高校生のための現代数学講座 東京大学
「複素数」 玉原国際セミナーハウス
講義 (5) 木田 良才 2018 年 7 月 20 日

「一次分数変換」

a, b, c, d を複素数とし, 次の形の関数 T を考える:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

ただし, $ad - bc \neq 0$ とする. このような T を**一次分数変換**という ($ad - bc = 0$ のときは, 右辺の分母が常に 0 になったり, 右辺が定数になったりして, 都合が悪い). この変換がもつ性質を調べてみたい. 例えば, 複素平面上の

(a) 相似拡大・縮小, 回転 $z \mapsto \alpha z$,

(b) 平行移動 $z \mapsto z + \beta$,

(c) 反転 $z \mapsto 1/z$

は一次分数変換である ($\alpha \neq 0$ と β は複素数). 反転は

$$z = re^{i\theta} \mapsto r^{-1}e^{i\theta} \mapsto r^{-1}e^{-i\theta} = 1/z$$

と分解され, これは, 単位円 $|z| = 1$ に関する鏡映と実軸に関する鏡映を合成したものである.

★ すべての一次分数変換は, 上の三つの例を合成したものである. 例えば,

$$T(z) = \frac{3z+2}{z-1}$$

とする. 割り算により, 右辺は $3 + \dfrac{5}{z-1}$ とかけて, T は次のように分解される:

$$z \overset{\text{(b)}}{\mapsto} z-1 \overset{\text{(c)}}{\mapsto} \frac{1}{z-1} \overset{\text{(a)}}{\mapsto} \frac{5}{z-1} \overset{\text{(b)}}{\mapsto} 3 + \frac{5}{z-1}.$$

★ 一次分数変換は逆変換をもち, それもまた一次分数変換である. 例えば,

$$T(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

とする. $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ とおいて, これを z について解くと, $z=\dfrac{-w-1}{w-1}$ となる. よって, 複素数 $w\neq 1$ に対し, T によって w にうつる複素数は $\dfrac{-w-1}{w-1}$ である.

一般の一次分数変換 T に対しても, 条件「$ad-bc\neq 0$」が効いて, $w=T(z)$ を z について解くことができる. これで T の逆変換が求まる.

★ 一次分数変換は,

複素平面の円または直線を, 円または直線にうつす,

という著しい性質 (**円円対応**という) をもつ.

これを示すには, (a), (b), (c) の変換がこの性質をもつことを確かめればよい. 回転と平行移動については直感的に明らかだろう. 一般に, 複素平面の円で, 中心が α で半径が r のものは, 等式

$$|z-\alpha|=r$$

を満たす複素数 z からなる. そして, 複素平面の直線で, α を通り, $\beta\ (\neq 0)$ の方向とその逆の方向に伸びていくものは,

$$z=\alpha+t\beta \quad (t \text{ は実数})$$

の形にかける複素数 z からなる. これを用いれば, 相似拡大・縮小が円を円にうつし, 直線を直線にうつすことがすぐに確かめられる.

反転 $T(z)=1/z$ についても同様に確かめられるが, ここでは具体例で見てみる. $a>1$ とする. 円

$$C_a : |z-(a+1)|=a$$

が, 反転 T で何にうつるかを考える (円 C_a は 1 で単位円と接する). $w=1/z$ とおき, C_a の式を変形すると, 次を得る:

$$\left|w-\frac{a+1}{2a+1}\right|=\frac{a}{2a+1}.$$

よって, 円 C_a が反転 T でうつる先は, この式が定める円 D_a である.

a をどんどん大きくしていくと, 円 C_a は直線 $l : z=1+ti$ に近づいていくように見える. 一方, 円 D_a は円 $D : |z-1/2|=1/2$ に近づいていく. T が C_a を D_a にうつすことを踏まえると, T は直線 l を円 D にうつすことが期待される. これは実際に計算で確かめられる. また, 反転の逆変換もまた反転なので, T は円 D を直線 l にうつす. このように, 反転 T は直線を円にうつしたり, 円を直線にうつしたりする.

「無限遠点 ∞」を導入し, 直線を「無限遠点を通る円」と見なせば, 状況を一言で言い表すことができる. 反転 T に対し, $T(0) = \infty$, $T(\infty) = 0$ と定義してしまえば, z を複素数または ∞ として, 反転 T は,

$$z \text{ を通る円を}, T(z) \text{ を通る円にうつす}. \tag{$*$}$$

例えば, $z = \infty$ のとき, これは次を意味する: 反転 T は直線を, 0 を通る通常の円, または, 0 を通る直線にうつす. 円円対応によれば, 一般の一次分数変換 T に対しても $(*)$ は正しい. 例えば,

$$T(z) = \frac{-3z+1}{z-3} = \frac{-3+1/z}{1-3/z}$$

のときは, $T(3) = \infty$, $T(\infty) = -3$ と定義すればよい. また, 直線を円と見なすことにより, 次の主張が正しくなる: 複素数または ∞ の中から, 相異なる三点をとれば, その三点を通る円が唯一存在する.

★ 一次分数変換

$$T(z) = \frac{-3z+1}{z-3}$$

に対し, 点列 $z, T(z), T^2(z), T^3(z), \ldots$ がどのように動いていくかを見てみたい. ここで, $T^n(z)$ は z を T で n 回うつして得られる複素数を表す. $T^n(z)$ を本当に計算して調べるのは大変なので, 円円対応を使って工夫したい.

$w = T(z)$ とおくと, 実は次のように変形できる:

$$\frac{w-1}{w+1} = 2\frac{z-1}{z+1}. \tag{$\dagger$}$$

実際, これをばらして変形すると, 等式 $w = T(z)$ が得られる. 左辺と右辺に同じ形の式が現れたことに注目したい. ところで, 正の実数 t をとったとき,

$$C_t : \frac{|z-1|}{|z+1|} = t$$

で表される複素平面上の図形は, 1 と -1 からの距離が $t : 1$ となるような複素数からなり, それは円をなす (アポロニウスの円). ただし, C_1 はちょうど虚軸になり, これは直線であるが, これも円と見なす. 等式 $(\dagger)$ から次が従う:

(i) T は C_t を C_{2t} にうつす.

T の定義から, $T(1) = 1$, $T(-1) = -1$, つまり, T は 1 と -1 を固定することがわかる. 円円対応により, T は 1 と -1 を通る円を, そのような円にうつす. 実はより強く, 次が成り立つ:

(ii) D を 1 と -1 を通る円とすると, T は D を D にうつす.

この二つの性質 (i), (ii) があれば, $T^n(z)$ の動きを大体把握することができる: 複素数 $z \neq \pm 1$ をとり, 三点 $z, 1, -1$ を通る円 D をとる (そのような D は唯一である). T は D を保ちながら, 1 から -1 に向かって D 上の点を動かす. そして, n を大きくすると, $T^n(z)$ は -1 に近づいていく.

最後に (ii) を確かめる. 一次分数変換

$$S(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

は逆変換 S^{-1} をもつ (上で示した). 等式 (†) により, T は次のように分解される:

$$z \overset{S}{\mapsto} \frac{z-1}{z+1} \overset{2\text{倍}}{\mapsto} 2\frac{z-1}{z+1} = \frac{w-1}{w+1} \overset{S^{-1}}{\mapsto} w.$$

D を 1 と -1 を通る円とする. D はこの分解の下, 次のようにうつっていく:

- 変換 S により, D は 0 を通る直線 l にうつる ($S(1) = 0, S(-1) = \infty$ なので).
- 次の「2 倍変換」により, l は l にうつる (l は 0 を通る直線なので).
- 最後の変換 S^{-1} により, l は D にうつる (S は D を l にうつすので).

ゆえに, T は D を D にうつす. これで (ii) が確かめられた.

$T^n(z)$ の動きを把握する際, 鍵となったのは等式 (†) への変形である. 実は, この変形の背後には 2×2 行列の理論が隠れている. それによると, この変形が何を意味するのか, いつそれが可能なのか, といった疑問に答えを与えることができる.

参考文献

[1] L. V. アールフォルス (笠原乾吉 訳), 複素解析, 現代数学社, 1982.

[2] 深谷賢治, 双曲幾何, 現代数学への入門, 岩波書店, 2004.