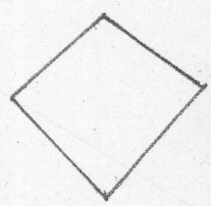
高校生のための現代数学講座　東京大学
「いろいろな幾何学」　玉原国際セミナーハウス
講義 (3)　坂井　秀隆　2019 年 7 月 13 日

「作図と演算」

射影幾何というのは，ルネッサンスの頃の遠近法とも関係がある．遠近法では

- 目の高さに対応するところに地平線が現れる，
- 地表にある平行する直線は，消失点と呼ばれる点で交わり，その消失点は地平線上にある．

問題 1. 次の 4 角形は，長方形を斜めから見た図とする．これをタイルの 1 つと思って，平面上にタイルが敷きつめられた絵を描いてみよう．



直線に消失点に対応する無限遠点を付け加えることで，2 直線が必ず 1 点で交わる幾何学を考えた．これが，射影幾何学と呼ばれるものになる．

射影幾何のルール（部分）．

- 相異なる 2 点 a, b に対して，a, b を通る直線 l がただ 1 つ存在する．
  (これを $a \times b = l$ と書く．)
- 相異なる 2 直線 l, m に対して，l, m の交点 a がただ 1 つ存在する．
  (これを $l \times m = a$ と書く．)

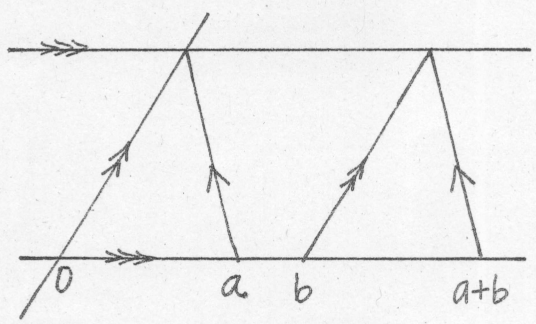
遠近法の世界で，長さのようなものはどのように考えたらよいのだろうか？

足し算を作図しよう．

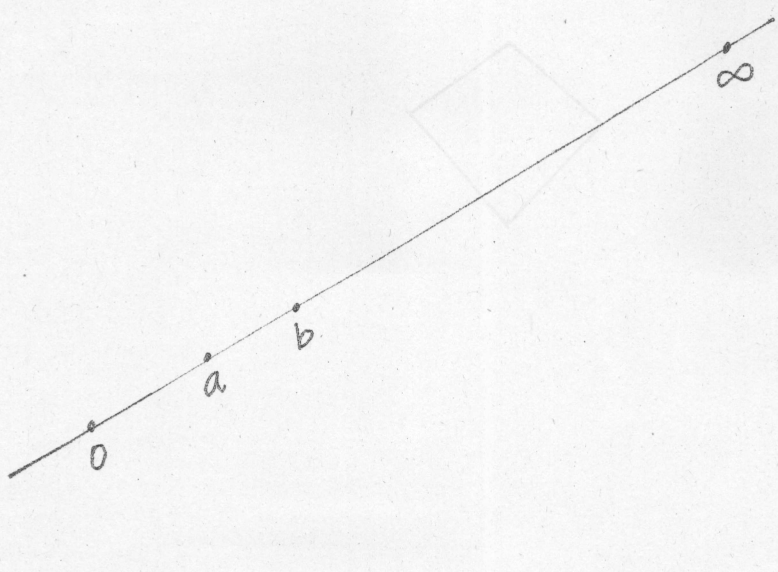
射影幾何のルールのもとで

問題 2. 直線上に，原点 O と ∞，点 a, b が与えられているとする．直線上，和 $a+b$ に対応する点を作図してみよう．

普通の平面幾何 (ユークリッド幾何) では



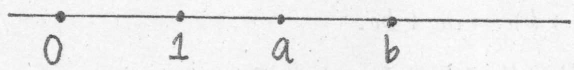
射影幾何の場合



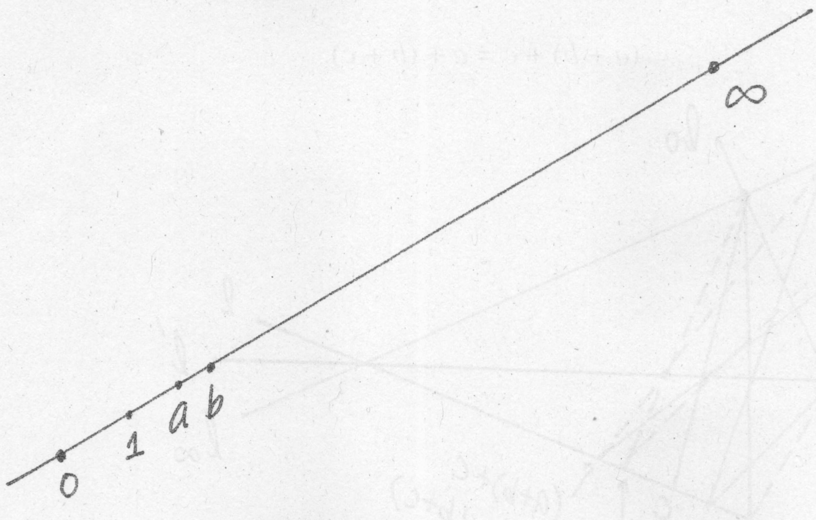
かけ算を作図しよう.

問題 3. 直線上に，原点 O と $1, \infty$ の 3 点および点 a, b が与えられているとする．直線上，積 ab に対応する点を作図してみよう．

普通の平面幾何 (ユークリッド幾何) では



射影幾何の場合



演算のルール.

a, b に対し定まる和 $a+b$, 積 ab は次の性質を満たしている：

(1) (加法の交換法則)　$a+b=b+a$,

(2) (加法の結合法則)　$a+(b+c)=(a+b)+c$,

(3) (零の存在)　0 と書く特別な元が存在して，どんな a に対しても，$a+0=a$ を満たす,

(4) (加法の逆元の存在)　どんな a にも $-a$ が存在して $a+(-a)=0$ を満たす,

(5) (乗法の結合法則)　$a(bc)=(ab)c$,

(6) (単位元の存在)　1 と書く特別な元が存在して，どんな a に対しても $1a=a1=a$ を満たす,

(7) (乗法の逆元の存在)　0 でないどんな a に対しても a^{-1} が存在して $a^{-1}a=aa^{-1}=1$ を満たす,

(8) (分配法則)　$a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$.

これらのルールを満たしている数全体は**体**であるといわれる.

また，さらに

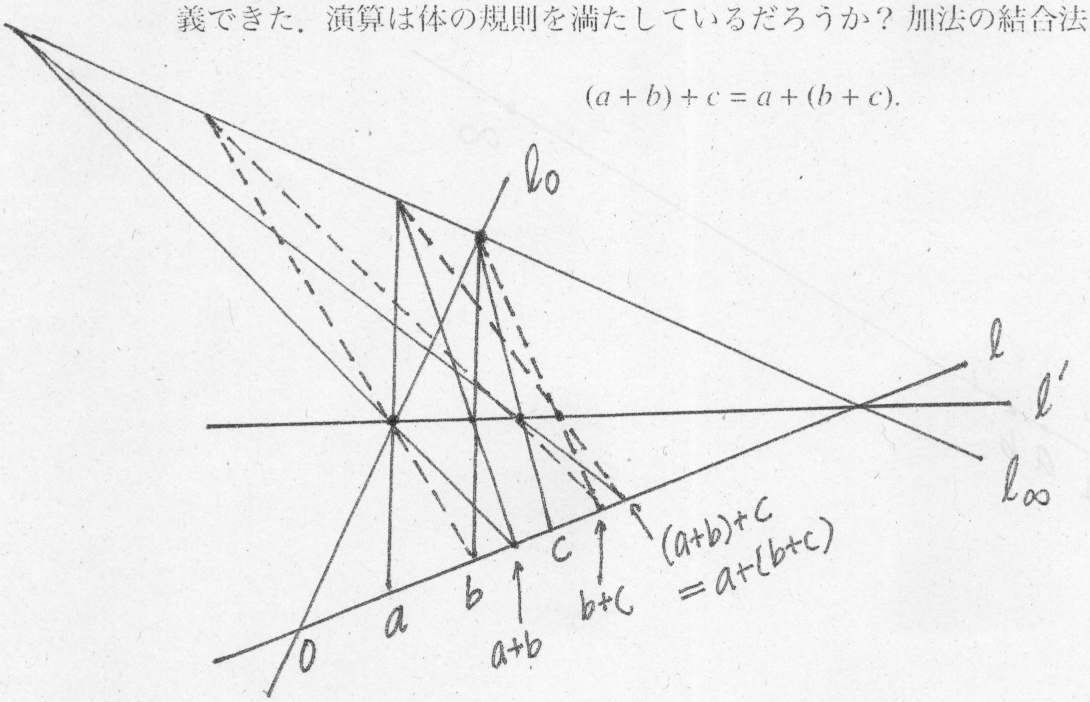
(9) (乗法の交換法則)　$ab=ba$

を満たす体は，可換体と呼ばれる．実数全体 $\mathbb{R}$ や有理数全体 $\mathbb{Q}$, 複素数全体 $\mathbb{C}$ は可換体である.

⋆ ⋆ ⋆

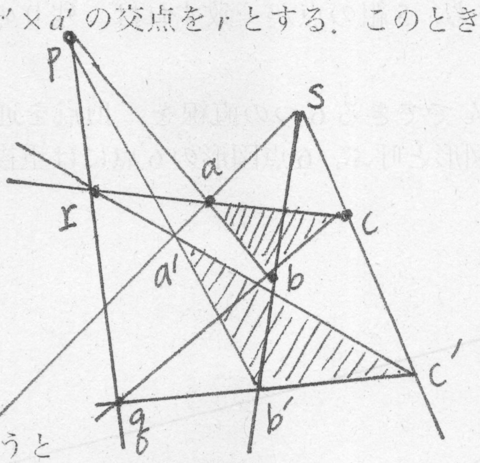
作図によって，射影平面上の直線から点 ∞ を除いた集合に，足し算と掛け算が定義できた．演算は体の規則を満たしているだろうか？ 加法の結合法則を見てみよう:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$



これを，**デザルグの定理**を使って示そう．これは次の定理である：

定理 1 (デザルグ). 1 点 s を通る異なる 3 本の直線 l, m, n 上にそれぞれ 2 点 $a, a'; b, b'; c, c'$ をとる．直線 $a \times b$ と $a' \times b'$ の交点を p, 直線 $b \times c$ と $b' \times c'$ の交点を q, 直線 $c \times a$ と $c' \times a'$ の交点を r とする．このとき，p, q, r は 1 直線上にある．



これを使うと

平面射影幾何のルール

直線の全体，点の全体が定まっていて

(1) 相異なる 2 点 a, b に対して，a, b を通る直線 l がただ 1 つ存在する，

(2) 相異なる 2 直線 l, m に対して，l, m の交点 a がただ 1 つ存在する，

(3) ある 4 点があって，そのうちのどの 3 点も 1 直線上にない，

(4) デザルグの定理が成り立つ．

⋆ ⋆ ⋆

平面射影幾何のルールを満たす集合があれば，そこから体の演算を定義することができる．また逆に，体から射影平面を構成することもできる．

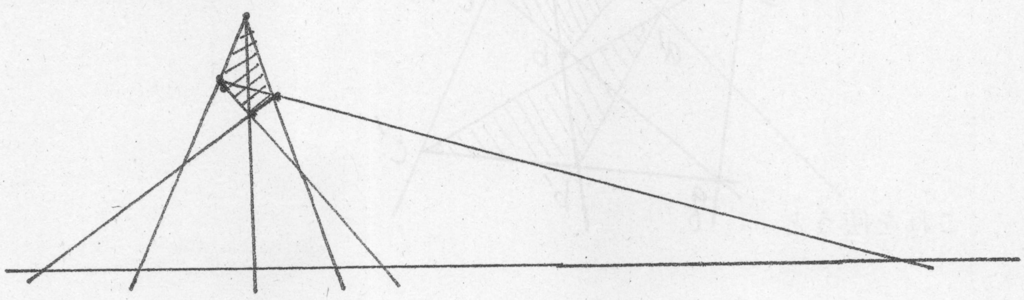
$$\mathbb{P}^2(K) = K^3 \setminus \{(0,0,0)\}/\sim, \qquad (x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \quad \lambda \in K \setminus \{0\}.$$

補足 1. 足し算，かけ算を作図で定めたが，結果は，そこでとった補助線のとり方によらない．

これを確認したいのだが，次の定理が使える：

定理 2. 直線上の 2 つの 6 点図形のうち，5 組の点が一致すれば，残りの 1 組の点も一致する．

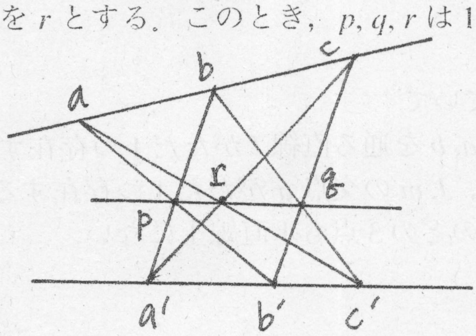
ここで，4 角形の 4 つの頂点を結んでできる 6 つの直線を，頂点を通らない直線で切断して得られる 6 つの点を 6 点図形と呼ぶ．6 点図形の 6 点には重複する点が含まれることもある．



和の作図において，$\infty, \infty, 0, a, b, a+b$ は 6 点図形であり，積の作図において，$\infty, 0, 1, a, b, ab$ は 6 点図形である．

補足 2. 乗法の交換則は，パップスの定理と対応がある．

定理 3 (パップス). 相異なる 2 直線 l, m 上にそれぞれ 3 点 a, b, c および a', b', c' をとる．直線 $a \times b'$ と $a' \times b$ の交点を p, 直線 $b \times c'$ と $b' \times c$ の交点を q, 直線 $c \times a'$ と $c' \times a$ の交点を r とする．このとき，p, q, r は 1 直線上にある．



例えば，ハミルトンの 4 元数に対応する射影平面では，パップスの定理は成り立たない．

参考文献

[横田] 横田一郎著『位相幾何学から射影幾何学へ』(現代数学社)