高校生のための現代数学講座　　　　　　　　　　　　　　東京大学
「確率・統計」　　　　　　　　　　　　　　　　　　玉原国際セミナーハウス
講義 (2) 下村　　　　　　　　　　　　　　　　　　2016 年 7 月 16 日

「確率の計算いろいろ」

–現代の解析学の立場から–

ランダムな実験（試行）に於いて出現する結果全体の集合 Ω を**標本空間**といいます．標本空間の要素を**標本**といいます．確率を測る対象を**事象**といい，事象全体の集合を**事象族**といいます．

以下では，集合 X に対して，便宜上，空集合 $\emptyset$ や X 自身も X の部分集合と考える事とします．また，X の部分集合全体の集合を X の**冪集合**（べき集合）といい，2^X と表します．例えば，$Y = \{a, b, c\}$ とすると，Y の冪集合 2^Y は

$$2^Y = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\},\ \{a,b,c\}\}$$

となります．一般に，X が有限集合で N 個の要素からなる場合，X の冪集合 2^X の要素の数は 2^N 個となります．

1　硬貨を 2 回投げる試行

偏りのない硬貨を 2 回投げて，1 回目に硬貨の表が出るか裏が出るか，2 回目に硬貨の表が出るか裏が出るかについて考えましょう．硬貨の表を H と表し，硬貨の裏を T と表します.（H は硬貨の表面の head の頭文字で，T は硬貨の裏面の tail の頭文字です.）記号として，

- 1 回目に表が出て 2 回目も表が出るという事を (H, H),
- 1 回目に表が出て 2 回目に裏が出るという事を (H, T),
- 1 回目に裏が出て 2 回目に表が出るという事を (T, H),
- 1 回目に裏が出て 2 回目も裏が出るという事を (T, T)

の様に表します．つまり，括弧 $(\cdot, \cdot)$ の左側に 1 回目に出た面を書き，その右側に 2 回目に出た面を書きます．この場合の標本空間 Ω は 4 つの要素からなり，

$$\Omega = \{(H, H),\ (H, T),\ (T, H),\ (T, T)\}$$

となります．Ω は

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_k = H \text{ 又は } \omega_k = T\ (k = 1, 2)\}$$

と表す事ができます．つまり，標本空間 Ω は「長さが 2 の H と T の列の集合」となります．

事象として，まずは $\{(H, H)\}$, $\{(H, T)\}$, $\{(T, H)\}$, $\{(T, T)\}$ を考えるのは自然でしょう．これら以外にも，例えば，

- 2 回とも同じ面が出るという事 $\{(H, H),\ (T, T)\}$
- 1 回目と 2 回目で別の面が出るという事 $\{(H, T),\ (T, H)\}$

も事象として考えるのは自然でしょう．そして，空集合（何も起こらないという事）$\emptyset$ も事象として考え，標本空間そのもの (起こり得る全ての結果) $\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$ も事象として考えます．この様に考えると，この試行の事象族（事象全体の集合）$\mathcal{F}$ は Ω の冪集合 2^Ω を考えるのが良さそうで，通常はこの様に考えます.（これは，Ω が有限集合だからです.）すると，事象族（事象全体の集合）$\mathcal{F}$ は $2^4 = 16$ 個の要素からなり，

$$\mathcal{F} = 2^\Omega = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \text{ (空集合)},\ \{(H, H)\},\ \{(H, T)\},\ \{(T, H)\},\ \{(T, T)\}, \\ \{(H, H),\ (H, T)\},\ \{(H, H),\ (T, H)\},\ \{(H, H),\ (T, T)\}, \\ \{(H, T),\ (T, H)\},\ \{(H, T),\ (T, T)\},\ \{(T, H),\ (T, T)\}, \\ \{(H, H),\ (H, T),\ (T, H)\},\ \{(H, H),\ (H, T),\ (T, T)\}, \\ \{(H, H),\ (T, H),\ (T, T)\},\ \{(H, T),\ (T, H),\ (T, T)\}, \\ \{(H, H),\ (H, T),\ (T, H),\ (T, T)\} \end{array} \right\} \tag{1}$$

で与えれます．

硬貨の出る面に偏りがなく 2 つの面が等しい割合で出ると仮定すれば，事象 $A \in \mathcal{F}$ の確率 $P(A)$ は，

$$P(A) = \frac{A \text{ の要素の数}}{\Omega \text{ の要素の数}}$$

と定めるのが適切です．例えば，

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(H, H)\} \qquad \text{(2 回とも表が出る事象)}, \\ A_2 &= \{(H, T),\ (T, H)\} \qquad \text{(1 回目と 2 回目で別の面が出る事象)} \end{aligned}$$

とおくと,「2 回とも表が出る確率 $P(A_1)$」と「1 回目と 2 回目で別の面が出る確率 $P(A_2)$」は，それぞれ，

$$P(A_1) = \frac{1}{4}, \qquad P(A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

となります.

事象族 $\mathcal{F} = 2^\Omega$ は，以下の性質を持ちます：

($\mathcal{F}_0$.1) $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$ である.

($\mathcal{F}_0$.2) $A \in \mathcal{F}$ ならば，$A^c = X \setminus A \in \mathcal{F}$ である．ここで，$A^c = \Omega \setminus A$ は A の補集合 $\{\omega \,|\, \omega \in \Omega$ かつ $\omega \notin A\}$ である.

($\mathcal{F}_0$.3) $A, B \in \mathcal{F}$ ならば，$A \cup B \in \mathcal{F}$ である.

注意 1.
- 性質 ($\mathcal{F}_0$.1) の $\Omega \in \mathcal{F}$ である事は，$\mathcal{F} = 2^\Omega$ より直ちに分かりますが，性質 ($\mathcal{F}_0$.1) の $\emptyset \in \mathcal{F}$ である事と性質 ($\mathcal{F}_0$.2) からも導く事が出来ます.
- 性質 ($\mathcal{F}_0$.3) と似たようなものとして，$\mathcal{F} = 2^\Omega$ より，$A, B \in \mathcal{F}$ ならば，$A \cap B \in \mathcal{F}$ である事が分かります．この事は，性質 ($\mathcal{F}_0$.2) と性質 ($\mathcal{F}$.3) から導く事ができます. (集合の補集合の演算に関するド・モルガンの法則を用います.)

注意 2. $A, B \in \mathcal{F}$ が $A \cap B = \emptyset$ を満たす時，A と B は**排反**な事象であるといいます．例えば，事象 $A = \{(H, H),\ (T, T)\}$ と事象 $B = \{(H, T),\ (T, H)\}$ は排反です. 一方，事象 $C = \{(H, H),\ (H, T)\}$ と事象 $D = \{(H, H),\ (T, H)\}$ は（異なる事象ですが）排反ではありません.

各事象 $A \in \mathcal{F}$ に対して，A が起こる確率 $P(A)$（これは非負の実数）が定まっているのですが，P を $\mathcal{F}$ 上の非負実数値関数と見る事ができます．P は以下の性質を持ちます：

(P_0.1) $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$ であり，全ての $A \in \mathcal{F}$ に対して $0 \leq P(A) \leq 1$ が成り立つ.

(P_0.2) $A, B \in \mathcal{F}$ かつ $A \cap B = \emptyset$ ならば，

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{（有限加法性）}$$

注意 3. $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B$ とすると，P の定義より，

$$P(A) \leq P(B) \qquad \text{（単調性）}$$

が成り立つ事が容易に分かります．これは，性質 (P_0.2) から導く事も可能です.

この事から，全ての $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$0 = P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

という性質（性質 (P_0.1) の後半）を導く事が出来ます.

注意 4. $A \in \mathcal{F}$ に対して，$A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ だったのですが，性質 $(P_0.2)$ より，

$$P(A^c) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$$

が成り立ちます.

注意 5. $A, B \in \mathcal{F}$ が $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ を満たす時，A と B は**独立**な事象といいます.

1回目に表が出る事象 $A = \{(H,H),\ (H,T)\}$ と2回目に裏が出る事象 $B = \{(H,T),\ (T,T)\}$ について，$A \cap B = \{(H,T)\}$ なので，

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

となり，$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$ となるので，A と B は独立な事象です.

一方，1回目に表が出る事象 $A = \{(H,H),\ (H,T)\}$ と1回目に裏が出る事象 $C = \{(T,H),\ (T,T)\}$ について，$A \cap C = \emptyset$ なので，

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap C) = 0$$

となり，$P(A \cap C) = 0 \neq \frac{1}{4} = P(A)P(C)$ となるので，事象 A と事象 C は独立ではありません.

硬貨を2回投げる試行については，$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ という3つの組が大切なのですが（「確率空間」と呼ばれるものの具体例です），これはかなり単純な試行なので，$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ という組をあまり意識しなくても，高等学校の数学の範囲で取り扱う事が可能なものなのです.

2　長さ1の線分の1点を無作為に選ぶ試行

「硬貨を2回投げる試行」では，標本空間が有限集合でした.（硬貨を n 回投げる試行でも，標本空間は有限集合になります.）次に，標本空間が無限個の要素からなる具体例を考えます.

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と表します．数直線の区間

$$(0,1] = \{x \mid 0 < x \leq 1\}$$

と考え，A を区間 $(0,1]$ の "部分集合" とします．大雑把に言うと，「区間 $(0,1]$ の1点を無作為に選んだ時にその点が集合 A に属する確率」を考えます．更に，その確率は

$$\frac{\text{“集合 } A \text{ の長さ”}}{\text{区間 } (0,1] \text{ の長さ}}$$

と考えるのが自然ではないかと思います．

この試行では，標本空間は区間 $(0,1]$ です．$\Omega = (0,1]$ とおきます．

考えなければならないのは,「区間 $(0,1]$ の “部分集合” の長さ」というものです．

以下では，

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \qquad (0 \leq a \leq b \leq 1)$$

と表される $(0,1]$ の部分集合を（$(0,1]$ に含まれる）**区間**と呼びます．但し，$b = a$ の時は $(a,b]$ は $(a,a] = \emptyset$ と解釈します．

$\Omega = (0,1]$ に含まれる区間全体の集合を $\mathscr{I}$ と表します．まず，区間 $I := (a,b] \in \mathscr{I}$ の長さ $\mu_0(I)$ を

$$\mu_0(I) := b - a$$

と定めます．これは，自然な定め方で，ここから出発します．例えば，

$$\mu_0(\,(0,1]\,) = 1 - 0 = 1, \qquad \mu_0(\,(\frac{1}{5},\frac{3}{5}]\,) = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

となっています．μ_0 は $\mathscr{I}$ で定義された非負実数値関数（各区間に対して非負実数を対応させる対応）と考える事が出来ます．

区間のみの長さを測る事が出来ても，この試行を考える上では不十分だと思われます．例えば，区間 $I := (\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ の長さ $\mu_0(I) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ と測る事が出来ます．しかし，その補集合 $\Omega \setminus I = (0,\frac{1}{4}] \cup (\frac{3}{4},1]$ となり，これは区間ではなく，2 つの区間の和集合です．

そこで,「互いに交わらない $\underline{\text{有限個}}$ の区間の和集合で表される $\Omega = (0,1]$ の部分集合全体の集合」を $\mathscr{J}$ と表します．$\mathscr{J}$ の要素を（$\Omega = (0,1]$ の）**区間塊**いいます．$K \in \mathscr{J}$ に対して，$K = (a_1,b_1] \cup (a_2,b_2] \cup \cdots \cup (a_N,b_N]$（但し，$0 \leq a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_N \leq b_N$）と表す時，$J$ の長さを

$$\mu_0(K) := \mu_0((a_1,b_1]) + \mu_0((a_2,b_2]) + \cdots + \mu_0((a_N,b_N]) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_N - a_N)$$

と定めます．これで区間塊の長さを定める事が出来ました．これも自然に受け入れ易い定め方でしょう．μ_0 は $\mathscr{J}$ で定義された非負実数値関数（各区間塊に対して非負実数を対応させる対応）と考える事が出来ます．

区間塊全体の集合 $\mathscr{J}$ は，以下の性質を持ちます．

- $\emptyset \in \mathscr{J}$, $\Omega = (0,1] \in \mathscr{J}$.
- $K \in \mathscr{J}$ ならば，$K^c = \Omega \setminus K \in \mathscr{J}$ である．
- $K_1, K_2 \in \mathscr{J}$ ならば，$K_1 \cup K_2 \in \mathscr{J}$, $K_1 \cap K_2 \in \mathscr{J}$ である．

この事を $\mathscr{J}$ は Ω の**有限加法族**であるといいます.

μ_0 は区間塊全体 $\mathscr{J}$ 上の非負実数値関数として，以下の性質を持ちます.

- $\mu_0(\emptyset) = 0$, $\mu_0(\Omega) = 1$.
- $K_1, K_2 \in \mathscr{J}$ かつ $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ ならば,

$$\mu_0(K_1 \cup K_2) = \mu_0(K_1) + \mu_0(K_2).$$

区間塊以外でも，我々が長さを測るべき集合はあると思われます．例えば，$[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$（但し，$0 < a \leq b \leq 1$）や，$(a, b) := \{x \mid a < x < b\}$ （但し，$0 \leq a \leq b \leq 1$）や，1 点集合 $\{a\}$（但し，$0 < a \leq 1$）があります．この様な集合の長さを考える為に，以下の様な集合の記号を導入します.

一般に，自然数 N に対して，集合 X の N 個（有限個）の部分集合 $A_1, \ldots, A_N$ に対して，X の部分集合 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} A_n$ を「1 から N までの或る番号 n に対して集合 A_n に属する様な X の要素全体の集合」と定め，X の部分集合 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{N} A_n$ を「1 から N までの全ての番号 n に対して集合 A_n に属する様な X の要素全体の集合」と定めます．$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} A_n$ を $A_1, \ldots, A_N$ の**和集合**といい，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{N} A_n$ を $A_1, \ldots, A_N$ の**共通部分**といいます.

また，一般に，集合 X の無限個の部分集合 $A_1, A_2, \ldots$ に対して，X の部分集合 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を「或る番号 n に対して集合 A_n に属する様な X の要素全体の集合」と定め，X の部分集合 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を「全ての番号 n に対して集合 A_n に属する様な X の要素全体の集合」と定めます．$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を $A_1, A_2, \ldots$ の**和集合**といい，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を $A_1, A_2, \ldots$ の**共通部分**といいます.

例えば,

$$[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{a}{n},b\right], \qquad (0<a<b\le 1),$$
$$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a,b-\frac{b-a}{n}\right], \qquad (0\le a<b\le 1),$$
$$\{a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{a}{n},a\right], \qquad (0<a\le 1)$$

が成り立ちます．上の事は，$[a,b]$, (a,b), $\{a\}$ は，無限個の区間の共通部分や和集合で表される事を意味します.（これは大学の学部 2 年生レベルの内容ですが，論証なしに直観的にも理解できるでしょう.）

ここから少し難しくなるかもしれませんが，現代数学の確率論の枠組みに入ります．「お話」として読んでもらえればよいと思います.

天下り的ではありますが，以下の 3 つの条件 (i)–(iii) を満たす 2^{Ω} の部分集合 $\mathscr{A}$ を考えましょう：

(i) $\emptyset\in\mathscr{A}$ である.

(ii) $E\in\mathscr{A}$ ならば，$E^c=\Omega\setminus E\in\mathscr{A}$ である.

(iii) $E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots\in\mathscr{A}$ ならば，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{A}$ が成り立つ.

この様な $\mathscr{A}$ は Ω の **σ-加法族**であるといいます．この時，以下が成り立ちます：

- $\Omega\in\mathscr{A}$.
- $E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots\in\mathscr{A}$ ならば，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{A}$ が成り立つ.
- N を自然数とし，$E_1,\cdots,E_N\in\mathscr{A}$ ならば，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N}E_n\in\mathscr{A}$, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{N}E_n\in\mathscr{A}$ が成り立つ.

（この証明には，上の 3 つの条件 (i)–(iii) と集合に関するド・モルガンの法則を用います.）

標本空間 $\Omega=(0,1]$ の部分集合で長さを測るのは,「区間全体 $\mathscr{I}$ を含む様な σ-加法族」の要素をとするのが自然ではないでしょうか? ここで，冪集合 2^{Ω} は「区間全

体 $\mathscr{I}$ を含む様な σ-加法族」なので，この様な σ-加法族は少なくとも 1 つは存在しています.

無限個の事象を扱おうとしているので，$\mu_0(\cdot)$ について，以下の様な考察をしましょう．自然数 n に対して，区間 I_n を $I_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ と定めます．$j \neq k$ ならば $I_j \cap I_k = \emptyset$ となっています.

$$(0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

となります．特に，この区間の列 $I_1, I_2, \ldots$ については，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ もまた区間となっています.（一般に，区間の列の和集合は区間になるとは限りません.）すると，

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \mu_0((0,1]) = 1 - 0 = 1$$

となります．一方，任意の自然数 N に対して

$$\bigcup_{n=1}^{N} I_n = \left(\frac{1}{N+1}, 1\right]$$

となる事に注意すると，任意の自然数 N に対して

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_0(I_n) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

となるので，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(I_n) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu_0(I_n) = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

となります．以上より，

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(I_n)$$

が成り立ちます.

「区間全体 $\mathscr{I}$ を含む Ω の σ-加法族 $\mathscr{A}$」と「$\mathscr{A}$ 上の非負実数値関数 μ（$\mathscr{A}$ の各要素に対して非負実数を対応させる対応 μ）」の組 $(\mathscr{A}, \mu)$ で，以下の条件を満たすものを発見できればよいのではないかという結論に至ります.

- $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$.

- $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots \in \mathscr{A}$ かつ $E_j \cap E_k = \emptyset$ $(j \neq k)$ ならば,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \qquad \text{（可算加法性）}$$

  が成り立つ.

- Ω に含まれる任意の区間 $(a, b]$ に対して,

$$\mu((a, b]) = b - a$$

  が成り立つ.

測度論によると,「$\mathscr{I}$ を含む最小の σ-加法族 $\mathscr{B}$」上の非負実数値関数 μ で以下の 3 つの条件を満たすものが唯一つ存在する事が知られています :（**これは，大学の学部 3 年生レベルの解析学で学ぶ事です．**）

(I) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$.

(II) $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathscr{B}$ かつ $A_j \cap A_k = \emptyset$ $(j \neq k)$ ならば,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad \text{（可算加法性）}$$

が成り立つ.

- Ω に含まれる任意の区間 $(a, b]$ に対して,

$$\mu((a, b]) = b - a = \mu_0((a, b])$$

  が成り立つ.

注意 6.
- $\mathscr{B}$ は Ω の**ボレル集合族**といいます．$\mathscr{B}$ の要素を Ω の**ボレル集合**といいます.

- $\mathscr{B} \neq 2^{\Omega}$ である事が知られています.

- $\mathscr{I} \subset \mathscr{B}$ が成り立ちます．つまり，区間塊はボレル集合となります.

- 大雑把に言うと，Ω の “まともな（常識的に思い浮かぶ）”部分集合はボレル集合であると考えて問題ありません.

- 上の条件 (I) と (II) を満たす $\mathscr{B}$ 上の非負実数値関数（$\mathscr{B}$ の各要素に対して非負実数を対応させる対応）μ は，$\mathscr{B}$ 上の**確率測度**と呼ばれます.

- μ は $\mathscr{B}$ 上の（有限）測度の一つで，$\mathbb{R}$ のルベーグ測度（1 次元ルベーグ測度）と呼ばれるものを $\mathscr{B}$ へ制限したものに一致します.

- $K \in \mathscr{J}$ に対して，
$$\mu(K) = \mu_0(K)$$
が成り立っています.

- 上の μ の性質を満たす 2^Ω 上の非負実数値関数は存在しない事が知られています.

注意 7.
- μ の可算加法性と $\mu(\emptyset) = 0$ である事から，$A, B \in \mathscr{B}$ かつ $A \cap B$ ならば
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \text{（有限加法性）}$$
が成り立つ事が分かります.

- μ の有限加法性から，$A, B \in \mathscr{B}$ かつ $A \subset B$ ならば
$$\mu(A) \leq \mu(B) \qquad \text{（単調性）}$$
が成り立つ事が分かります．この事から，任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して
$$0 = \mu(\emptyset) \leq \mu(A) \leq \mu(\Omega) = 1$$
が得られます.

そして，例えば，$a \in (0, 1]$ に対して，
$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{a}{n}, a\right] \in \mathscr{B}$$
となり，1 点集合 $\{a\}$ の "長さ"$\mu(\{a\})$ が定義されて，
$$\mu(\{a\}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{a}{n}, a\right]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left(a - \frac{a}{n}, a\right]\right) = \lim_{n\to\infty} \left\{a - \left(a - \frac{a}{n}\right)\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$$
と計算できます．ここで，2 つ目の等号では，可測集合の減少列に対する有限測度の収束定理を用いています．同様に，$[a, b] \in \mathscr{B}$, $(a, b) \in \mathscr{B}$ であり，μ の有限加法性から，
$$\mu([a, b]) = b - a, \qquad \mu((a, b)) = b - a$$

となります.

元々の試行（確率モデル）に戻ります．設定としては，$\Omega = (0,1]$ とし，$A \in \mathscr{B}$ とします.「区間 $\Omega = (0,1]$ の 1 点を無作為に選んだ時にその点が集合 A に属する確率」を考える事ができます．標本空間 Ω は $\Omega = (0,1]$ で，事象族 $\mathcal{F}$ は Ω のボレル集合族 $\mathscr{B}$ であり，事象 $A \in \mathcal{F} = \mathscr{B}$ の起こる確率 $P(A)$ は

$$P(A) := \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \mu(A)$$

で与えらえます．P は $\mathscr{B}$ 上の確率測度となります.

この試行を意味付けているのは，標本空間 $\Omega = (0,1]$ と事象族（Ω の σ-加法族）$\mathcal{F} = \mathscr{B}$ と $\mathcal{F}$ 上の確率測度 P の組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ です．この $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は，**確率空間**と呼ばれるものの具体例です.

A　確率とは何か

現代数学に於いて，確率は以下の枠組みで考えるのが標準的と考えられます.

Ω を集合とします.

$\mathcal{F}$ は 2^Ω の部分集合で以下の 3 つの条件 $(\mathcal{F}.1)$–$(\mathcal{F}.3)$ を満たすものとします：

$(\mathcal{F}.1)$ $\emptyset \in \mathcal{F}$ である.

$(\mathcal{F}.2)$ $A \in \mathcal{F}$ ならば，$A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ である.

$(\mathcal{F}.3)$ $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{F}$ ならば，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ が成り立つ.

この様な $\mathcal{F}$ は，Ω の **σ-加法族**であるといいます．前節で「区間 $(0,1]$ の σ-加法族」というものを出しましたが，この $\mathcal{F}$ はそれを抽象化したものです.

P は $\mathcal{F}$ 上の非負実数値関数（$\mathcal{F}$ の各要素に対して非負実数を対応させる対応）で，以下の 2 つの条件 (P.1), (P.2) を満たすものとします：

(P.1) $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

(P.2) $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathscr{F}$ かつ $A_j \cap A_k = \emptyset$ $(j \neq k)$ ならば，

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \qquad \text{（可算加法性）}$$

が成り立つ.

この様な P は，$\mathcal{F}$ 上の**確率測度**であるといいます.（前節での μ を抽象化したものです.）

3 つの組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を**確率空間**といいます．Ω を標本空間といい，$\mathcal{F}$ を**事象族**といいます．前節の最後に現れた $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は，確率空間の具体例です.

現代数学で「確率」と言えば，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の事を指すのではないかと思います．従って,「確率」とは，それなりに抽象的な概念であるとも言えるのではないかと思います.

確率論は，実解析学や関数解析学との相性の良い分野となっている様です.（この辺りの事は，大学の学部 3 年生から大学院にかけて学ぶ内容です.）確率空間は，解析学での（有限）測度空間と呼ばれるものの特別な場合となり，測度論の知見を適用する事ができます.「確率変数とその期待値」も，測度と積分の範疇で扱う事ができます.