高校生のための現代数学講座 東京大学
「いろいろな幾何学」 玉原国際セミナーハウス
講義 (1)　河澄　響矢 2019 年 7 月 13 日

「グラフと曲線」

この時間では、 xy 平面上の曲線を関数のグラフとして表すことを考えます。それによって以下のことを観察したいと思います。

- x の関数のグラフだけでなく、y の関数のグラフも考える必要がある。
- １つだけのグラフでは不充分で、複数のグラフを合わせたものとして表される。このことを現代数学では「局所的（local）なものを貼り合わせて大域的（global）なものを構成する」と言います。
- 現れる関数は具体的な式で表されるとは限らない。高校数学での関数は具体的な式で表されますが、現代数学での関数は具体的な式で表されるとは限りません。これが、現代数学が抽象的な議論を必要とする理由の 1 つです。

1　グラフと直線

最初に直線を考えます。xy 平面上のほとんどの直線は 1 次関数のグラフ

$$y = ax + b \tag{1}$$

で表されます。ここで a は傾き、b は y 切片です。傾き a が 0 の場合は

$$y = b \tag{2}$$

となりますが、これは、すべての x について一定の値 b をとる定数関数のグラフと考えられます。「ほとんど」と言ったのは y 軸に平行な直線が (1) の形では表されないからです。y 軸に平行な直線は、ある数 q によって

$$x = q \tag{3}$$

と表されます。x と y の役割を交換して考えると、すべての y について一定の値 q をとる定数関数のグラフと考えられます。以上により、xy 平面の、すべての直線は

(i) x の関数のグラフ $y = ax + b$,　または　(ii) y の関数のグラフ $x = px + q$

と表すことができます。(2)(3) での定数関数のグラフ以外の直線は (i) (ii) のどちらの形でも表すことができます。定数関数でないことは $a \neq 0$ および $p \neq 0$ ということで、このときは $y = ax + b$ と $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$ は同じ直線を表しています。同様に $x = py + q$ と $y = \frac{1}{p}x - \frac{q}{p}$ は同じ直線を表します。

さて、(i) (ii) での直線の表し方は x と y のどちらかを「ひいき」していることに注意します。数 l, m, n を使って

$$lx + my = n \tag{4}$$

と表すと x と y は「平等」です。一つだけ気をつけなければならないのは $l = m = 0$ の場合です。このとき (4) は $0x + 0y = n$ となります。もし、数 n が実際には 0 でないならば、(4) をみたす点 (x, y) は存在しません。（このことを「式 (4) が表す集合は空集合である」と言います。）他方、数 n が実際に 0 ならば、すべての点 (x, y) で (4) つまり $0x + 0y = 0$ がなりたちます。別の言い方をすると、式 (4) が表す集合は xy 平面全体になります。

$l = m = 0$ ではない、つまり、l と m の少なくとも一方は 0 でない、場合は、式 (4) は直線を表します。$m \neq 0$ ならば、式 (4) は $y = -\frac{l}{m}x + \frac{n}{m}$ となって (i) の形になり、$l \neq 0$ ならば、$x = -\frac{m}{l}x + \frac{n}{l}$ つまり (ii) の形になります。

本論にもどると、xy 平面上のすべての直線は、x の関数のグラフか、y の関数のグラフの少なくとも一方では表されることを覚えておいてください。

2　放物線

つぎに x の 2 次関数のグラフ

$$y = ax^2 + bx + c \tag{5}$$

を思い出します。（$a = 0$ ならば直線ですが、）$a \neq 0$ ならば放物線と呼ばれる曲線です。これを右側に 90 度回転させると y の 2 次関数のグラフ

$$x = ay^2 + by + c \tag{6}$$

になりますが、これも $a \neq 0$ ならば放物線です。§1 で述べた直線を含めて、ここまでに現れた関数はすべての x （またはすべての y）で定義された関数であることに注意してください。

放物線 (6): $x = ay^2 + by + c$ を x の関数のグラフとして表すことが出来るかどうか考えてみます。以下、簡単のため $a > 0$ とします。二次方程式の解の公式をつかっ

て y について解いてみます

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}. \tag{7}$$

右辺のルートの中身は 0 以上つまり $b^2 - 4a(c-x) \geq 0$ でなければならないので、関数 (7) は $x \geq c - \dfrac{b^2}{4a}$ のときに限り定義されます。さらに、$x = c - \dfrac{b^2}{4a}$ において、関数 (7) は「尖って」います（キチンと言うと微分不可能です）。

パラメータ t を $y(t) = t$ となるように定めると、この放物線は $x(t) = at^2 + bt + c$, $y(t) = t$ というパラメータ表示をもちます。$x'(t) = 2at + b$ ですから $t_0 \neq -b/(2a)$ のとき $x'(t_0) \neq 0$ です。$t_0 = -b/(2a)$ が丁度「尖った」点 $x = c - \dfrac{b^2}{4a}$ に対応しています。

3　円

次に、原点 $(0,0)$ を中心とし、半径を $r(>0)$ とする円

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{8}$$

を考えます。

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{または} \quad x = \pm\sqrt{r^2 - y^2} \tag{9}$$

と書き換えると x の関数または y の関数のグラフとして表されるわけですが、これらの関数も、それぞれ $-r \leq x \leq r$ および $-r \leq y \leq r$ の範囲でしか定義されていません。全体で定義されていないのは関数 (7) と同様です。それでも (9) が円という曲線を表していることは間違いありません。曲線を関数のグラフで表すときに、その関数がすべての数について定義される必要はない（つまり、関数の定義域が実数全体の集合である必要はない）のです。さらに、それぞれ $\pm$ の符号に応じて 2 つの関数がとれています。1 つの関数のグラフではなく、複数の関数のグラフを合わせたものとして曲線が表されています。関数 $\sqrt{r^2 - x^2}$ において $x = \pm r$ は「尖って」います（これも関数 (7) と同様です）。そこで $-r < x < r$ で考えた方が都合がよいこともあります。そうすると、(9) の表示を、それぞれ $-r < x < r$ および $-r < y < r$ に制限してできる 4 つのグラフが貼りあって 1 つの円 (8) が構成されていると見ることもできます。4 つのグラフという「局所的（local）なもの」が貼り合わさって円という「大域的（global）なもの」が出来上がっています。これが現代数学での「多様体（manifold）」の考え方です。

もし、三角関数を知っているならば、この円が

$$(x(t), y(t)) = (r\cos t, r\sin t) \tag{10}$$

ただし t はすべての数を動く、と表せます。このような表し方は、曲線のパラメータ表示と呼ばれます。上述の尖った点は $x'(t_0) = 0$ または $y'(t_0) = 0$ をみたす t_0 に対応しています。

なお、$a, b > 0$ についての（x 軸と y 軸を軸とする）楕円

$$ax^2 + by^2 = 1$$

についても (9) や (10) と同様の表示ができます。

4　双曲線

次に双曲線を考えてみます。最初に、一番簡単な双曲線

$$xy = 1 \tag{11}$$

を考えてみます。$x \neq 0$ のとき $y = x^{-1}$ と書き換えられますから、x の関数 x^{-1} のグラフです。しかし、この x の関数 x^{-1} は、$x = 0$ では定義されていません。$x = y^{-1}$ と書き換えても同じことです。 y^{-1} は、$y = 0$ では定義されていません。なお、この双曲線は、パラメータ $t \neq 0$ によって

$$(x(t), y(t)) = (t, t^{-1}) \tag{12}$$

と表示することもできます。

曲線

$$y^2 - x^2 = 2 \tag{13}$$

も双曲線を表しています。$(y - x)(y + x) = 2$ であって、２つの直線 $y = x$ と $y = -x$ は直交しているからです。（右辺を 2 にしたので、ちょうど双曲線 (11) を 45 度回転させたものになっています。）このときは $y = \pm\sqrt{x^2 + 2}$ と解けて、関数 $\pm\sqrt{x^2 + 2}$ はすべての x について定義されています。しかし、１つの関数のグラフではなく、２つの関数のグラフになっています。(12) を 45 度回転させて、(13) のパラメータ表示

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(t - t^{-1}), \frac{\sqrt{2}}{2}(t + t^{-1})\right), \quad t \neq 0, \tag{14}$$

が得られます。

今度は、双曲線 (11) を 30 度回転させます[1]。このときも、すべての x について定義された２つの関数のグラフとして表すことができます。このことを確かめるため

[1] 0 度より大きく 90 度より小さいならば、以下の議論はそのままなりたちます。

に、(12) を 30 度回転させて得られるパラメータ表示

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}t^{-1}, \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}t^{-1}\right), \quad t \neq 0, \tag{15}$$

を考えます。ここでは双曲線の x 軸の上にある部分だけを考えます。これは $t > 0$ に対応します。下にある部分 $t < 0$ については、同様に確かめられるので省略します。式 (15) において t が 0 から $+\infty$ まで動くときの $x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}t^{-1}$ の振る舞いを調べます。すべての $t > 0$ について $x'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t^{-2} > 0$ だから $x(t)$ は狭義単調増大です[2]。さらに、$t > 0$ が 0 に近づくとき $x(t)$ は $-\infty$ に発散し、t が $+\infty$ に向かうとき $x(t)$ も $+\infty$ に向かいます。したがって、t が 0 から $+\infty$ まで動くとき $x(t)$ も $-\infty$ から $+\infty$ までの数を 1 回づつ通って動きます。つまり関数 $x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}t^{-1}$ は、数の集合 $\{0 < t < +\infty\}$ と $\{-\infty < x < \infty\}$ の間の一対一対応を与えています。この一対一対応のもとで x に対応する t を $t(x)$ と表すことにします。$t(x)$ は $x(t)$ の逆関数と呼ばれます。これを使うと、いま考えている双曲線の x 軸の上にある部分は

$$y = y(t(x))\left(= \frac{1}{2}t(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}t(x)^{-1}\right) \tag{16}$$

というグラフとして表されます。この表示で気になるのは、関数 $t(x)$ です。グラフとして表されるかどうか？ということだけを考えるのならば、$t(x)$ の具体的な形を知る必要はありません。

ただし、逆双曲正弦関数 $\sinh^{-1}(x)$ を使えば $t(x)$ は具体的に表されます。双曲正弦関数 $\sinh(s) = \frac{1}{2}(e^s - e^{-s})$ は、いまの $x(t)$ についての議論と同様に考えることにより、逆双曲正弦関数と呼ばれる逆関数 $\sinh^{-1}(x)$ を持つことが分かります。簡単のため $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ と表すと $x(t) = at - bt^{-1} = 2\sqrt{ab}\frac{1}{2}\left(\frac{at}{\sqrt{ab}} - \frac{bt^{-1}}{\sqrt{ab}}\right) = 2\sqrt{ab}\sinh\log(\sqrt{ab^{-1}}t) = 2\sqrt{ab}\sinh\left(\log t + \frac{1}{2}\log(a/b)\right)$ となるので、

$$t(x) = \exp\left(\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{ab}}\right) - \frac{1}{2}\log(a/b)\right) \tag{17}$$

となり、これを $y(t) = \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}t^{-1}$ に代入すればよいことになります。

いまの場合は双曲線という比較的に簡単な曲線だったので、具体的な関数のグラフとして何とか表すことができました。しかし、より一般の曲線では、対応する関数を具体的な式で表すことができるとは限りません。

[2] $0 < t_1 < t_2$ ならば $\frac{\sqrt{3}}{2}t_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}t_2$ および $-\frac{1}{2}t_1{}^{-1} < -\frac{1}{2}t_2{}^{-1}$ なので、微分を使わなくてもわかります。

（このあたりで **60** 分という割り当てられた時間は使い切ると思いますので、このあとは、単なる参考資料です。微分の性質を色々と使うので高校２年生までの皆さんには少し難しいかもしれません。）

そこで、以下の議論ではグラフとして表されるかどうか？ということだけを考えることにして、関数の具体的な形については考えないことにします。

5　グラフとパラメータ表示された曲線

一般に、パラメータ表示

$$(x(t), y(t)) \tag{18}$$

された曲線を考えます。ある $t = t_0$ で $x'(t_0) \neq 0$ であると仮定します。このとき 30 度傾けた双曲線と同様の議論ができます。つまり、$x'(t_0) > 0$ または $x'(t_0) < 0$ ですが、$x'(t_0) > 0$ の場合 $x(t)$ は $t = t_0$ の近くで狭義単調増大であり、$x'(t_0) < 0$ の場合 $x(t)$ は $t = t_0$ の近くで狭義単調減少です。そこで $x = x(t_0)$ の近くで定義された逆関数 $t(x)$ がとれます。逆関数とは $x(t(x)) = x$ および $t(x(t)) = t$ をみたす関数です。したがってこの曲線（を $t = t_0$ の近くで考えたもの）は $(x, y) = (x(t_0), y(t_0))$ の近くで $y = y(t(x))$ というグラフで表示されます。x と y の役割を交換して考えると、 $y'(t_0) \neq 0$ ならば、$y = y(t_0)$ の近くで定義された逆関数 $t(y)$ がとれて $x = x(t(y))$ というグラフで表示されます。

これらの議論は §2 と §3 で放物線と円について考えたことと辻褄があっているはずです。以上の議論をまとめておきます。

定理 1. パラメータ表示 (18) をもつ曲線が $t = t_0$ において $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$ であると仮定する。このとき、この曲線（を $t = t_0$ の近くで考えたもの）は $(x, y) = (x(t_0), y(t_0))$ の近くで x の関数または y の関数のグラフとして表される。

ここで「曲線（を $t = t_0$ の近くで考えたもの）」という奥歯に物が挟まった言い方をしました。その理由はパラメータ表示

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{t^2(1-t)}{t^3 + (1-t)^3}, \frac{t(1-t)^2}{t^3 + (1-t)^3} \right) \tag{19}$$

によって表される曲線[3]を考えると分かると思います。これはデカルトの正葉線 (Folium of Descartes) と呼ばれる曲線で

$$x^3 + y^3 - xy = 0 \tag{20}$$

[3] 分母は $t^3 + (1-t)^3 = 3t^2 - 3t + 1 = 3(t - 1/2)^2 + 1/4 \geq 1/4$ より 0 ではない。

という表示ももちます[4]。$t = 0$ と $t = 1$ に対応して、原点 $(0, 0)$ を 2 回通りますが、これら 2 つの t について（実は、すべての t について）$(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ となるので定理 1 が適用できます。この状況があるために「曲線（を $t = t_0$ の近くで考えたもの）」と書く必要がありました。

最後に、もう 1 つパラメータ表示

$$(x(t), y(t)) = (t^3, t^2)$$

をもつ曲線を考えます。$t = 0$ で尖っています（尖点 (cusp) と呼びます）。もちろん $y = x^{2/3}$ というグラフで表されますが、$t = 0$ に対応して $x = 0$ で $x^{2/3}$ は微分不可能です。この曲線を微分可能な関数のグラフで表すことは出来ません。

6 陰関数定理

曲線の表示はパラメータ表示だけではなく、2 変数関数 $f(x, y)$ によって

$$f(x, y) = 0 \tag{21}$$

とも表示されます。直線 (4) ($f(x, y) = lx + my - n$), 円 (8) ($f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$), 双曲線 (13) ($f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$), 正葉線 (20) ($f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$) などがそうです。点 (x_0, y_0) が曲線 (21) 上にある、つまり $f(x_0, y_0) = 0$ であるとき、そこでの接線を $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ と表すと、係数 a, b は次で与えられます。

$$a = \frac{d}{dt} f(x_0 + t, y_0)\Big|_{t=0} \left(\overset{\text{定義}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$$
$$b = \frac{d}{dt} f(x_0, y_0 + t)\Big|_{t=0} \left(\overset{\text{定義}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

§1 の最後に議論したことから、仮定 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \neq (0, 0)$ がなりたてば、接線を x の関数または y の関数のグラフとして表すことができます。もとの曲線 (21) と接線は、点 (x_0, y_0) の近くでは「ほとんど同じ」ですから、この仮定のもとで、曲線 (21) も点 (x_0, y_0) の近くで x の関数または y の関数のグラフとして表すことができます。次の陰関数定理とよばれる定理がなりたちます。

定理 2. 曲線 (21) の点 (x_0, y_0) において $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \neq (0, 0)$ であると仮定する。このとき、この曲線は $(x, y) = (x_0, y_0)$ の近くで x の関数または y の関数のグラフとして表される。

この定理は理系ならば大学 1 年生か 2 年生で必ず習います。

[4]デカルトの正葉線は一般の $a > 0$ について $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ という形で与えられます。これは直線 $x + y = -a$ に漸近することが知られています。