高校生のための現代数学講座　東京大学
「複素数」　玉原国際セミナーハウス
講義 (4)　松尾　厚　2018 年 7 月 21 日

「初等幾何と複素数」

中学校の数学において，三角形や円などの図形に注目し，三角形の合同・相似や円の接線の性質などを利用して，平面上の種々の図形について成立する諸定理を証明する手法を学んだ。そのような内容は，初等幾何と呼ばれる分野に属する。

初等幾何の諸定理は，座標やベクトルを用いて計算することにより，中学校で学んだ方法とは異なる方法で示すこともできる。さらに，平面上の図形の回転と拡大に関連するような定理については，複素数の積を利用することも有力な手段である。ただし，そのような方法が，初等幾何の証明よりも簡単であるとは限らない。

1　複素数と直線の幾何学

1.1　複素数の共役

複素数 $z = x + iy$ を考える。ただし，x, y は実数である。実数 x を複素数 z の実部と言い，実数 y を複素数 z の虚部と言う。虚部が 0 であるような複素数 $z = x + 0i$ を実数 x と同一視して「複素数 z は実数である」と言い，$z \in \mathbf{R}$ と表す。

また，実数でない複素数を虚数と言い，実部が 0 であるような虚数を純虚数と言う。（この定義によれば 0 は純虚数でないが，文献によっては 0 も純虚数に含めることがある。）

複素数 $z = x + iy$ に対して，その共役（複素共役）を次のように定める。

$$\bar{z} = x - iy$$

複素数 $z = x + iy$ が実数であるためには，$z = \bar{z}$ であることが必要十分である。また，純虚数または 0 であるためには，$z + \bar{z} = 0$ であることが必要十分である。

さて，複素数 $z = x + iy$ に対して，非負の実数

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

を z の絶対値という。複素数 z に対して

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

が成立する。これを用いると，零でない複素数 $z = x + iy$ の逆数 $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ が，分母子に $\bar{z}$ を掛けることによって

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

と計算される。特に，$|z| = 1$ ならば $z^{-1} = \bar{z}$ である。

以下では，複素数を複素平面（複素数平面）上の点と考え，複素数の共役によって言い表される図形的条件を考察しよう。

1.2　同一直線上にあるための条件

一般に，いくつかの点が同一直線上にあるための条件を共線条件と言う。複素数 z_1, z_2, z_3 が同一直線上にあるのは，差 $z_1 - z_2, z_1 - z_3$ の一方が他方の実数倍になっているときである。相異なる三つの複素数に対する共線条件を求めよう。

相異なる複素数 z_1, z_2, z_3 が同一直線上にあるとき，例えば $z_1 - z_3 = r(z_1 - z_2)$ であったとすると，比 $r = \dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$ は実数である。従って

$$\overline{\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right)} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \tag{1}$$

すなわち $\dfrac{\overline{(z_1 - z_3)}}{\overline{(z_1 - z_2)}} = \dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$ となり，両辺に $(z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}$ を掛けて分母を払うと

$$(z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_3)} = \overline{(z_1 - z_2)}(z_1 - z_3) \tag{2}$$

となる。逆に，式 (2) が成立すれば，三点 z_1, z_2, z_3 が同一直線上にあることもわかる。

式 (2) は複素数 z_1, z_2, z_3 が相異なるものでなくとも成立する。この主張の内容は z_1, z_2, z_3 の入れ替えについて対称的であるから，例えば

$$(z_1 - z_2)\overline{(z_2 - z_3)} = \overline{(z_1 - z_2)}(z_2 - z_3) \quad \text{または} \quad (z_2 - z_3)\overline{(z_3 - z_1)} = \overline{(z_2 - z_3)}(z_3 - z_1)$$

でもよい。

1.3　直角三角形をなすための条件

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を原点を中心として反時計回りに 90° 回転させて得られる点は $\mathrm{Q}(-y, x)$ である。対応する複素数は $z = x + iy,\ w = -y + ix$ となり，これらの複素数の間には $w = iz$ という関係がある。実際

$$w = -y + ix = i(x + iy) = iz$$

となっている。

さて，相異なる複素数 z_1, z_2, z_3 を考えよう。このとき，点 z_1, z_2 を結ぶ線分と点 z_1, z_3 を結ぶ線分が垂直であるためには，z_1 を中心として z_2 を反時計回りに $90°$ 回転させた点 $w_2 = z_1 + i(z_2 - z_1)$ について，z_1, w_2, z_3 が同一直線上にあればよい。その条件は，式 (1) により，次のようになる。

$$\overline{\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - w_2}\right)} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - w_2}$$

これを書き換えると $\overline{\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right)} + \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = 0$ となり，分母を払えば $(z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_3)} + \overline{(z_1 - z_2)}(z_1 - z_3) = 0$ となる。

問題 1　相異なる点 z_1, z_2 を結ぶ線分の垂直二等分線上に点 w があるための条件を求めよ。

問題 2　相異なる複素数 z_1, z_2 を通る直線に点 z_0 から下した垂線の足 w を z_1, z_2 を用いて表せ。

2　非調和比と円の幾何学

2.1　複素数の偏角

ここだけの約束だが，相異なる複素数 z_0, z_1, z_2 に対して，z_0, z_1 を結ぶ線分から z_0, z_2 を結ぶ線分まで反時計回りに測った角を $\angle z_1 z_0 z_2$ と表すことにする。

さて，零でない複素数 z を考える。このとき，原点 $0, 1$ を結ぶ線分から原点 $0, z$ を結ぶ線分まで反時計回りに測った角 $\angle 10z$ およびそれに $2\pi = 360°$ の整数倍を加えた角を複素数 z の偏角と呼び，$\arg z$ と表す。

このように，複素数の偏角には 2π の整数倍を加える自由度があるので，例えば，偏角 $2\pi - \theta$ を持つ複素数について，その偏角を $-\theta$ と言ってもよい。偏角は，正の実数を掛けても変わらないが，負の実数を掛けると $180° = \pi$ だけずれることになる。

$$\arg(rz) = \arg z,\quad \arg(-rz) = \arg z + \pi,\quad (r > 0)$$

また，複素共役は，実軸に関する対称移動であるから，$\arg \bar{z} = -\arg z$ となり，逆数について $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ であるから，

$$\arg z^{-1} = \arg \bar{z} = -\arg z$$

が成立する。

さて，複素数 z の偏角 $\theta = \arg z$ および $0, z$ を結ぶ線分の長さ $r = |z|$ を用いると，零でない複素数 $z = x + iy$ は

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される。このような複素数の表し方を極形式と呼ぶ。

複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$ に対して，その積は $zw = rs(\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi))$ となる。また，$w \neq 0$ のときには

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\theta - \phi) + i\sin(\theta - \phi))$$

となる。

相異なる複素数 z_1, z_2, z_3 について，角 $\angle z_2 z_1 z_3$ は商 $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$ の偏角である。すなわち

$$\angle z_2 z_1 z_3 = \arg\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$$

が成立する。

2.2 共線条件再論

相異なる複素数 z_1, z_2, z_3 が同一直線上にある条件は次で与えられる。

$$\arg\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = 0, \pi$$

これは $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$ が実数であることにほかならず，分母子に $z_1 - z_2$ を掛ければ $\dfrac{(z_1 - z_3)\overline{(z_1 - z_2)}}{|z_1 - z_2|^2}$ の分子が実数であることと同値である。

なお，角 $\angle z_2 z_1 z_3$ の絶対値が直角であるための条件は，$\arg\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = \pm 90^\circ = \pm\dfrac{\pi}{2}$ となり，これは $\dfrac{(z_1 - z_3)\overline{(z_1 - z_2)}}{|z_1 - z_2|^2}$ の分子が純虚数であることと同値である。

2.3　相似な三角形

二つの三角形 $\triangle z_1z_2z_3, \triangle w_1w_2w_3$ が裏返さずに相似であるためには，

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = \frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}$$

が成立することが必要十分である。実際，両辺の絶対値を取ることによって辺 z_1z_2 と辺 z_1z_3 の長さの比が辺 w_1w_2 と辺 w_1w_3 の長さの比に等しいことが分かり，両辺の偏角を取ることによって $\angle z_2z_1z_3 = \angle w_2w_1w_3$ が分かる。

また，裏返して相似であるためには，

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = \overline{\left(\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right)}$$

が成立することが必要十分である。

2.4　円周角の定理

円周上の二点を両端とする二つの弧のうち，大きいほうを優弧と言い，小さいほうを劣弧と言う。二点が直径の両端である場合は，どちらでもよいとする。

定理　円周上の劣弧を見込む円周角は中心角の半分である。

証明　原点 0 を中心とする半径 1 の円周上の二点 z_1, z_2 を両端とする劣弧を見込む中心角を $\theta = \angle z_1 0 z_2$ とすると，次が成立する。

$$\arg\frac{z_2}{z_1} = \theta$$

また，円周上の点 w に対する円周角を $\phi = \angle z_1 w z_2$ とすると，次が成立する。

$$\arg\frac{z_2 - w}{z_1 - w} = \phi$$

ここで，$\dfrac{z_2 - w}{z_1 - w}$ を絶対値で割って，絶対値が 1 となるようにしたものを考え，$|z_1| = |z_2| = |w| = 1$ を用いて計算すると

$$\left(\frac{z_2 - w}{z_1 - w} \Big/ \left|\frac{z_2 - w}{z_1 - w}\right|\right)^2 = \frac{z_2}{z_1} \tag{3}$$

となる。従って，$2\phi = \theta$ となり，円周角は中心角の半分に等しい。

問題 3　式 (3) を確かめよ。

2.5　非調和比と円の幾何学

相異なる複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 に対して，$\angle z_4z_1z_3$ と $\angle z_4z_2z_3$ が等しい条件は，次の比が正の実数であることと同値である。ただし，記号 a/b は商 $\dfrac{a}{b}$ を表す。

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \Big/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

また，この比が負の実数であることは，$\angle z_4z_1z_3 = \angle z_4z_2z_3 + \pi$ と同値である。

上記の比の値を次のように表して，複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 の非調和比または複比と呼ぶ。

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

相異なる複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 が同一直線上にあるか，または同一円周上にあるための条件は，非調和比が実数となることである。

3　シムソンの定理

定理　三角形の外接円上の点から，その三角形の各辺に下した垂線の足は，同一直線上にある。

証明　三角形 ABC の外接円上の点は原点 O であるとして良い。点 A, B, C を表す複素数を z_1, z_2, z_3 とする。原点を通る直径が円と交わるもう一つの点を P とし，それを表す複素数を z_0 をする。原点 O から直線 AB に下した垂線の足を M とし，これを表す複素数を w とおく。円周角の定理から $\angle$OAM = $\angle$OPB である。従って，$\triangle$OAM と $\triangle$OPB は相似であり，$\dfrac{z_2}{z_0} = \dfrac{w}{z_1}$ となるから，$w = \dfrac{z_1z_2}{z_0}$ を得る。

かくして，原点 O から三辺に下した垂線の足は $\dfrac{z_1z_2}{z_0}, \dfrac{z_2z_3}{z_0}, \dfrac{z_3z_1}{z_0}$ となるが，これが一直線上にあるためには z_1z_2, z_2z_3, z_3z_1 が一直線上にあれば良く，その条件は

$$\frac{z_1z_2 - z_2z_3}{z_3z_1 - z_2z_3} \in \mathbf{R}$$

となるが，これは $0, z_1, z_2, z_3$ が同一円周上にある条件と同じである。