高校生のための現代数学講座　　東京大学
「現代数学における確率論」　　玉原国際セミナーハウス
講義 (3)　　舟木　直久　　2016 年 7 月 16 日

「現代数学における確率論」

皆さんは中学校で「確率の意味」について学んだことと思います。たとえばサイコロを何度も振り、そのうち 1 の目が出た回数を、サイコロを振った回数で割った相対度数（相対頻度）を考えます。1,000 回振って 1 の目が 200 回出れば相対度数は 1/5 です。試行回数を多くすれば、相対度数は一定の値 1/6（偏りのないサイコロの場合）に近づいていくことを、授業で実際にサイコロを振って確かめたのではないでしょうか。

確率論では、個々の確率を計算することはもちろん大事なことですが、最も重要なのは、このように試行の回数を増やしていったときに成り立つ法則について知ることです。上のサイコロの例は、大数の法則とよばれています。相対度数は、サイコロを振った回数 n を時刻と考えると、1 の目が出れば 1 点を与え、それ以外は 0 点として、その点数の時刻 n までの時間平均と考えられます。一方で 1/6 というのはサイコロの目の数はどれも同等に現れるとしたときの確率（アンサンブル）による点数の平均値です。このように時間平均がアンサンブル平均と同等であるという性質は、統計物理学においてはエルゴード性とよばれる基本原理になっています。余談ですが、19 世紀後半に活躍しエルゴード性を提唱したオーストリアの物理学者ボルツマンの 5 代目の子孫に当たる人が工学系の研究者として東京大学に長年在籍していたことがあります。

統計物理学は、原子・分子といった非常に多く存在するものの動きから、私たちが見ることのできるレベルでの現象を理解しようという学問です。つまり非常に大きな確率的な系を対象とし、そこから法則性を見出すことが目標です。

数学の分野で最も権威のある賞は、4 年に一度開催される国際数学者会議 (ICM) で 4 人程度に授与されるフィールズ賞ですが、2006 年以降の ICM で、確率論関係のフィールズ賞受賞者が相次いで出ています（Werner, Okounkov, Smirnov, Hairer）。日本の誇る確率論研究者、伊藤清も ICM2006 で第 1 回ガウス賞を受賞しました。上記 4 名のフィールズ賞受賞者の業績は、いずれも統計物理学に関わりを持つものです。講義では、これらも絡めて、高校生の皆さんにもわかるようにお話しできればと思います。

Boltzmann (1844～1906)

伊藤清

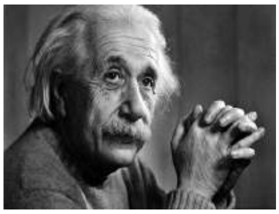
Hairer

Okounkov

Werner

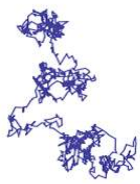
Smirnov

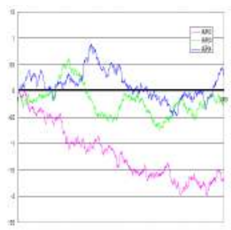
1　伊藤清: ギザギザな曲線の数学 — ブラウン運動



Einstein (1879〜1955)

生物学者のブラウン (1827) は、花粉から飛び出した微粒子を顕微鏡で観察中に、粒子が大変不規則な運動をすることを発見しました。これが今日、ブラウン運動とよばれるものです。その原因は長くわからなかったのですが、媒質の中にある多数の分子が微粒子に衝突することにより引き起こされるとアインシュタイン (1905) が指摘し、原因が明らかになりました。まさしく多数のランダムな試行（衝突）を繰り返した後に、ブラウン運動は現れるのです。





右の図のうち左側は平面の上を動く（2 次元の）ブラウン運動のシミュレーションを行ったものです。一方、右側は、横に時間軸をとり（1 次元の）ブラウン運動の動きを時間とともに追ったものです。3 本の不規則な運動がありますが、これはシミュレーションを 3 回行い、それぞれの結果を示したものです。

伊藤清は、このようなギザギザな（微分可能ではない）曲線に基づく微分積分学を確立し、現在の確率解析学の基礎を築きました。昨年はちょうど伊藤清の生誕百年でした。日本数学会はそれを祝う記念事業を行い、下のウェブページを開設し、ビデオや写真など多くの関連する資料を収集・整理しました。興味のある方は、ぜひ覗いてみてください。

http://mathsoc.jp/meeting/ito100/index-jp.html

2　Hairer: 紙を燃やす — KPZ 方程式

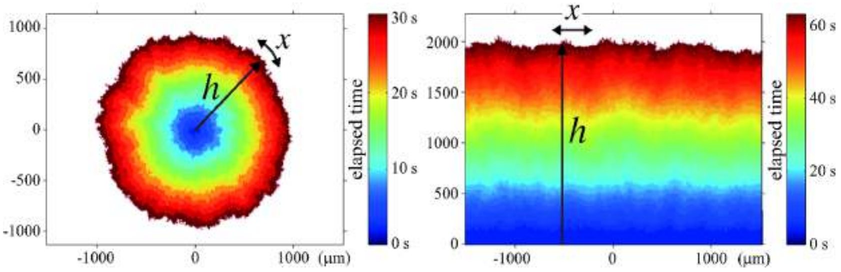
ブラウン運動のような不規則な運動や形はいろいろな所に現れます。たとえば紙を周りから燃やしていくと、右の写真のようになるでしょう。紙の周りは燃えたことによりギザギザになり、上の（1 次元の）ブラウン運動の図に似ていませんか？このようにギザギザになる理由としては、紙の材質は細かく見ると一様ではなく、燃え方に差が出るためと考えられます。

理論的には、これは界面成長とよばれる現象の一種です。界面成長にギザギザを生

むランダムな揺らぎを加えて得られる方程式が、KPZ 方程式 (Kardar-Parisi-Zhang, 1986) です。

$$\partial_t h = \partial_x^2 h + (\partial_x h)^2 + \xi(t, x)$$

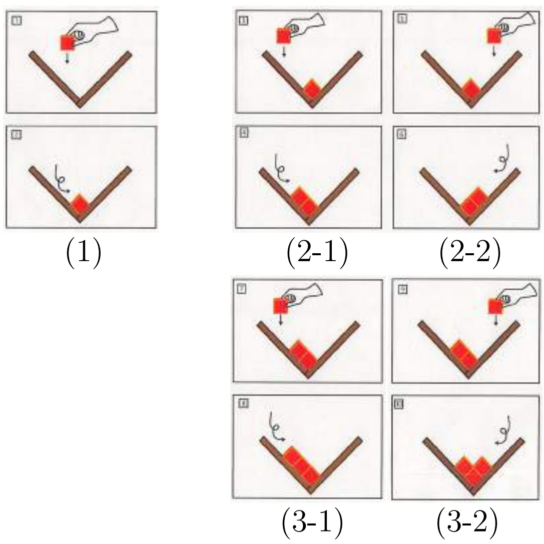
Hairer はこの方程式に意味を与えることに成功し、それがフィールズ賞受賞につながったのです。下の図は KPZ 方程式の解をシミュレーションにより求めたものです（東京大学物理学教室 竹内一将氏、現 東工大）。色は時間の変化を表していて界面が中から外へ、あるいは下から上に成長していく様子が見て取れます。界面のギザギザは、まるでブラウン運動のように見えませんか？



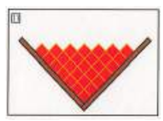
紙の燃焼の拡大（レーザーによる実験）のビデオがありますので、講義のときにお見せしたいと思います。

3　Okounkov: 積み木をいっぱい落としたら

直角な木の枠を 45° 傾けて、上から正方形の積み木を落として行く遊びを考えましょう。1 つ目を落とすと右の図 (1) のように、木枠の一番下まで落ちて止まります。次に 2 つ目を落とすと、左から落とすか右から落とすかによって、右の図の (2-1) か (2-2) のようになります。さらに 3 つ目を落とせば、(2-1) の状態のときには (3-1) か (3-2) の状態になります。(2-2) の状態であれば、(3-2) になるか、あるいは 3 つとも右側に積み重なった状態になるかのどちらかです。つまり 3 つの積み木を落としたときに実現可能な積み木の状態は 3 通りあることになります。



このようにして落とす積み木の数を増やして行き、n ヶ落としたとして実現可能な積み木の状態をイメージしてみましょう。そして、実現可能な積み木の状態の場合の数を $p(n)$ と書くことにしましょ



う。$p(n)$ は n の分割数（あるいはオイラーの関数）とよばれていて

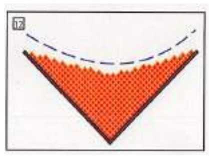
$$p(1)=1, p(2)=2, p(3)=3$$

であることを見ましたが、n を増やして行けば

$$p(4)=5, p(5)=7, p(6)=11, p(7)=15, \ldots$$

となることがわかります。

落とし方は、左から落とすか、真ん中あたりから落とすか、右寄りから落とすか、など色々あり得ますので、積み木の状態はランダム（確率的に起こる）と考えられます。ここでは、最も簡単なランダムさを考えましょう。つまり、n ヶの積み木を落としたときに可能な状態は $p(n)$ 通りあるので、どれも等しい確率 $\frac{1}{p(n)}$ で現れるとしましょう。

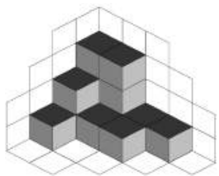


このようなランダムさを考えると、実は積み重なった積み木の形は（ランダムさによらず）一定の形に近づいて行くことが証明されています。もっと正確に言うと、n ヶの積み木を積み重ねると面積はどんどん膨れ上がって行きますから、逆に 1 ヶの積み木の面積は $\frac{1}{n}$ と小さくなって行くとして、全体の面積を 1 に保てば、積み重なった積み木の形は一定の形に近づいて行くことが示されているのです。

$n \to \infty$ の極限で得られる形は Vershik 曲線とよばれていて x-y 平面上で

$$e^{\frac{\pi}{\sqrt{12}}x} + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{12}}x} = e^{\frac{\pi}{\sqrt{12}}y}$$

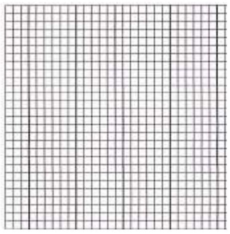
と表されます。ここで e^x は指数関数を表し数学 III で習いますが、まだ習っていなくても今は気にしないでください。ともかく、このような綺麗な数式で極限の曲線が表されることは驚きではないでしょうか。言いかえると、積み木の個数を増やして行ったときに、積み上がった形（2 次元ヤング図形とも言います）に対して大数の法則が成立するのです。



積み木を落として積み重ねて行く問題は、3 次元でも考えることができます。木の枠は、3 つの平面を用意して、それらを互いに垂直になるように立てかけて作ります。これはちょうど、3 次元空間の第 1 象限の部分に相当します。それをコーンのように持って、上からサイコロのような立方体を、どんどん落としていくことにします。できたものは 3 次元ヤング図形とよばれています。

1 つの立方体の体積を $\frac{1}{n}$ とし n ヶ積み重ねたとき、それぞれ等確率で現れるとして $n \to \infty$ とすれば、やはり一定の形が見えてきます。右の図で削れている部分が、それに該当します。Okounkov は 3 次元ヤング図形と同値なダイマー模型の解析に一役買っています。

4 Werner, Smirnov: 浸み込み — パーコレーション

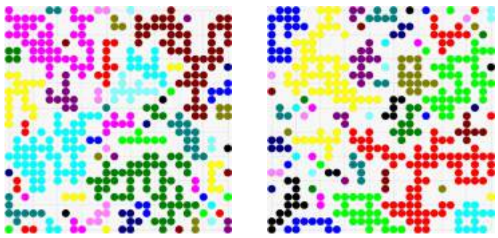


右の図は 28×28 のマス目です。マス目ごとに独立に確率 p で黒丸 ● を置き、確率 $1-p$ で空白のままにすることにします。p は確率ですから、もちろん $0 \leq p \leq 1$ を満たしています。$p=0$ ならすべて空白、$p=1$ ならすべてのマス目に黒丸 ● を置くことになります。黒丸がある地点は水を流す（水道管が通っている）と考えましょう。全部空白なら水は全く流れませんし、全部黒丸なら水はどんどん流れるということになります。これをパーコレーション（浸透）の問題といいます。

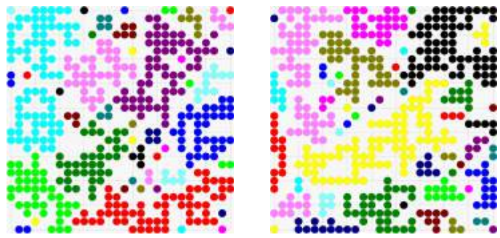
信州大学理学部の乙部厳己氏が作成したパーコレーション・シミュレーターを用いて計算機実験をしてみました。 http://argent.shinshu-u.ac.jp/lab/

黒丸は水が流れる部分ですが、わかりやすくするために流れがつながる部分を同じ色で塗ってみました。色の違いに意味はありません。つながっているかどうかに着目してください。

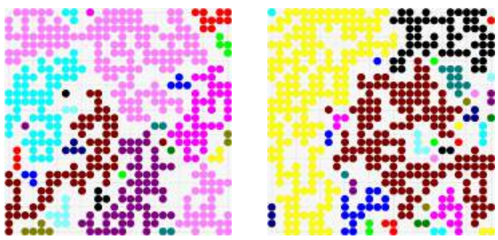
$p=0.5$



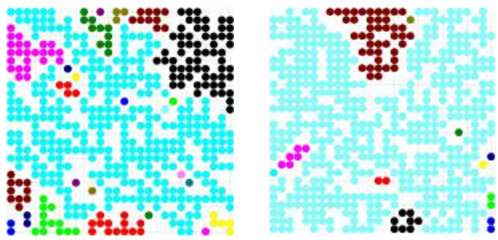
$p=0.55$



$p=0.6$



$p=0.65$



この計算機実験で、「左から右」あるいは「上から下」に同じ色でつながるときに「水が流れた」と言うことにします。p を決めてそれぞれ 25 回ずつ実験を行い、それを 4 回ずつ繰り返し「流れた」回数を数えると次のような結果になりました。

$p=0.5$： 0 回, 2 回, 2 回, 1 回　　　$p=0.55$： 5 回, 6 回, 6 回, 5 回

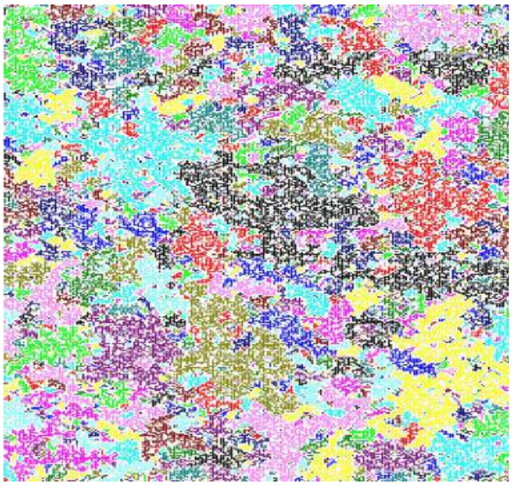
$p=0.6$： 21 回, 25 回, 18 回, 22 回　　　$p=0.65$： 24 回, 24 回, 23 回, 25 回

＊ 2 次元 site percolation の臨界確率 (critical probability) $= 0.592746$　(無限領域ではこの値を境に状況が一変)

確率 p を変えるとともに、水の流れ方に変化が起きることがわかりますね。$p=0.5$ (つまり、水道管をマス目の半分程度に設置する) のときはほとんど流れないのに、

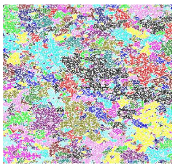
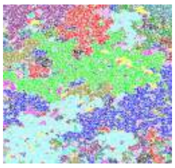
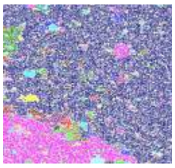
$p = 0.6$ あるいは $p = 0.65$ とすると流れやすくなることがわかります。

マス目の数をもっと増やすとどうでしょうか。ためしに 800×800 として $p = 0.55$ の場合に計算機実験をしてみました。



マス目の数は同じ 800×800 として p を変化させると水の流れ方はどのように変わるか見てみましょう。ここでは縮小表示しますが、次のような結果が得られました。

$p = 0.55$ $p = 0.58$ $p = 0.59$ $p = 0.6$

確率 p を少し変えただけでも、流れ方（黒丸のつながり方）に大きな変化が現れることがわかります。色の変わり目となる境界にはギザギザの曲線が現れます。Werner, Smirnov はこの曲線とブラウン運動の関係を明らかにしました。p が臨界確率のとき、この曲線は SLE (Schramm-Loewner Evolution) とよばれていますが、その解析には伊藤清が開発した確率解析が用いられます。

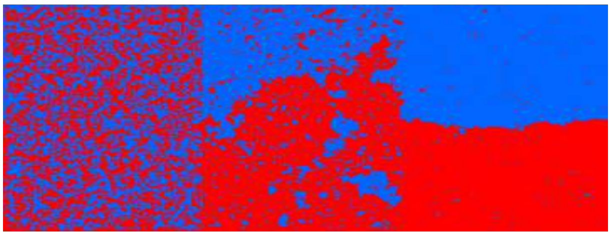
パーコレーションの考え方は、私たちの生活や実社会の多くの問題に応用されています。たとえば、液体（コーヒー）のしみこみ具合、森林火災の広がり、シェールガスの探索、リンゴ園でのリンゴの木の植え方、複雑な海岸線の解析などです。

シェールガスの探索: 石油は多孔質岩石（頁岩：けつがん、シェール）に浸み込んで留まっています。岩の中を細かく調べると、浸み込みやすいところと浸み込みにくいところが入り混じって分布しています。石油やシェールガスの効率よい採掘にパーコレーションの理論が応用できます。浸み込みやすい部分がどのくらいの比率かを調べれば石油の広がり具合がわかるからです。

リンゴ園での植え方: 太陽光が届く範囲でぎっしり植えた方がよいでしょうか。ときには病害虫が発生したり、落雷などによって山火事が発生することもあります。木の間隔が狭いとそれだけ病気も移りやすく、また炎も燃え広がりやすくなります。病気の発生や山火事で全滅してしまうことのないように、しかし効率も上げるためにはどの程度の間隔で木を植えればよいでしょうか。このような問題にもパーコレーションの考え方が使えます。

合金のモデル（イジング模型）の臨界現象:　　臨界温度における境界の挙動



高温　　臨界温度　　低温
よく混ざる　　混ざらない
（でたらめ）　　（相互作用が強い）

(Smirnov のウェブページから)

Werner のインタビュービデオが、東京大学数理科学研究科ビデオゲストブック (2008 年) に置いてあります。 http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/video/index.html
興味のある方は見てください。