高校生のための現代数学講座　東京大学
「確率と統計」　玉原国際セミナーハウス
講義 (4)　白石　潤一　2016 年 7 月 23 日

「面積と確率　ービュフォンの針と円周率πー」

サイコロでは、起こりうる事象の数は 6 で、例えば、1 の目が出る確率は 1/6 です。どんな問題でも、起こりうる事象の数が有限個であれば、そこから導き出される確率は有理数となるのが普通でしょう。

では、確率がなにか面白い (有理数ではない) 実数で与えられるような問題を考えることはできるでしょうか？18 世紀の博物学者ビュフォンが考えた問題はそのようなもののうち最も古いものです。

ビュフォンがどんな人物であったか、後で少し調べてみてください。ちなみに私は今、たまたまパリでこの原稿を書いてます。つまり、数百年前には彼が暮らしていたパリで、偶然、彼の問題について思いを巡らすことになりました。そんな確率って、一体どのぐらいなんだろうか $\cdots$

ビュフォンは微積分の方法を確率に持ち込もうとしました。そうすると、当然、連続に分布する事象や、(有理数ではない) 実数で与えられる確率に出会うことになりますね。

それでは、ビュフォンの考えた針の問題について説明します。ここでは、話をより具体的にするために、色々な数値パラメータを私の勝手で決めてしまうことにします。一般のパラメータでやり直すのことは、興味を持ったみなさんへの宿題にしておきます。

まず、模造紙を x-y 平面に見立てます。x 軸に平行な直線を 20cm 間隔でたくさん引きましょう（以下の図では 11 本です）。次に、平行線の間隔の半分の長さ 10cm の針をたくさん（N 本としましょう）握りましょう。では、その針を模造紙の上にバラバラバラっと無作為に撒いてください。

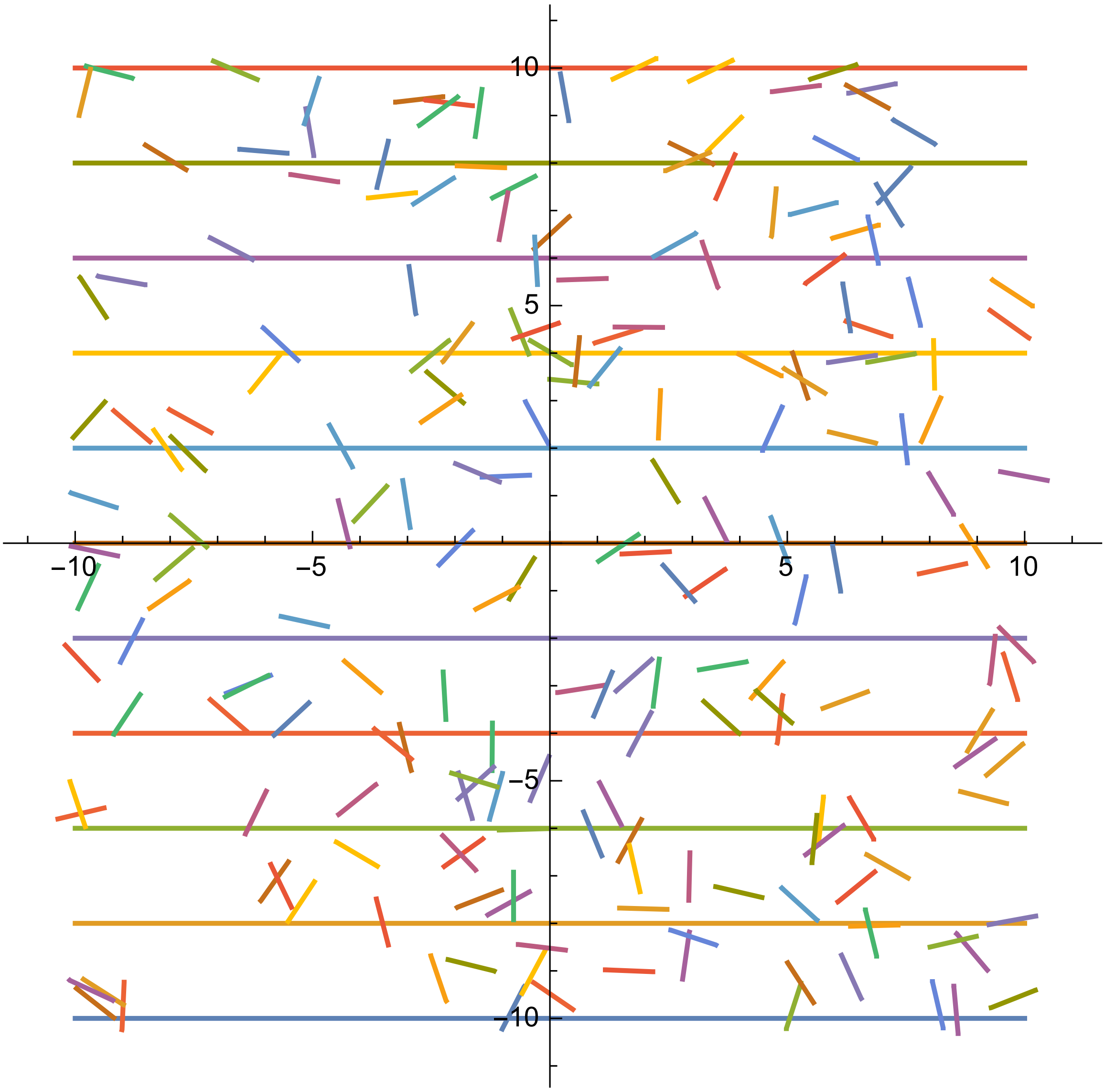
撒かれた針は、平行線のどれか一つ（かつ一つだけ）と交わるものと、どの平行線とも交わらないものに分けることができます。平行線のどれかと交わる針の数を M 本としましょう。

ビュフォンは

$$\lim_{N\to\infty}\frac{M}{N}=\frac{1}{\pi}$$

となることを示しました。先ほど言ったように、連続に分布する確率密度という考え方と、微積分の応用が必要となります。$\sin\theta, \cos\theta$ といった三角関数の扱いとその

積分について少し勉強しておかなければいけないことになります。ここまで考えて来た私は、チョット頭が痛くなってきたので実験してみることにしました。



この実験では $N = 200$ としました。平行線と交わる針を数えた結果は $M = 62$ でした。

$$\frac{M}{N} = \frac{200}{62} = \frac{100}{31} = 3.22581\ldots$$

ウム、それほど悪い結果ではないような気がスル $\cdots$

では、この続きの解説は黒板でのお楽しみということで $\cdots$