。このことから

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}$$

である。$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$ であり、

$$|\alpha\beta|^2 = \alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\beta} = \alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta} = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2$$

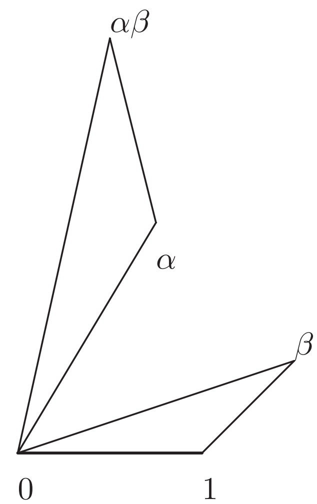
だから、$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

複素数の和、複素数の積の図形的な意味。

複素数平面上で複素数 α, β 和は線分 0α, 0β を２辺とする平行四辺形の４つ目の頂点を与える（ベクトルの和と同じ）。

複素数平面上で複素数 α, β の積は次のような意味を持つ。

$\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ について、$\triangle 01\beta$, $\triangle 0\alpha(\alpha\beta)$ の辺の長さを見ると、$(1, |\beta - 1|, |\beta|)$, $(|\alpha|, |\alpha\beta - \alpha|, |\alpha\beta|)$ であるが、$|\alpha\beta - \alpha| = |\alpha| \cdot |\beta - 1|$, $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ だから、$\triangle 01\beta$, $\triangle 0\alpha(\alpha\beta)$ は相似。



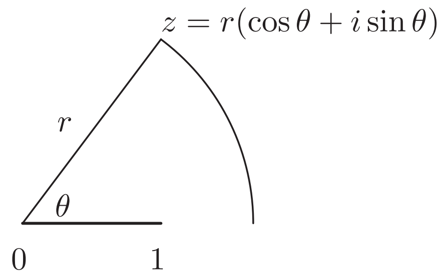
$\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$ が $y = \dfrac{b}{a}x$ のどちらにあるかを見ると、
$(ad + bc) - \dfrac{b}{a}(ac - bd) = \dfrac{d}{a}(a^2 + b^2)$ だから、$\triangle 01\beta$, $\triangle 0\alpha(\alpha\beta)$ は同じ向きに相似である。

極形式。

複素数を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と書く。複素数の積の図形的な意味から、

$$\{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\}\{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\} = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

これから、三角関数の加法定理がわかる（あるいは、三角関数の加法定理を知っていれば、逆に複素数の積の図形的な意味も納得できるであろう）。

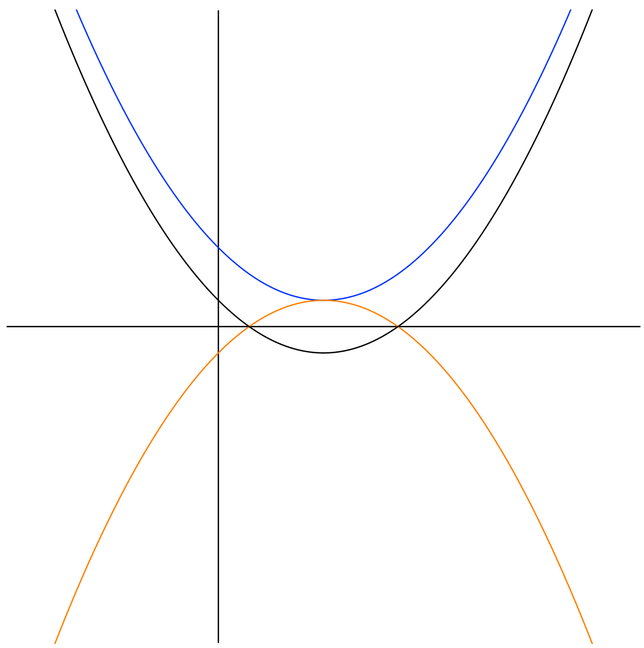


計算練習

(1) $1+\sqrt{3}i$ の 2 乗、3 乗を求め複素数平面上に図示せよ。
(2) $z = 1+i$ を極形式に直せ。
(3) $z^2 = 1+i$ を満たす複素数 z を求めよ。
(4) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し、z^n を極形式で求めよ。

２．複素数係数２次方程式、複素数係数多項式。

実数係数の２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ について、$a>0$, $D=b^2-4ac>0$ とすると放物線 $y=ax^2+bx+c=a(x-\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{2a}$ のグラフは図の実線のようである。このとき、放物線 $y=a(x-\dfrac{b}{2a})^2+\dfrac{b^2-4ac}{2a}$ のグラフは太い点線で書いたものであり、実線の放物線を x 軸について対称に移したものと同じ頂点を持っている。



複数の範囲でどのようにして解を持つのかを見るために、複素数の範囲で $(z-1)^2-4$ の値を見る。図を描くために絶対値 $|(z-1)^2-4|$ の様子を見てみよう。

その次に、$|(z-1)^2+4|$ の様子を見てみよう。

```
!abs_quad.BAS                                  コメント：プログラムの名前
OPTION ARITHMETIC COMPLEX                      複素数を用いる
DEF f(z)=(z-1)^2-4                             f(z) の定義
LET h=5                                        グラフィック画面の大きさ h
SET WINDOW -h,h,-h,h                           グラフィック画面の設定（左, 右, 下, 上）
SET POINT STYLE 1                              グラフィックスで点を打つ
FOR px=0 TO PIXELX(h)                          グラフィック画面の点の範囲（左右）
   FOR py=0 TO PIXELY(h)                       グラフィック画面の点の範囲（上下）
      LET x0=PROBLEMX(px)                      グラフィック画面の点に対応する x 座標
      LET y0=PROBLEMY(py)                      グラフィック画面の点に対応する y 座標
      LET z=COMPLEX(x0,y0)                     z = x + yi
      SET POINT COLOR MOD(INT(ABS(f(z))),256)  点の色を決める
      PLOT POINTS : x0, y0                     |f(z)| の整数部分に対応する色の点を打つ
   NEXT py                                     次の点へ（上下）
NEXT px                                        次の点へ（左右）
```

これは十進ＢＡＳＩＣというソフトウェアのプログラムである。`abs_quad.bas` をクリックすると、これが書かれたプログラムが現れる。▶ をクリックしてみよう。

このＢＡＳＩＣのプログラムでは $|(z-1)^2-4|$ または $|(z-1)^2+4|$ の値の整数部分にしたがって色分けしている。実数部分 $-5 \leqq \mathrm{Re}z \leqq 5$, 虚数部分 $-5 \leqq \mathrm{Im}z \leqq 5$ の部分を示している。

２次方程式

実数係数の２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の解の公式は次のようにして得られた。

$$\begin{aligned}
&x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\\
&(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{(2a)^2}+\frac{c}{a}=0\\
&(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\\
&x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

複素数係数の２次方程式 $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ $(\alpha \neq 0)$ に対してこの論法が正しいかどうか見ると、$z^2=\alpha$ の解が、$\pm\sqrt{\alpha}$ としてよいかどうかが問題となる。

しかし、$\alpha = r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ならば、複素数の積の図形的な意味を考えると $z=\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$ または $z=\sqrt{r}(\cos(\frac{\theta}{2}+\pi)+i\sin(\frac{\theta}{2}+\pi))$ であり、

$$-\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})=\sqrt{r}(\cos(\frac{\theta}{2}+\pi)+i\sin(\frac{\theta}{2}+\pi))$$

だから、

$$z=\pm\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$$

である。

正の平方根というものはないので、$\sqrt{\alpha}$ は z の一方を表すことにすると２次方程式の解の公式の導き方は複素数係数としても正しいことがわかる。

複素係数の２次方程式 $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ の解は $\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ となる。

演習問題。

一般に、$k>1$ に対して、$z^k=\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を満たす z を極形式で表せ。とくに、$z^k=1$ となる z はどのような複素数か。複素数平面上に図示せよ。

２次方程式 $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ の係数 α, β, γ が原点、1 の与えられた複素数平面上の点として与えられたとき、２次方程式 $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ の解は、それらの点から定規とコンパスで作図できる。

複素数係数多項式

複素数係数の多項式の間の和差積商は実数係数多項式のように行うことができる。

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ は複素数、$a_n \neq 0$) を n 次複素数係数多項式と呼ぶ。n を $P(x)$ の次数と呼ぶ。$P(x) = 0$ を n 次方程式と呼ぶ。$P(\alpha) = 0$ となる複素数 α を n 次方程式 $P(x) = 0$ の解と呼ぶ。α を多項式 $P(x)$ の根と呼ぶ。

多項式 $P(x), Q(x)$ に対し、$P(x) = Q(x)R(x) + S(x)$ となる多項式 $R(x), S(x)$ で、$S(x)$ の次数が $Q(x)$ の次数よりも小なるものがただ一通り存在する。

複素数係数多項式 $f(z)$ に対し、$f(\alpha) = 0$ ならば、$f(z)$ は $z - \alpha$ で割り切れる（因数定理）。このことから、n 次方程式 $P(x) = 0$ の解（n 次多項式 $P(x)$ の根）は、重複を許して高々n 個であることがわかる。

演習問題。 実数係数の多項式が複素数 α を根にもてば、$\overline{\alpha}$ も根になることを示せ。
例えば $|z^3 - 3z + 4|$ を描いて確認してみよ。

演習問題。 多項式の係数をどのような範囲に取るかで、色々と興味ある現象が起こってくる。今回のテーマの複素数は直接は出てこないが、次のことが成り立つことを示してみよ。

整数係数の多項式 $P(x)$ が有理数の根 $\dfrac{a}{b}$ (a, b は互いに素な整数）をもてば、$P(x)$ を $bx - a$ で割った商は整数係数の多項式となる。一般に、整数係数の多項式の間の関係式 $P(x) = Q(x)R(x)$ で、$P(x)$ の係数が共通の素因数を持たないならば、$Q(x)$ の係数も, $R(x)$ の係数も共通の素因数を持たない。

３．　定規とコンパスによる作図。正５角形の作図。

平面幾何は、ユークリッドの時代には非常に整備された理論体系を持つものになっていた。定規とコンパスによる作図は、その中でも重要な位置を占めるものであった。

- 定規は２点を通る直線を引くことができる道具である。
- コンパスは、１点を中心として与えられた点を通る円を描く道具である。また、与えられた長さの半径の円を描くこともできる。

今日の演習の時間には、ＫＳＥＧというソフトウェアを用いて、作図を行うので使い方の説明とともに、定規とコンパスで作図できることを考えていこう。

- 垂直２等分線の作図。
- 角の２等分の作図。
- 平行線の作図。
- 円の接線の作図。
- 平方根の作図。

作図問題

- 円積問題
  与えられた半径の円の面積と同じ面積の正方形を作図せよ。
- 立方倍積問題
  与えられた立方体の倍の体積の立方体の辺の長さを元の辺の長さから作図せよ。
- 角の３等分
  任意に与えられた角の $\dfrac{1}{3}$ の角を作図せよ。
- 正多角形の作図
  正 n 角形を作図せよ。

正５角形の作図

１の５乗根は、正５角形の頂点となるからその点を求める。

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) = (z-1)z^2\{(z+\frac{1}{z})^2 + (z+\frac{1}{z}) - 1\}$$

だから、

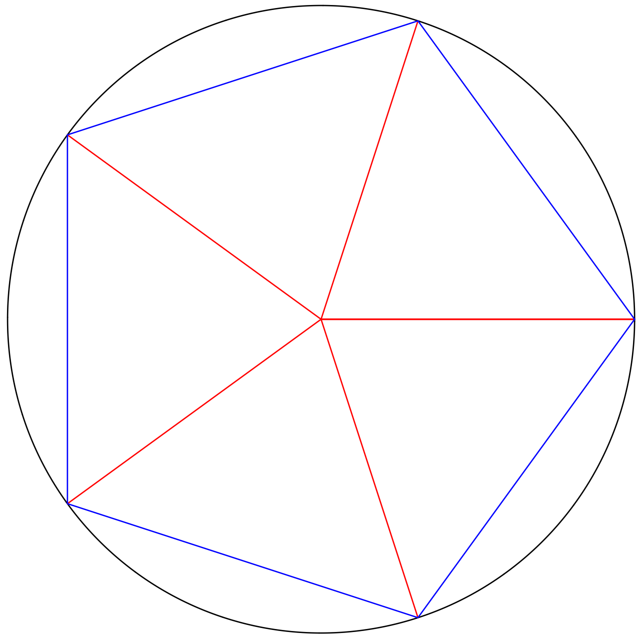
$$z + \frac{1}{z} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

したがって、

$$2z^2 - (-1 \pm \sqrt{5})z + 2 = 0$$

を解いて

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{6 \mp 2\sqrt{5} - 16}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{\mp 2\sqrt{5} - 10}}{4}$$



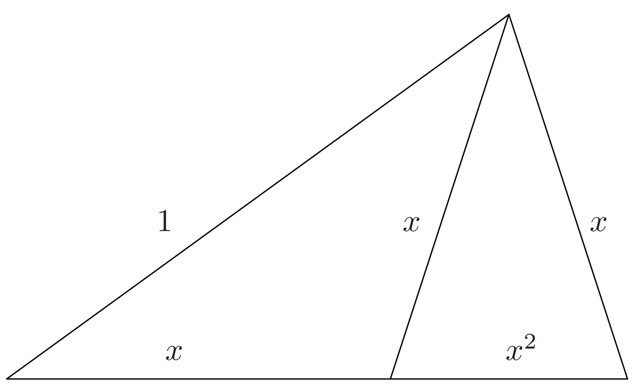
1 の 5 乗根は、$1, \cos\frac{2\pi}{5} \pm i\sin\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5} \pm i\sin\frac{4\pi}{5}$ であり、$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ を求めたことになる。

この値は他の方法でも求まる。

$\theta = \frac{2\pi}{5}$ とすると、$\cos 2\theta = \cos 3\theta$ である。

$$\cos 2\theta = 2(\cos\theta)^2 - 1,$$
$$\cos 3\theta = 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta$$

だから、$t = \cos\theta$ は $4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0$ を満たすが、左辺は $(t-1)(4t^2+2t-1)$ だから、$t = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ （$\pm$ は $+$ が題意を満たす）を得る。



角度が $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}$ の 2 等辺三角形を使って、$x = 2\sin\frac{\pi}{10} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ が $x^2+x=1$ を満たすことから $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ （$\pm$ は $+$ が題意を満たす）を得る。

作図してみよう。

演習の時間

作図の課題：　３人に１台のＰＣを使う。（ＫＳＥＧ）

（１）正３角形を作図せよ。

（２）正４角形を作図せよ。

（３）正６角形を作図せよ。

（４）正８角形を作図せよ。

（５）正１２角形を作図せよ。

（６）長さ 1 と自然数 n を与えて、$\dfrac{1}{n}$ を作図せよ。

（７）長さ 1 と x を与えて、$\dfrac{1}{x}$ を作図せよ。

（８）長さ 1 と x を与えて、$\sqrt{x}$ を作図せよ。

（９）複素数 0, 1 と α を与えて、$\sqrt{\alpha}$ を作図せよ。

（１０）正５角形の作図。

（１１）余裕があれば、複素数 $0, 1, \alpha, \beta$ に対し、$\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \dfrac{\alpha}{\beta}$ が作図できることを示せ。

ＫＳＥＧはフリーソフトで、http://geom.math.metro-u.ac.jp/wiki/index.php?KSEG に情報がある。ウィンドウズ版は、http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html のなかに the windows executable, version 0.401 がある。

４．　正１７角形の作図。作図問題。

作図できる長さの意味を考える。作図できる長さを係数とする２次方程式を次々に解くことによって得られる複素数は複素数平面上で作図できる。

$\zeta_5 = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ として、$z^5 - 1$ の根は $\zeta_5, {\zeta_5}^2, {\zeta_5}^3, {\zeta_5}^4, 1$ である。ζ_5 は何故作図できたか振り返ってみる。

$u = \zeta_5 + {\zeta_5}^4,\ v = {\zeta_5}^2 + {\zeta_5}^3$ は、$u + v = -1,\ uv = -1$ を満たすから、u, v は $x^2 + x - 1 = 0$ の解。$u, v = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる。（図形的に見ると、$u = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $v = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ であることがわかる。）

次に、$\zeta_5, {\zeta_5}^4$ について、$u = \zeta_5 + {\zeta_5}^4,\ \zeta_5{\zeta_5}^4 = 1$ だから、$\zeta_5, {\zeta_5}^4$ は、$x^2 - ux + 1 = 0$ の解である。$\zeta_5, {\zeta_5}^4 = \dfrac{u \pm \sqrt{u^2-4}}{2}$.

ここでは、$\zeta_5, {\zeta_5}^2, {\zeta_5}^4, {\zeta_5}^8 = {\zeta_5}^3$ となっており、とびとびに組にして計算した。これをヒントに正１７角形を考えてみよう。

正１７角形の作図が可能であること

$\zeta^{17} = 1$ とする。

ζ から順に２乗していくと

$$\zeta, \zeta^2, \zeta^4, \zeta^8, \zeta^{16}, \zeta^{32} = \zeta^{15}, \zeta^{64} = \zeta^{13}, \zeta^{128} = \zeta^9.$$

ζ^3 から順に２乗していくと

$$\zeta^3, \zeta^6, \zeta^{12}, \zeta^{24} = \zeta^7, \zeta^{48} = \zeta^{14}, \zeta^{96} = \zeta^{11}, \zeta^{192} = \zeta^5, \zeta^{10}$$

となる。

$$u = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{16} + \zeta^{15} + \zeta^{13} + \zeta^9,$$
$$v = \zeta^3 + \zeta^6 + \zeta^{12} + \zeta^7 + \zeta^{14} + \zeta^{11} + \zeta^5 + \zeta^{10}$$

とすると、

$$u + v = -1, \quad uv = u + v + u + u + u + v + v + v = -4$$

である。だから、u, v は $x^2 + x - 4 = 0$ の解である。

さて、u を、一つとびにとって、

$$s_1 = \zeta + \zeta^4 + \zeta^{16} + \zeta^{13}, \quad s_2 = \zeta^2 + \zeta^8 + \zeta^{15} + \zeta^9,$$

v を

$$t_1 = \zeta^3 + \zeta^{12} + \zeta^{14} + \zeta^5, \quad t_2 = \zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^{11} + \zeta^{10}$$

に分ける。このとき、

$$s_1 + s_2 = u, \quad s_1 s_2 = t_1 + s_2 + s_1 + t_2 = -1$$

だから s_1, s_2 は、$x^2 - ux - 1 = 0$ の解である。

さらに、$a_1 = \zeta + \zeta^{16},\ a_2 = \zeta^4 + \zeta^{13}$ とすると、$a_1 + a_2 = s_1,\ a_1 a_2 = t_1$ だから a_1, a_2 は、$x^2 - s_1 x + t_1 = 0$ の解である。

ζ は　$x^2 - a_1 x + 1 = 0$ の解である。

こうして２次方程式を順に解いて正１７角形の作図ができることになる。

正 n 角形の作図

自然数 n に対し、1 から $n-1$ までの自然数で n と互いに素である（最大公約数が 1 である）ものの個数を $\varphi(n)$ であらわす。$\varphi(n)$ はオイラーの関数と呼ばれる。

$$\varphi(n) = |\{m \mid 1 \leqq m \leqq n-1,\ (m,n)=1\}|$$

ここで、(m,n) は m, n の最大公約数をあらわし、絶対値の記号は個数を表す。

素数 p については、$\varphi(p) = p-1$. $\{1,2,\ldots,p-1\}$ は $\bmod p$ の積について、巡回群をなす。$n = {p_1}^{e_1}\cdots {p_k}^{e_k}$ を素因数分解とすると

$$\varphi(n) = ({p_1}^{e_1} - {p_1}^{e_1-1})\cdots({p_k}^{e_k} - {p_k}^{e_k-1})$$

であるが、$\{m \mid 1 \leqq m \leqq n-1,\ (m,n)=1\}$ は $\bmod n$ の積について、位数 $\varphi(n)$ の可換群をなす。

オイラーの関数 $\varphi(n)$ が 2 の冪乗になることが正 n 角形が作図できるための必要十分条件である。以下に、オイラーの関数の値を並べてみる。作図できる正 n 角形が順にわかる。
$\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=2$, $\varphi(5)=4$, $\varphi(6)=4$, $\varphi(7)=6$, $\varphi(8)=4$, $\varphi(9)=6$, $\varphi(10)=4$, $\varphi(11)=10$, $\varphi(12)=4$, $\varphi(13)=12$, $\varphi(14)=6$, $\varphi(15)=8$, $\varphi(16)=8$, $\varphi(17)=16$, $\varphi(18)=12$, $\varphi(19)=18$, $\varphi(20)=8$, $\varphi(21)=12$, $\varphi(22)=10$, $\varphi(23)=22$, $\varphi(24)=8$, $\varphi(25)=20$, $\varphi(26)=12$, $\varphi(27)=18$, $\varphi(28)=12$, $\varphi(29)=28$, $\varphi(30)=8$, $\varphi(31)=30$, $\varphi(32)=16$, $\ldots$

$2^{2^n}+1$ の形の素数をフェルマー素数と呼ぶ。フェルマーがこの形の素数が無限個ある予想したが、5 個しか見つかっていない。$3 = 2^{2^0}+1 = 2^1+1$, $5 = 2^{2^1}+1 = 2^2+1$, $17 = 2^{2^2}+1$, $257 = 2^{2^3}+1 = 2^8+1$, $65537 = 2^{2^4}+1 = 2^{16}+1$ がそれであり、その後のいくつかの $2^{2^n}+1$ の形の数は合成数となることがわかっている。（2^m+1 の形の素数は、$m = 2^n$ で、$2^{2^n}+1$ の形になることがわかる。実際 $m = ab$, a が奇数ならば、$2^{ab}+1 = (2^b)^a+1 = (2^b+1)(2^{(a-1)b} - 2^{(a-2)b} + \cdots + 2^{2b} - 2^b + 1)$ となる。）

作図問題に戻ると正 257 角形, 正 65537 角形も作図可能である。

演習問題

$z^7-1=0$ の解を根とする 3 次式を求めよ。
$z^{13}-1=0$ の解を根とする 3 次式を求めよ。

作図問題

円積問題、立方倍積問題、角の 3 等分はいずれも不可能であることが示される。

- 円積問題
  単位円の面積 π は整数係数の代数方程式を満たさない（超越数である）ことが示されている [リンデマン (1882)]。
- 立方倍積問題
  $\sqrt[3]{2}$ を作図する問題で、x^3-2 の根は平方根の組み合わせでは表されない [ワンツェル (1837)]。
- 角の 3 等分
  $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ に対して、$z^3 = \alpha$ となる z を作図する問題。これも平方根の組み合わせでは書かれない [ワンツェル (1837)]。 例えば $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき。

５．３次方程式、４次方程式の解法。

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ で与えられる。これは、方程式の係数についての式として得られている。ここで式というのは、多項式、分数式、べき乗根を組み合わせて書かれるものである。

このような解の公式を３次方程式、４次方程式、より高次の方程式に対して求めることが研究された。

３次方程式の解法。（カルダノ）

まず、$x^3+mx-n=0$ を考えればよい。$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$ に注意する。もしも a と b が、$3ab=m,\ a^3-b^3=n$ を満たせば、$a-b$ が、$x^3+mx=n$ の解である。$b=\dfrac{m}{3a}$ だから、$a^3-\dfrac{m^3}{27a^3}=n,$ すなわち、$a^6-na^3-\dfrac{m^3}{27}=0$ を解けばよいが、これは a^3 についての２次方程式である。$b=\dfrac{m}{3a}$ だから、b も解けて、$x=a-b$ が解である。

４次方程式の解法。（フェラーリ）

$x^4+px^2+qx+r=0$ を考えればよい。
$x^4+2px^2+p^2=px^2-qx-r+p^2$ だから、
$(x^2+p)^2=px^2-qx-r+p^2$ を得る。
任意の y に対して、

$$(*)\quad \begin{aligned}(x^2+p+y)^2 &= px^2-qx-r+p^2+2y(x^2+p)+y^2\\ &= (p+2y)x^2-qx+(p^2-r+2py+y^2)\end{aligned}$$

が成立する。

右辺は x について２次式だから、y をうまく選べば、平方の形にすることができる。すなわち、判別式 $=0$ にすればよいが、
$(-q)^2-4(p+2y)(p^2-r+2py+y^2)=0$ は y についての３次方程式
$(q^2-4p^3+4pr)+(-16p^2+8r)y-20py^2-8y^3=0$ であるから、解ける。

解と係数の関係

3 次方程式、$x^3 + a_1 x + a_0 = 0$ の解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすると、

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = a_1, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -a_0$ である。

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする。$\omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$ である。

$u = \alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3, v = \alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3$ とすると、$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ を勘案して、$\alpha_1 = \dfrac{1}{3}(u+v), \alpha_2 = \dfrac{1}{3}(\omega u + \omega^2 v), \alpha_3 = \dfrac{1}{3}(\omega^2 u + \omega v)$.

ここで、$uv = -3a_1, u^3 + v^3 = -27a_0$ と計算される。

$u^3v^3 = -27{a_1}^3$ だから、u^3, v^3 は $x^2 + 27a_0x - 27{a_1}^3 = 0$ の解である。

4 次方程式 $x^4 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ の解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ とする。

$\beta_1 = \dfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) = \alpha_1 + \alpha_2,$

$\beta_2 = \dfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) = \alpha_1 + \alpha_3,$

$\beta_3 = \dfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) = \alpha_1 + \alpha_4$ と置く。

このとき、$\alpha_1 = \dfrac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3), \alpha_2 = \dfrac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2 - \beta_3),$

$\alpha_3 = \dfrac{1}{2}(-\beta_1 + \beta_2 - \beta_3), \alpha_4 = \dfrac{1}{2}(-\beta_1 - \beta_2 + \beta_3).$

$\beta_1\beta_2\beta_3 = -a_1,$

${\beta_1}^2 + {\beta_2}^2 + {\beta_3}^2 = -2a_2,$

${\beta_1}^2{\beta_2}^2 + {\beta_2}^2{\beta_3}^2 + {\beta_3}^2{\beta_1}^2 = {a_2}^2 - 4a_0$

だから、

$(x - {\beta_1}^2)(x - {\beta_2}^2)(x - {\beta_3}^2) = x^3 + 2a_2x + ({a_2}^2 - 4a_0)x - a_1^2$

ガロワ理論

しかし、５次方程式以上は累乗根を用いて、解の公式を書くことはできない。

アーベルにより、５次方程式に対して示され、ガロワにより、どのような代数方程式が解けるかが、決定された。

しかし、ガウスにより、代数方程式に解があることは知られている。

代数学の基本定理。

$P(x)$ を複素数係数 n 次多項式とする。$P(\alpha) = 0$ となる複素数 α が存在する。

６．多項式写像

多項式 $P(x)$ の根のある場所の見当をつけるためには $|P(z)|$ の値をプロットしてみればよい。十進 BASIC を使って描いてみよう。

「目」になっているところに根があることが予想される。

実際、そこに解が存在していることは、$|P(z)|$ の極小値は 0 になることが知られていることからわかる。これは複素関数論で最大値原理と呼ばれているもので、通常、コーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}$$

から示される。

複素数 z の多項式 $f(z)$ の値を考えると、$f(z)$ に対して、$f(z + r(\cos\theta + i\sin\theta))$ を考えると、r が十分小の時に、$f(z)$ の周りを何度か回るという振る舞いを示す。これもパソコンで確かめてみよう。

このことを用いて、$|P(z)|$ の極小値が 0 でないときには矛盾が導かれる。代数学の基本定理の証明法の一つが得られる。

数式では、

$$f(z) - f(z_0) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots + a_n(z - z_0)^n$$

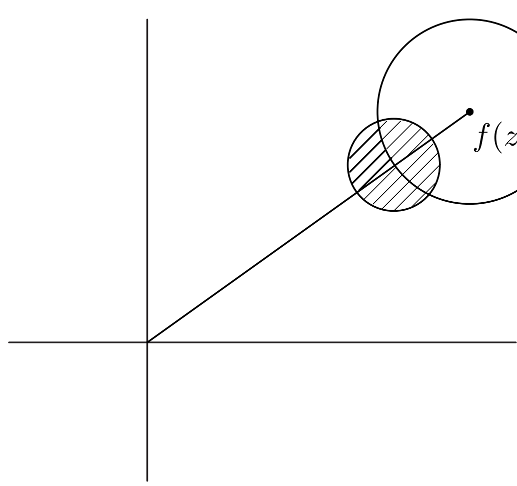
と書き換えて、$a_k \neq 0$ とする。$z - z_0 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると、

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) = a_k r^k \Bigg[&(\cos k\theta + i\sin k\theta) + \frac{a_{k+1}}{a_k} r(\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta) \\ &+ \cdots + \frac{a_n}{a_k} r^{n-k}(\cos n\theta + i\sin n\theta)\Bigg] \end{aligned}$$

$r < \dfrac{1}{2n}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|, \ldots, r < \left(\dfrac{1}{2n}\left|\dfrac{a_k}{a_n}\right|\right)^{\frac{1}{n-k}}$ とすれば、

$$f(z) - f(z_0) = a_k r^k\big[(\cos k\theta + i\sin k\theta) + g(r,\theta)\big]$$

で、$|g(r,\theta)| < \dfrac{1}{2}$ となる。



背理法で、$f(z)=0$ となる z が存在することを示す。
$f(z)$ が 0 にならないとする。$|f(z_0)|>0$ が最小値（極小値）となっているとする。すなわち、（z_0 の近くでの）$|f(z)|$ の値は、$|f(z_0)|$ 以上であるとする。このとき、前の議論に従って $\arg(\frac{f(z_0)}{a_k})=k\theta+\pi$ となるような θ をとれば、$|f(z)|$ の値は $|f(z_0)|$ の値よりも小になり、$|f(z_0)|$ が最小値（極小値）であるとしたことに矛盾する。

この証明を完成するには、最小値（極小値）を持つような z_0 が存在することを言えばよい。

これは、複素数平面上の関数 $|f(z)|$ は、複素数平面のどこかで、極小値をとるかという問題である。

これは、複素数平面の任意の半径の閉円板 $\{|z|\leqq r\}$ 上の連続関数は閉円板上で最小値をとることと、任意の正実数 a に対し、複素数平面の十分大きな円周 $\{|z|=r\}$ $(r\geqq r_0)$ 上での $|f(z)|$ の値は、a よりも大きいことからわかる。

演習の時間

多項式の定める写像の様子を十進ＢＡＳＩＣというソフトを使って理解しよう。

パソコン上で $f(z) = z^4 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$ について、$|f(z)|$ を色分けで書いてみよう。ここで a_2, a_3, a_4 を絶対値が１０以下の複素数とする。

$|z| > 4$ ならば、$|\frac{a_2}{z^2}| < \frac{10}{16}, |\frac{a_3}{z^3}| < \frac{10}{64}, |\frac{a_4}{z^4}| < \frac{10}{256}$ だから

$$|\frac{a_2}{z^2}| + |\frac{a_3}{z^3}| + |\frac{a_4}{z^4}| < \frac{210}{256}$$

従って、$|f(z)| \geqq \left(1 - (|\frac{a_2}{z^2}| + |\frac{a_3}{z^3}| + |\frac{a_4}{z^4}|)\right)|z^4| > \frac{46}{256}|z|^4.$

次に、r の値を $0 \leqq r \leqq 2.5$ に固定し、$f(r(\cos\theta + i\sin\theta))$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を描いてみよう。θ が増加するときに“ 反時計回りに ”ぐるぐる回る。r が増加すると、$|f(r(\cos\theta + i\sin\theta))|$ はどんどん増加する。その形は、円を４重にまいたものに近づく。

```
!abs_quart.BAS
OPTION ARITHMETIC COMPLEX
LET a2=COMPLEX(2,1)
LET a3=COMPLEX(2,-2)
LET a4=5
DEF f(z)=z^4+a2*z^2+a3*z+a4
LET h=4
SET WINDOW -h,h,-h,h
SET POINT STYLE 1
FOR px=0 TO PIXELX(h)
   FOR py=0 TO PIXELY(h)
      LET x0=PROBLEMX(px)
      LET y0=PROBLEMY(py)
      LET z=COMPLEX(x0,y0)
      SET POINT COLOR MOD(INT(ABS(f(z))),256)
      PLOT POINTS : x0, y0
   NEXT py
NEXT px

FOR rr=0.01 TO 2.5 STEP 0.01
   FOR th=0 TO 2*3.1416 STEP 0.00031416
      LET z=COMPLEX(cv,y0)
      SET POINT COLOR MOD(INT(rr/0.05),128)
      PLOT POINTS:rr*COS(th),rr*SIN(th)
      PLOT POINTS:RE(f(COMPLEX(rr*COS(th),rr*SIN(th)))),&
&                 IM(f(COMPLEX(rr*COS(th),rr*SIN(th))))
   NEXT th
NEXT rr
END
```

形が、円を４重にまいたものに近づいていくことはどのようなプログラムで見ることができるだろうか。

十進 BASIC は、フリーのソフトウェアでホームページ http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/ に情報があり、ダウンロードできる。

７．代数学の基本定理の証明

比較的容易に解の存在を示す方法。背理法で示す。

複素数平面の間の写像を考える。

$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ を考える。ここで $a_1, \ldots, a_n$ は複素数で $a_n \neq 0$ とする。

$f(z) = z^n\{1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\}.$

$z \longmapsto z^n$ は、$R(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を、$R^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ に写す。半径 R^n の円を n 回まわる。

半径 R の円 $R(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ が、f によって、原点を通らない曲線に写るとする。半径 R の円を１回まわるときに、f による像の曲線が、原点の周りを何回まわるかを考える。

一般に、原点を通らない向きを持つ閉曲線に対し、回転数が定まる。

曲線が一つのパラメータに従って連続に変化するとき、原点を通過しない曲線である限り、回転数は不変である。

$f(z) = z^n\{1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\}.$ について、$z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ について、$R > 2n|a_1|$, $R > (2n|a_2|)^{\frac{1}{2}}$, $\ldots$, $R > (2n|a_n|)^{\frac{1}{n}}$ を満たす R をとると、

$$\begin{aligned}|1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}| &\geqq 1 - \{|\frac{a_1}{z}| + \cdots + |\frac{a_n}{z^n}|\} \\ &\geqq 1 - \{\frac{|a_1|}{R} + \cdots + \frac{|a_n|}{R^n}\} \\ &\geqq 1 - \{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}\} \geqq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

従って、

$$|f(z)| = R^n|1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}| \geqq \frac{R^n}{2}$$

このような R に対して、$f(R(\cos\theta + i\sin\theta))$ は原点を通らない。

$0 \leqq t \leqq 1$ に対して、

$$f_t(z) = z^n\{1 + t(\frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n})\}$$

とすると、$|f_t(z)| \geqq (1 - \frac{t}{2})R^n$ だから、$f_t(R(\cos\theta + i\sin\theta))$ も原点を通らない。$f_0(R(\cos\theta + i\sin\theta))$ の回転数は n だから、$f_1(R(\cos\theta + i\sin\theta)) = f(R(\cos\theta + i\sin\theta))$ の回転数も n である。

$f(z) = 0$ となる z が存在しないとする。R を変化させたとき、$f(R(\cos\theta + i\sin\theta))$ は、$R = 0$ となっても、回転数が n であるはずである。しかし、$R = 0$ のとき $f(0) = a_n \neq 0$ への定値写像だから、$R = 0$ のときの回転数は 0 である。これは矛盾。

８．多項式の定める写像、分数式の定める写像

代数学の基本定理で、解の存在はわかったが、何か求める方法はあるだろうか？ガロワ理論によれば、冪根をとる操作で解が求まるための条件がわかるし、特別な形の何種類かの方程式の解が求まることを仮定すると、解が求まる。

いずれにしても、たとえ平方根でもその値を小数で表せば近似的なものしか求まらない。

ニュートン法

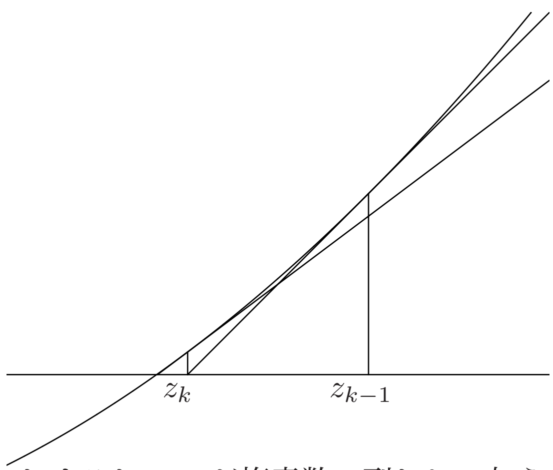
ニュートンの方法で、解を求める。

$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ に対して、

$f'(z) = nz^{n-1} + (n-1)a_1 z^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}z + a_{n-1}$ である。$f'(z) = \lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ は $f(z)$ の z における微分である。多項式の変数が複素数と考えても微分の計算は実数の変数を考えているのと同じように出来る。

ニュートンの方法とは、複素数の列 $\{z_k\}_{k=0,1,2,\dots}$ を、z_0 を与えた後で、z_k $(k = 1, 2, \dots)$ を $z_k = z_{k-1} - \frac{f(z_{k-1})}{f'(z_{k-1})}$ で定義して与えるものである。

実数の範囲での様子は下の図のようになる。



分母が 0 とならないとすると、z_k が複素数の列として与えられる。この複素数列が収束するとは限らないが、収束すると仮定し、収束先 z_∞ において $f'(z_\infty) \neq 0$ とすると、$f(z_\infty) = 0$, すなわち z_∞ は $f(z) = 0$ の解である。

収束について、実数の範囲で考えると次のようになる。$b = z_\infty$ があるとし、$f(b) = b$ とする。

$$f(x) - f(b) = a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + ((x-b) \text{ について 3 次以上の項})$$

のとき

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-b) + ((x-b) \text{ について 2 次以上の項})$$

である。

$$\begin{aligned}
&(x - \frac{f(x)}{f'(x)}) - b = \frac{(x-b)f'(x) - f(x)}{f'(x)} \\
&= \frac{(x-b)(a_1 + 2a_2(x-b) + \cdots) - (a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \cdots)}{a_1 + 2a_2(x-b) + ((x-b) \text{ について 2 次以上の項})} \\
&= \frac{a_2(x-b)^2 + ((x-b) \text{ について 3 次以上の項})}{a_1 + 2a_2(x-b) + ((x-b) \text{ について 2 次以上の項})}
\end{aligned}$$

$|a_1| > L$, $|a_2| < K$, $|x-b| < \varepsilon << 1$ のとき、

$$|(x - \frac{f(x)}{f'(x)}) - b| < \frac{K}{L}\varepsilon^2$$

となる。一度 $\frac{K}{L}\varepsilon < 1$ となれば、$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$ で定義される数列は収束することがわかる。これは、代数方程式 $f(x) = 0$ の解 b において、$f'(b) \neq 0$ のときに成り立つことである。

この評価式は、複素数の範囲でも正しいことに注意する。そうすると複素数の範囲でも、$|z-b| < \varepsilon << 1$ のとき、一度 $\frac{K}{L}\varepsilon < 1$ となれば、複素数列 z_k は b に収束する。

ニュートンの方法を複素数平面 (と ∞) から複素数平面 (と ∞) への写像として考えると次の性質を持つ。$z_k = F(z_{k-1}) = z_{k-1} - \frac{f(z_{k-1})}{f'(z_{k-1})}$ とすると、$F(z_{k-1})$ は、z_{k-1} の絶対値が十分大きなところでは、$\frac{n-1}{n} z_{k-1}$ に近く、原点に向かう写像である。

この収束の様子を、十進ＢＡＳＩＣを使ってパソコンで実験してみよう。

実際の多項式 f に対して、f, f' を計算しておく。4 次多項式 $f(z) = z^4 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$ に対して、$f'(z) = 4z^3 + 2a_2 z + a_3$ である。

$|f|$ の等高線を色分けによって描く。

その中で、十分 $|f|$ が小さいと思われる点から、ニュートン法を始める。

ニュートン法ではほとんどすべての複素数から始めると根のどれかに収束することが知られている。実際にそれを描いて確かめることができる。

分数関数（有理関数）

$P(z)$ を p 次多項式、$Q(z)$ を q 次多項式として、$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ の形で定義される関数を分数関数（有理関数）と呼ぶ。$P(z)$ と $Q(z)$ は共通因子を持たないとする。

複素数 w に対して、$f(z) = w$ は、$\frac{P(z)}{Q(z)} = w$, $P(z) - wQ(z) = 0$ であるから、高々一つの例外の w を除いて、これは $\max\{p, q\}$ 次多項式であり、これを満たす z は重複を除いて $\max\{p, q\}$ 個ある。

１次分数変換

$\max\{p,q\}=1$ のとき、１次分数式と呼ばれる。共通因子を持たない条件は、$f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ と書いたとき、$ad-bc\neq 0$ である。逆写像 $f^{-1}(z)=\dfrac{dz-b}{-cz+a}$ が定義され、１次分数変換は「円または直線」を「円または直線」に写す。

こんどは a, b, c, d を複素数として、

$$z\longmapsto\frac{az+b}{cz+d}$$

という写像を考える。これは、複素数 z の写る先が $\dfrac{az+b}{cz+d}$ であるという複素数平面から複素数平面への写像の表し方である。

２つの１次分数変換 $z_1\longmapsto\dfrac{a_1z_1+b_1}{c_1z_1+d_1}$, $z_2\longmapsto\dfrac{a_2z_2+b_2}{c_2z_2+d_2}$ を続けて行うと

$$z_1\longmapsto z_2=\frac{a_1z_1+b_1}{c_1z_1+d_1}\longmapsto\frac{a_2z_2+b_2}{c_2z_2+d_2}=\frac{a_2\dfrac{a_1z_1+b_1}{c_1z_1+d_1}+b_2}{c_2\dfrac{a_1z_1+b_1}{c_1z_1+d_1}+d_2}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{a_2\dfrac{a_1z_1+b_1}{c_1z_1+d_1}+b_2}{c_2\dfrac{a_1z_1+b_1}{c_1z_1+d_1}+d_2}&=\frac{a_2(a_1z_1+b_1)+b_2(c_1z_1+d_1)}{c_2(a_1z_1+b_1)+d_2(c_1z_1+d_1)}\\&=\frac{(a_2a_1+b_2c_1)z_1+(a_2b_1+b_2d_1)}{(c_2a_1+d_2c_1)z_1+(c_2b_1+d_2d_1)}\end{aligned}$$

であるが、この最後の分数変換の係数はちょうど行列の積

$$\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2a_1+b_2c_1&a_2b_1+b_2d_1\\c_2a_1+d_2c_1&c_2b_1+d_2d_1\end{pmatrix}$$

の成分と一致している。2×2 行列が複素数平面に左から作用しているということである。

但し、１次分数変換を複素数に作用させるとき、複素数の他にもう１点 ∞ を考え、分母が 0 になるときには、∞ に写るとし、∞ は $\dfrac{a}{b}$ に写るとする。

$$\frac{a(-\dfrac{d}{c})+b}{c(-\dfrac{d}{c})+d}=\infty,\quad\frac{a\infty+b}{c\infty+d}=\frac{a}{b}$$

また、１次分数変換 $z\longmapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$ では、常に $ad-bc\neq 0$ とする。このとき、逆写像があり、$z\longmapsto\dfrac{dz-b}{-cz+a}$ となる。$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の逆行列は、$\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ であるが、0 でないスカラー行列は、１次分数変換としては恒等写像である。

１次分数変換が、円または直線を円または直線に写すことは、次のようにして確かめられる。

まず、$c=0$ のとき、

$$z\longmapsto\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$$

は、原点を中心とする $|\frac{a}{d}|$ 倍の相似変換、$\arg\frac{a}{d}$ の回転、$\frac{b}{d}$ だけの平行移動を行ったものだから、円を円に写す。(直線は直線に写す。)

$c \neq 0$ のとき、$z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ は

$$z \longmapsto cz+d \longmapsto \frac{\frac{a}{c}(cz+d)-\frac{ad-bc}{c}}{cz+d}=\frac{az+b}{cz+d}$$

と分解されるが、$w=cz+d$ について $w \longmapsto \dfrac{\frac{a}{c}w-\frac{ad-bc}{c}}{w}$ は、再び

$$w \longmapsto \frac{1}{w} \longmapsto -\frac{ad-bc}{c}\frac{1}{w}+\frac{a}{c}=\frac{\frac{a}{c}w-\frac{ad-bc}{c}}{w}$$

と分解される。

$z \longmapsto az+b$ の形のものについては、円または直線を円または直線に写すから、$z \longmapsto \dfrac{1}{z}$ が、この性質を持てば良い。

$w=\dfrac{1}{z}$ と置く。z が、$|z-\alpha|=r$、すなわち

$$z\overline{z}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+\alpha\overline{\alpha}-r^2=0$$

を満たすならば、

$$\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}}-\alpha\frac{1}{\overline{w}}-\overline{\alpha}\frac{1}{w}+\alpha\overline{\alpha}-r^2=0$$

を満たす。従って、

$$1-\alpha w-\overline{\alpha w}+(\alpha\overline{\alpha}-r^2)w\overline{w}=0$$

$\alpha\overline{\alpha}-r^2 \neq 0$ ならば、

$$w\overline{w}-\frac{\alpha}{\alpha\overline{\alpha}-r^2}w-\frac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}-r^2}\overline{w}+\frac{1}{\alpha\overline{\alpha}-r^2}=0$$

は円を表し、$\alpha\overline{\alpha}-r^2=0$ ならば、直線を表す。

実は、s, t を実数として、$sz\overline{z}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+t=0$ は、$\alpha\overline{\alpha}>st$ のとき、円または直線を表す。この式に $z=\dfrac{1}{w}$ を代入して整理すると、

$$s-\alpha w-\overline{\alpha w}+tw\overline{w}=0$$

を得、これは円または直線を表す。

$\max\{p, q\} > 1$ のとき

ニュートン法では $f(z) = z$ となる点への $f(z)$, $f(f(z))$, ... の収束を調べていた。一般に、$f(z)$, $f(f(z))$, ... の振る舞いを調べる数学は複素力学系理論と呼ばれ２０世紀末に著しく進歩した。

ニュートン法では $f(z)$ は分数式であるが、多項式 $f(z) = P(z)$ に対しても、問題はやさしくはない。充填ジュリア集合という集合が $K = \{z \mid |f^n(z)| \not\to \infty\}$ として定義される。

4 次式 $P(z) = z^4 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$ に対して、k を 0 でない定数として、$f_k(z) = z + kP(z)$ を考える。k の値によらず、$f_k(z) = z$ となる z は $P(z)$ の根である。

$f_k(z) = z$ ならば、${f_k}^2(z) = f_k(f_k(z)) = z$, ..., ${f_k}^m(z) = z$ だから、$z \in K_{f_k}$ である。

もしも、K_{f_k} が、$P(z)$ の根（高々４点）だけからなるならば、話は簡単であるが、実際の K_{f_k} の形は、非常に複雑である。

$|k|$ が小ならば、K_{f_k} は 2 次元的な部分を含む集合であるが、$|k|$ が大きくなると、K_{f_k} は 0 次元的な集合となる。$|k|$ が十分大きいときには、K_{f_k} はカントール集合と呼ばれる集合となる。

実は、K_{f_k} の境界のハウスドルフにより定義された次元は、実数に値をとる（いわゆるフラクタルの次元）が、k が変化すると、連続に変化することもわかる。